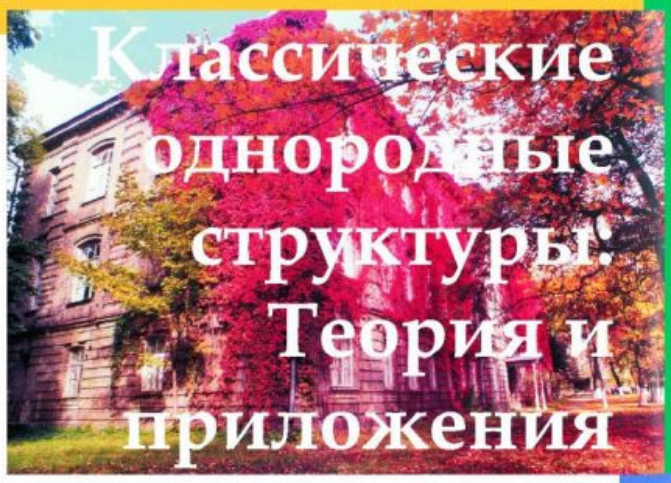
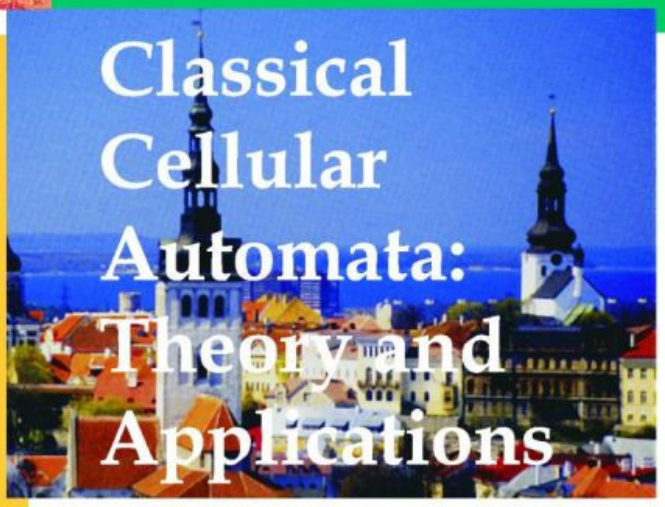
В.З. АЛАДЬЕВ
В.К. БОЙКО
Е.А. РОВБА

Классические однородные структуры: Теория и приложения



V. ALADJEV
V. BOIKA
Y. ROUBA

Classical Cellular Automata: Theory and Applications



MCMXL

Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

МЕЖДУНАРОДНАЯ АКАДЕМИЯ НООСФЕРЫ
Балтийское отделение

В.З. АЛАДЬЕВ, В.К. БОЙКО, Е.А. РОВБА

Классические однородные структуры: Теория и приложения

Classical Cellular Automata: Theory and Applications

М о н о г р а ф и я

Гродно 2008

УДК 519.7: 519.713:519.712.5:519.91:573.3:631.391:681.5:793.7
AMS 03D05, 11B85, 18B20, 37B15, 68Q10, 68Q45, 68Q70, 68Q80

Аладьев, В.З. Классические однородные структуры: Теория и приложения = Classical Cellular Automata: Theory and Applications : монография / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. – Гродно : ГрГУ, 2008. – 486 с. – ISBN 978-985-515-020-7. – ISBN 978-9985-9508-4-5.

В монографии рассматриваются основы теории *классических однородных структур* ***(ОС)***, представляющей собой *базовую* компоненту *общей теории однородных структур* ***(Cellular Automata)***: новую и весьма перспективную среду моделирования многих дискретных параллельных процессов, явлений и феноменов в различных областях современного естествознания. В значительной степени данная проблематика представляет собой *новую* междисциплинарную область, начинающую играть всевозрастающую роль во многих модельных приложениях: прежде всего в современной и перспективной вычислительной технике, биологических и физических науках. ***ОС***-концепция в определенном смысле является уникальным явлением – с одной стороны, она представляет собой формальный аппарат высокопараллельных вычислений (*подобно тому формальному аппарату, которым являются машины Тьюринга для последовательных вычислений*) и основу формального моделирования целого ряда процессов, феноменов и объектов в весьма широком спектре областей, а с другой стороны, имеет эквивалентные технические реализации в виде ***CAM***-машин ***Тоффоли***, сетей транспьютеров, систолических структур, клеточных процессоров и др., что делает ее весьма привлекательной как в фундаментальных, так и прикладных исследованиях во многих областях современного естествознания. Изложение материала ведется на содержательном уровне, хорошо иллюстрировано примерами, отличается достаточной простотой и ориентировано на первоначальное ознакомление с предметом. Данную монографию можно рассматривать в качестве хорошего введения в перспективную среду моделирования, допускающую эффективное применение в стратегически важных областях современного естествознания.

Монография рассчитана на достаточно широкий круг специалистов и исследователей в различных теоретических и прикладных областях современной науки и техники: прежде всего, в области кибернетики, синергетики, дискретной математики, теории систем, математического и физического моделирования, вычислительных, биологических наук (*и, прежде всего, математической биологии*) и информатики. Основу книги составил материал *одноименного* спецкурса, данного *первым* автором в Гродненском государственном университете им. Я. Купалы в апреле-мае 2008 г. Издание адресовано студентам, аспирантам и преподавателям соответствующих специальностей наряду с самостоятельно работающими исследователями в этом и других естественнонаучных направлениях.

Табл. **7**, ил. **25**, библиогр.: **566** назв.

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор ***М.К.Буза***

ISBN 978-985-551-020-7
ISBN 978-9985-9508-4-5

© Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А., 2008
© Учреждение образования
«Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы», 2008

Содержание

Contents **5**

Список принятых сокращений **7**

List of the adopted abbreviations **8**

Предисловие **9**

Введение **17**

Глава 1. Базовая концепция однородных структур (ОС-моделей) **24**

1.1. Основные понятия, определения и обозначения 24

1.2. Основные типы однородных структур 42

1.3. Архитектура теории однородных структур и ее приложений 66

1.4. Аппарат исследований в теории однородных структур 75

Глава 2. Проблема неконструируемости в классических однородных структурах **86**

2.1. Предварительные сведения по проблематике 86

2.2. Типы неконструируемости в классических ***ОС-***моделях 88

2.3. Критерии существования в классических ***ОС-***моделях основных типов неконструируемости конфигураций 108

2.4. Алгоритмические аспекты проблемы неконструируемости и связанные с нею вопросы динамики классических ***ОС-***моделей 124

2.5. Суръективность и инъективность глобальных параллельных отображений в классических ***ОС-***моделях 131

2.6. Специальные вопросы проблемы неконструируемости в ***ОС-***моделях 132

2.7. Особенности проблемы неконструируемости для конечных классических однородных структур 138

2.8. Вопросы обратимости динамики классических однородных структур 143

2.9. Особенности проблемы неконструируемости для однородных структур на разбиении 154

Глава 3. Экстремальные конструктивные возможности классических однородных структур **157**

3.1. Универсальные конечные конфигурации в классических ***ОС-***моделях 157

3.2. Самовоспроизводящиеся конечные конфигурации в ***ОС-***моделях 165

3.3. Универсальные и самовоспроизводящиеся конечные конфигурации для однородных структур на разбиении 184

Глава 4. Проблема сложности конечных конфигураций в классических однородных структурах **188**

Глава 5. Параллельные формальные грамматики и языки, определяемые классическими однородными структурами (ОС-моделями) **201**

5.1. Основные свойства параллельных языков, определяемых классическими однородными структурами 202

5.2. Параллельные грамматики, определяемые ***ОС-***моделями, и формальные грамматики других классов и типов 209

5.3. Параллельные грамматики, определяемые недетерминированными однородными структурами 213

5.4. Алгоритмические проблемы теории параллельных грамматик, определяемых классическими однородными структурами 216

Глава 6. Проблема моделирования в классических однородных структурах и связанные с ней вопросы **223**

6.1. Понятия моделирования в классических однородных структурах 224

6.2. Моделирование классическими однородными структурами известных формальных алгоритмов переработки слов 232

6.3. Моделирование классических однородных структур структурами из того же класса формальных объектов 242

6.4. Специальные вопросы моделирования в классических однородных структурах, связанные с их динамическими свойствами 256

6.5. Формальные параллельные алгоритмы, определяемые классическими одномерными однородными структурами 273

6.6. Программное обеспечение и аппаратура для симулирования ***ОС-***моделей 279

Глава 7. Проблема декомпозиции глобальных функций перехода в классических ОС-моделях **293**

7.1. Декомпозиция специальных глобальных функций перехода в ***ОС-***моделях 294

7.2. Некоторые подходы к решению общей проблемы декомпозиции 298

7.3. Проблема сложности глобальных функций перехода и вопросы ее алгоритмической разрешимости 307

7.4. Проблема сложности глобальных функций перехода в ***ОС-***моделях 320

7.5. Специальные вопросы исследований в ***ТОС-***проблематике 323

Глава 8. Некоторые прикладные аспекты ОС-проблематики **333**

8.1. Некоторые аспекты использования ***ОС-***моделей в математике 334

8.1.1. Решение одной комбинаторной проблемы ***Г. Штейнгауза*** 336

8.1.2. Решение одной проблемы ***С. Улама*** из теории чисел 338

8.1.3. Алгебраическая система для полиномиального представления локальных функций перехода в ***ОС-***моделях 341

8.2. Некоторые аспекты использования ***ОС-***моделей в биологии 343

8.2.1. Основные предпосылки модельного подхода в биологии развития 343

8.2.2. Формальные дискретные модели самовоспроизведения 347

8.2.3. Формальное моделирование процессов роста в среде однородных структур 351

8.2.4. Формальные ***ОС-***модели дифференциации, регуляции и регенерации в биологии развития 354

8.2.5. Сравнительный анализ ***ОС-***моделей и ***L-***систем как формального аппарата модельных исследований в биологических науках 361

8.3. Вопросы использования ***ОС-***моделей в вычислительных науках 368

8.4. Некоторые другие области приложений однородных структур 385

Заключение **422**

Summary of the General Results **425**

Литература **464**

Об авторах **484**

Contents

Contents **5**

List of the adopted abbreviations **7**

Preface **9**

Iintroduction **17**

Chapter 1. The basic concept of homogeneous structures (HS-models) **24**

1.1. The basic concepts, definitions and designations 24

1.2. The basic types of homogeneous structures 42

1.3. Architecture of the theory of homogeneous structures and its applications 66

1.4. Technique of researches in the theory of homogeneous structures 76

Chapter 2. Nonconstructibility problem in classical homogeneous structures **86**

2.1. Preliminary information on the problems 86

2.2. Types of nonconstructibility in classical ***HS-***models 88

2.3. Criteria of existence in classical ***HS-***models of the basic types of nonconstructibility 108

2.4. Algorithmic aspects of the nonconstructibility problem and the associated questions of dynamics of ***HS-***models 124

2.5. Surjectivity and injectivity of global parallel maps in ***HS-***models 131

2.6. Special questions of the nonconstructibility problem in classical ***HS-***models 132

2.7. Peculiarities of the nonconstructibility problem for finite classical homogeneous structures 138

2.8. Questions of reversibility of dynamics of classical homogeneous structures 143

2.9. Features of the nonconstructibility problem for homogeneous structures on splitting 154

Chapter 3. Extremal constructive opportunities of classical homogeneous structures **157**

3.1. Universal finite configurations in classical homogeneous structures 157

3.2. Self-reproduction of finite configurations in classical homogeneous structures 165

3.3. Universal and self-reproducing finite configurations for homogeneous structures on splitting 184

Chapter 4. Problem of complexity of finite configurations in classical homogeneous structures **188**

Chapter 5. Parallel formal grammar and languages defined by homogeneous structures **201**

5.1. The basic properties of the parallel languages defined by classical homogeneous structures 202

5.2. Parallel grammars, determined by classical homogeneous structures along with formal grammars of other classes and types 209

5.3. Parallel grammars, defined by non-deterministic homogeneous structures 213

5.4. Algorithmic problems of the theory of parallel grammars, defined by homogeneous structures 216

Chapter 6. Problem of modeling in classical homogeneous structures, and the connected questions **223**

6.1. Concepts of modeling in classical homogeneous structures 224

6.2. Modeling of the known formal algorithms of processing of words by classical homogeneous structures 232

6.3. Modeling of classical homogeneous structures by structures from the same class 242
6.4. Special questions of modeling in the classical homogeneous structures, linked with their dynamic behaviour 256
6.5. The formal parallel algorithms defined by classical one-dimensional homogeneous structures 273
6.6. The software and hardware for simulation of homogeneous structures 279

Chapter 7. Problem of decomposition of the global transition functions in classical homogeneous structures **293**
7.1. Decomposition of the special global transition functions in classical ***HS-***models 294
7.2. Certain approaches to decision of the general problem of decomposition 298
7.3. Problem of complexity of global transition functions in classical ***HS-***models, and questions of its algorithmic solvability 307
7.4. Problem of complexity of global transition functions in ***HS-***models 320
7.5. Special questions of researches in the ***HS*** problems 323

Chapter 8. Certain applied aspects of the HS problems **333**
8.1. Certain aspects of use of ***HS-***models in mathematics 334
8.1.1. The solution of a combinatory ***H. Steinhaus*** problem 336
8.1.2. The solution of a ***S. Ulam's*** problem from the theory of numbers 338
8.1.3. Algebraic system for polynomial representation of local transition functions in classical homogeneous structures 341
8.2. Certain aspects of use of ***HS-***models in biology 343
8.2.1. The basic prerequisites of the model approach in biology of development 343
8.2.2. Formal discrete models of self-reproduction 347
8.2.3. Formal modeling of processes of growth in the ***HS-***environment 351
8.2.4. Formal ***HS-***models of differentiation, regulation and regeneration in biology of development 354
8.2.5. The comparative analysis of ***HS-***models and ***L-***systems as a formal method of the model investigations in biological sciences 361
8.3. Certain questions of use of ***HS-***models in computer sciences 368
8.4. Some other fields of applications of homogeneous structures 385

Conclusion **422**
Summary of the General Results **425**
References **464**
About writers **484**

Список принятых сокращений

d-ОПДФ – обобщенная проблема декомпозиции ***d-***мерных глобальных функций
d-ОС – ***d-***мерные однородные структуры
d-ПДФ – проблема декомпозиции ***d-***мерных глобальных функций перехода
АГ – асинхронная грамматика
ВБ – внутренний блок
ВС – вычислительные системы
ВСКФ – взвимно стираемые конфигурации
ГФП – глобальная функция перехода
ДПДС – дискретная параллельная динамическая система
ИСГ – изотонная структурная грамматика
КБД – картинные базы данных
КФ – конфигурация ***(****конфигурации* ***–*** *в зависимости от контекста****)***
КФФ – конфигурация Французского флага
ЛБФ – локальная блочная функция
ЛФП – локальная функция перехода
МТ – машина Тьюринга
MT^{s}_{q} – машина Тьюринга с ***s*** символами на ленте и ***q*** состояниями
НКА – недетерминированный конечный автомат
НКФ – неконструируемые конфигурации
ОВС – однородные вычислительные системы и среды
ОПДФ – обобщенная проблема декомпозиции глобальных функций перехода
ОПС – общая проблема синхронизации
ОС – однородные структуры ***(ОС-модели)***
ОСП – однородные структуры с памятью
ОСР – однородные структуры с рефрактерностью
ПГ – параллельная грамматика
ПДФ – проблема декомпозиции глобальных функций перехода
ПК – персональный компьютер
ПООС – последовательность однозначно определенных сумм
ПОР – проблема ограниченного роста
ПП – параллельные подстановки
ППГ – параллельные пространственные грамматики
ПППГ – параллельные программируемые пространственные грамматики
ПФФ – проблема Французского флага
СКА – системы компьютерной алгебры
ССП – система продукций Поста
ТОС – теория однородных структур
ТТГ – Таллиннская Творческая Группа
ТФГ – теория формальных грамматик
УКФ – универсальные конфигурации
УМТ – универсальная машина Тьюринга
ШС – шаблон соседства
ЭВМ – электронно-вычислительная машина
ЯПП – язык параллельных подстановок

List of the adopted abbreviations

∞-MEC – infinite mutually erasable configurations
AI – Artificial Intelligence
AS – algebraic system
CA – cellular automata ***(CA-models)***
CF – configurations
d-GDP – ***d-***dimensional global decomposition problem
d-GLDP – ***d-***dimensional generalized global decomposition problem
d-HS – ***d-***dimensional homogeneous structures
d-HSM – ***d-***dimensional homogeneous structures with memory
d-HSR – ***d-***dimensional homogeneous structures with refracterity
ESP – elementary symmetrical polynomials
FA – functional algorithm
FGT – formal grammar theory
GDP – global decomposition problem
GLDP – generalized global decomposition problem
GLHS – generalized linear classical ***d-HS***
GTF – global transition function
HS – homogeneous structures ***(HS-models)***
HSR – homogeneous structures with refracterity
IAN – International Academy of Noosphere
IB – internal block
LRA – locally realizable algorithms
LTF – local transition function
MEC – mutually erasable configurations
MTOHS – mathematical theory of homogeneous structures
MT^{s}_{q} – Turing machine with s symbols on a tape and q states
NCF – nonconstructible configurations
NCF-1 – nonconstructible configurations of type ***1***
NCF-2 – nonconstructible configurations of type ***2***
NCF-3 – nonconstructible configurations of type ***3***
NI – neighborhood index of ***d-HS***
NT – neighborhood template of ***d-HS***
PADHS – parallel algorithms defined by the classical ***d-HS***
PC – personal computer
PCF – passive configurations
RANS – Russian Academy of Natural Sciences
SRC – self-reproducing configurations in the Moore sense
SUDS – sequence of uniquely defined sums
TRG – Tallinn Research Group
TWPM – two-way pushdown machines
UCF – universal configurations
UHS – universal homogeneous structures
UMT – universal Turing machine
VCF – vanishing configurations

П р е д и с л о в и е

Современные тенденции развития перспективных архитектур высокопараллельной вычислительной техники ***(ВТ)***, проблемы моделирования дискретных параллельных процессов, теория параллельных дискретных динамических систем, дискретная математика и синергетика, задачи искусственного интеллекта и робототехники, параллельные алгоритмы и обработка информации, физическое и биологическое моделирование, а также целый ряд других важных предпосылок в различных областях современного естествознания определяют в последние годы новый подъем интереса к различного рода клеточным формальным моделям высокопараллельного образа действия, важнейшими из которых являются *однородные структуры* ***(ОС;*** основной синоним ***–*** *клеточные автоматы*; в англоязычной терминологии соответственно ***–*** *Homogeneous Structures* и *Cellular Automata*). За время, прошедшее после выхода в свет монографий и сборников статей [1,3,5, 7-10,15,45,53-57,75,82,83,143,145,146,152-157,171,173,175,197,304], посвященных различным теоретическим и прикладным аспектам ***ОС-***проблематики (*прежде всего это относится к работам* [5,8,9,90,134,141,144,145,146,169,164,186,293]), достигнут определенный прогресс в этом направлении, что связано, в первую очередь, с успехами теоретического характера, существенным расширением сферы приложений ***ОС-***моделей (*главным образом, в вычислительных науках, физике, биологии, информатике и кибернетике*) и значительным увеличением числа исследователей в данной области. Наряду с этим, в США, Японии, Великобритании, Германии и Эстонии появился ряд монографий и сборников, обобщающих и суммирующих итоги развития тех или иных направлений теории ***ОС (ТОС)*** и ее многочисленных приложений. Наши монографии [3,5,8,10] на содержательном уровне представили обзор основных результатов по ***ТОС-***проблематике, полученных ***Таллинской Творческой Группой*** за ***30-***летний период ее научно-прикладной деятельности, исключая десятилетний перерыв ***(1997-2006)***, обусловленного активной работой над системами компьютерной алгебры ***(CAS)*** такими, как ***Mathematica*** и ***Maple.***

С теоретической точки зрения клеточные автоматы (*Cellular Automata* ***– CA)*** были введены в конце ***1940-х Джоном фон Нейманом*** с подачи ***С. Улама*** как формальные модели самовоспроизведения организмов. При этом, изученнве ими структуры были, главным образом, ***1-*** и ***2-***мерными, хотя рассматривались и более высокие размерности. Вопросы универсальности вычислений наряду с другими теоретическими вопросами поведения такого типа структур также не были упущены из вида. ***CA-***модель ***Дж. фон Неймана*** получила свое дальнейшее развитие в работах его непосредственных последователей, результаты которых вместе с законченной и отредактированной работой самого ***Дж. фон Неймана*** были изданы ***А. Берксом*** [124,128]. Дальнейшее развитие и популяризация ***CA-***проблематики связаны с именами таких исследователей как ***В.З. Аладьев, S. Amoroso, E. Banks, J. Buttler, E. Codd, S. Cole, G. Hedlund, G. Herman, J. Holland, M. Kimura, Y. Kobuchi, A. Maruoka, E.F. Moore, J. Myhill, H. Nishio, T. Ostrand, A.R. Smith, T. Yaku, H. Yamada, A. Waksman*** и некоторых других, чьи работы в ***1960-х – 1970-х*** привлекли внимание к данной проблематике с теоретической точки зрения, а также решили и сформулировали целый ряд достаточно интересных проблем [5,536]. Впоследствии, математики, физики и биологи начали изучать и использовать клеточные автоматы (*однородные структуры*) для проблем моделирования в своих собственных областях исследования. Лично мы познакомились с ***CA-***проблематикой в ***1969*** г., благодаря русскому переводу прекрасного сборника трудов под ред. ***Р. Беллмана*** [123], содержащего и ныне хорошо известные работы ***Э.Ф. Мура, Дж. Майхилла*** и ***С. Улама.***

С более практической точки зрения и игрового эксперимента ***CA-***модель заявила о себе в конце ***1960-х,*** когда ***Джон Х. Конуэй*** представил хорошо теперь известную игру «***Life***». Игра стала весьма популярной через рубрику ***М. Гарднера*** в журнале *Scientific American*

и привлекла внимание к ***CA-***проблематике как многочисленных ученых из различных областей, так и любителей [239]. Первоначальной целью этой игры было запрограммировать простой набор правил для изучения макроскопического поведения популяций. Критерий для отбора правил был основан на том принципе, что рост или распад популяции не должны быть легко предсказуемыми. На сегодня игра ***«Life» –*** вероятно самая известная ***OC-***модель**;** кроме того, она обладает способностью к самовоспроизведению так же, как вычислительной универсальностью. Ее универсальность была доказана ***Дж. Конуэем,*** показавшим, что универсальная машина Тьюринга может быть погружена в игру ***«Life»,*** т.е. работа машины Тьюринга имитируется пространственно-временной динамикой такой ***CA-***модели. Позже был представлен весьма простой способ реализовать любую булеву функцию в конфигурациях игры ***«Life»*** [536]. Таким образом, даже такая простая ***OC-***модель оказалась эквивалентной универсальной машине Тьюринга. К этой ***OC-***модели значительный интерес не пропадает и до настоящего времени.

В настоящее время ***OC-***модели исследуются со многих точек зрения и взаимосвязь этих однородных структур с уже существующими проблемами постоянно обнаруживаются. В целях общего ознакомления с обширной ***CA-***проблематикой в целом и с ее отдельными направлениями рекомендуется обратиться к интересным и разноплановым обзорам таких исследователей, как ***B. Аладьев, V. Cimagalli, K. Culik, D. Hiebeler, A. Lindenmayer, A.R. Smith, P. Sarkar, M. Mitchell, T. Toffoli, R. Volmar, S. Wolfram*** и др. [536]. Ряд книг и монографий таких авторов, как ***В.З. Аладьев, А. Адаматский, E. Codd, А. Ильяшинский, M. Duff, M. Garzon, P. Kendall, M. Duff, B. Кудрявцев, N. Margolus, T. Toffoli, O. Martin, K. Preston, M. Sipper, R. Vollmar, B. Voorhees, S. Wolfram*** и некоторых других также содержат некоторые исторические экскурсы в ***OC-***проблематику**;** к сожалению**,** единой точки зрения по данному историческому вопросу не существует [5,536]. Наконец, библиография, представленная в [163,185,187,255,336,496,516-519,536]**,** содержит много очень полезных ссылок на работы по ***CA-***проблематике, включая ее многочисленные прикладные аспекты. Данная библиография полезна, прежде всего, начинающим в этой области.

Между тем, рассматривая исторический аспект ***CA-***проблематики, мы не должны забывать того вклада, который привнесли в данную проблематику работы ***K. Цузе,*** и с которыми научное сообщество ознакомилось достаточно поздно и даже зачастую не упоминает его в данном историческом контексте. При этом, ***K. Цузе*** не только создал первые программируемые компьютеры ***(1935 – 1941)*** и изобрел первый высокоуровневый язык программирования ***(1945),*** но также и был первым, кто ввел идею ***Rechnender Raum (****Вычислимые пространства)* [126,188,423], другими словами ***– клеточные автоматы (однородные структуры)*** в современной терминологии. Только много лет спустя подобные идеи были затем переизданы, популяризировались и развивались в работах других авторов таких, как ***Э. Фредкин, Т. Тоффоли, С. Вольфрам*** и т.д. [536].

С начала наших научных исследований в ***1969*** г. по ***TOC*** и ее приложениям, прежде всего, в математической биологии развития постепенно сформировалась неформальная *Таллиннская творческая группа* ***(TTГ),*** включающая исследователей из ряда крупных научных центров бывшего Союза**.** Состав ***TTГ*** не являлся строго определенным и изменялся в зависимости от тематики исследуемых проблем в тот или иной период времени. Полная библиография работ ***TTГ,*** включая работы по ***TOC-***проблематике, может быть найдена в монографиях [5,7,10]**.** Там же представлена обширная библиография работ и других исследователей**,** внесших существенный вклад в развитие теоретических и прикладных аспектов данного направления современной математической кибернетики**,** выходящего на уровень *междисциплинарного* предмета**.** Весьма обширная библиография к настоящей книге содержит наиболее доступные наши работы, содержащие основные, полученные ***TTГ,*** результаты по ***TOC-***проблематике, а также целый ряд наиболее известных зарубежных работ в данном направлении. В книгах [7,9,10] представлен анализ де-

ятельности ***ТТГ*** за ***30-***летие ее активности**,** который может быть поучительным и для исследования динамики развития ***ТОС-***проблематики как научного направления в целом.

В настоящее время ***ТОС*** интенсивно развивается большим коллективом исследователей во многих странах мира и, в первую очередь, в США, Германии, Великобритании, Италии**,** Франции**,** Японии и Венгрии**.** Сформировался целый ряд исследовательских групп в этих странах. До последнего времени активная научная деятельность в этом направлении проводилась и в Эстонии в рамках ***ТТГ*** **(***впоследствии Балтийского отделения Международной Академии Ноосферы***),** целый ряд результатов которой получил международное признание и составил существенную часть современной ***ТОС*****.**

Ежегодно проводятся национальные и международные научные форумы различного уровня по ***ТОС*** и ее прикладным аспектам**.** Из года в год растет количество публикаций в различных периодических и непериодических изданиях **(***в США с* ***1987*** *г. по данной проблематике издается специальный журнал* **«*Complex Systems*»),** специальных монографий, книг и сборников статей, разрабатываются национальные программы по ***ТОС-***проблематике [121]**,** что с полным основанием позволяет говорить о постоянно растущем интересе к данной проблематике. Наряду с этим, ***ТОС*** представляет собой достаточно хорошо развитую самостоятельную часть общей теории абстрактных автоматов со своими методами**,** проблематикой и приложениями**.** Много вопросов ***ТОС-***проблематики решено, но еще значительное число остается открытыми либо находится на различных стадиях решения. Оформлением ***ТОС*** в качестве самостоятельного научного направления явилось введение для нее с ***1979*** г. отдельного индекса ***(68Q80)*** в международной предметной классификации *Американского математического общества* **(*AMS*),** выделение специального подраздела в Математических энциклопедиях [119,443]**,** активные попытки создания развитой классификации направлений в ***ОС-***проблематике [120], а также создание под эгидой ***IFIP*** международной *рабочей группы* по однородным структурам **(***клеточным автоматам***).** С ***1987*** ***ОС-***проблематика все шире представляется на международных конференциях ***(США)*** по математическому и компьютерному моделированию на уровне секционных и пленарных докладов. Пользователи компьютерной сети ***Internet*** имеют доступ к информации по данной проблематике на основе ключевых фраз **«*Cellular Automata*»,** «***Клеточные Автоматы***» и «***однородные структуры***»,** включая такие вопросы как исследовательские группы, библиография, научные форумы, отдельные работы и другие важные аспекты ***ТОС-***проблематики.

В предыдущих работах мы исследовали различные аспекты математической ***ТОС*** и ее приложений, главным образом, в вычислительной технике, информатике, математике и математической биологии развития**.** Проблематика исследованных нами вопросов достаточно обширна и в значительной мере охватывает основные направления исследований современной ***ТОС*** и ее многочисленных приложений**.** Читателю, заинтересованному в данной проблематике, рекомендуются работы из приведенной весьма обширной литературы, в свою очередь содержащие достаточно обширную библиографию по рассматриваемой ***ТОС-***проблематике. В предлагаемой монографии ряд фундаментальных проблем математической ***ТОС*** рассматривается на примере классических ***ОС*****,** представляющих собой не только формальную модель параллельных вычислений аналогично тому, как машины Тьюринга, алгоритмы Маркова, системы продукций Поста и другие представляют собой формальные модели последовательных вычислений, но и являющихся основой всей ***ОС-***концепции в целом. Таким образом, рассматриваемая проблематика представляет интерес и для теории вычислимости, предлагая**,** вместе с тем**,** весьма прозрачную и простую модель для освоения концепции и основных фундаментальных понятий, и результатов современной ***ТОС-***проблематики в целом.

Предлагаемая читателю монография носит вполне доступный характер, в ней во многом на содержательном уровне рассматриваются базовая концепция классической ***ОС-***

модели, элементы ее теории и прикладные аспекты ***ОС-***проблематики. При этом, обсуждение основывается на классической ***ОС-***модели размерностей ***1*** и ***2,*** позволяя *(не нарушая общности)* неискушенному читателю легче войти в проблематику предмета, не отвлекаясь на излишние громоздкость и сложность. В качестве ***базовой*** выбрана именно классическая ***ОС-***модель, составляющая основу либо непосредственный прототип всех наиболее известных ***ОС-***подобных моделей *(клеточные процессоры и структуры, однородные вычислительные среды, нейронные и итератиные сети, систолические структуры и т.д.)* и не требующая специальных знаний из ряда разделов математики, кибернетики и др. Более того, теория классических ***ОС-***моделей на сегодня является наиболее исследованной и развитой как вполне самостоятельного математического раздела. И вместе с тем, знакомство с классической ***ОС-***моделью составляет основу формирования так называемого «***параллельного мышления***» и последующего освоения подобных ей параллельных дискретных систем *(недетерминированные, стохастические **ОС-**модели и т.д.).*

Учитывая обширность материала, объем книги и преследуемые цели, настоящая книга носит в значительной степени обзорный характер и написана скорее на *содержательном* уровне, чем в виде строгих математических формулировок, хотя и не в ущерб внутренней строгости изложения. Приводимые в книге результаты и соображения по мере возможности не требуют серьезной математической подготовки и не превышают уровня сведений в объеме программы университетов физико-технического профиля по курсу высшей математике. Данный подход позволяет существенно проще осознавать суть и концепции предлагаемой проблематики, не отвлекаясь на отдельные технические вопросы, присущие сугубо методологии самой ***ТОС-***проблематики. Рассматриваемые ниже фундаментальные проблемы охватывают, практически, ***базовый уровень*** теории и вводят начинающего читателя в ***ТОС-***проблематику, представляющую собой вполне самостоятельную часть общей теории бесконечных абстрактных автоматов со специфической внутренней организацией, ныне носящую ***междисциплинарный*** характер.

Современный интерес к ***ОС-***проблематике диктуется возможностями ее эффективного использования в двух основных направлениях: ***(1) формальная модель высокопараллельной обработки информации во всей ее общности*** и ***(2) удобная среда моделирования разнообразных естественных и искусственных дискретных систем, процессов, явлений и феноменов, допускающих высокий уровень распараллеливания.*** Интерес к ним усиливается также возможностью практической реализации высокопараллельных вычислительных ***ОС-***моделей на основе современных успехов микроэлектроники и перспективами обработки информации на молекулярном уровне *(нанотехнология)*. ***ОС-***концепция обеспечивает построение концептуальных и практических моделей пространственно-распределенных динамических систем, из которых физические являются наиболее интересными и перспективными.

Модели, явным образом сводящие ***макроскопические*** процессы к строго определенным ***микроскопическим*** процессам, представляют ***особый*** гносеологический и методический интерес, ибо они обладают большой убедительностью и прозрачностью. Именно с этой точки зрения ***ОС-***модели представляют особый интерес *(прежде всего)* в прикладном отношении при исследовании целого ряла процессов, явлений и феноменов в различных областях, и в первую очередь в физике. В частности, на основе ***ОС*** можно создавать весьма простые модели дифференциальных уравнений физики *(Навье-Стокса, теплопроводности и др.)*, динамики жидкостей и газов, целого ряда задач коллективного поведения, например: хаос, турбулентность, фрактальность, упорядочение и др.

Вместе с тем вопреки актуальности ***ТОС-***проблематики здесь на сегодня сложилась весьма своеобразная ситуация. Прежде всего, география активности исследований в данном направлении носит достаточно пестрый характер. Наибольшая активность приходится на такие страны как США, Япония, Великобритания, Германия, Франция, Венг-

рия и Италия. Тогда как в бывшем ***СССР*** данная проблематика поддерживалась усилиями относительно небольшого числа исследователей из различных научных центров, а также буквально несколькими объединенными общей ***ТОС-***проблематикой исследовательскими группами. Отечественную научную литературу представляет всего пять монографий за ***30-***летний период, из которых четыре приходятся на ***ТТГ.*** Отечественные периодические публикации по ***ТОС-***проблематике также относительно немногочисленны да и относятся они в значительной мере к сугубо прикладным ее аспектам в вычислительных науках. Во-вторых, при всем обилии и разнообразии периодических публикаций за рубежом и там число книг и монографий по ***ТОС-***проблематике относительно невелико и не превышает ***180.*** За редким исключением все эти книги ориентированы на уже подготовленного читателя и не могут оказать существенного влияния на решение весьма актуальной проблемы популяризации концепции, идей, методов, подходов да и возможностей, обеспечиваемых ***ОС-***моделями во всей их общности. Наконец, по ***ТОС-***проблематике сложился ряд направлений и школ, среди которых отсутствует серьезная научная связь, что приводит к существенному дублированию результатов и другим издержкам. Так, пространная *(вследствие многочисленных рисунков)* и претенциозная книга «*A New Kind of Science*» [407] содержит много результатов, которые были получены намного ранее другими авторами по ***ТОС-***проблематике, в том числе, советскими авторами (см. [1,3-5,8,9,53-57,80,82,83,127-135,137-142,150-161,169-171,175-179,182-191,195-201,230-233, 240,241,536] и многие др.). Кроме того, многие фундаментальные результаты в данном направлении принадлежат другим авторам. Явная предвзятость автора книги не позволяет ему смотреть объективно и на хронологию ***ТОС-***проблематики в целом. Устранить подобные недостатки с учетом вышесказанного призваны не только упомянутая ранее рабочая группа в составе ***IFIP,*** но также и создание целого ряда книг по ***ТОС-***проблематике научно-популярного характера и различной ориентации.

Вкратце остановиться на книге «*A New Kind of Science*» *(Наука нового типа и не менее)* [407] целесообразно именно в свете корректной идентификации места ***ТОС-***проблематики в составе других разделов современного естествознания. Объемное издание лишь на первый взгляд может служить неким откровением для тех, кто ни в малейшей мере не знаком с ***ТОС-***проблематикой ***(клеточными автоматами, Cellular Automata).*** Несмотря на то, что книга содержит немало *(в целом ряде случаев весьма интересных)* примеров применения ***ОС-***моделей *(клеточных автоматов),* как ее стиль, так и целый ряд содержащихся в ней утверждений носит тенденциозный характер, не имея реального подтверждения. Само же ее название носит, скорее, коммерческий характер, рассчитанный на широкую публику, а не на серьезную научную аудиторию. Отметим только некоторые из авторских откровений, а именно. «*Эта книга – результат двадцатилетнего труда по созданию науки нового типа. Я и не предполагал, что все так затянется. Работа затрагивает практически все сферы познания и даже простирается немного дальше за их пределы. Я пришел к выводу, что мое открытие – одно из наиболее важных во всей истории теоретической науки.*». Далее автор утверждает, что компьютерные модели, названные *клеточными автоматами*, представляют ключ к пониманию всех сложностей природы, от кварков до экономических систем. Он утверждает, что его книга была понята как «*инициирующая в науке сдвиг парадигмы исторической важности, с новыми приложениями, появляющимися каждый год все в большем количестве.*»

На самом же деле ***С. Вольфрам*** нашел аудиторию для этих идей с помощью своего многостраничного самоизданного опуса, не имеющую серьезного отношения к собственно науке. Учитывая же спорные морально-этические принципы компании, возглавляемой ***С. Вольфрамом,*** можно предположить, что книга – не только результат неутомимой работы фантазии автора, а плод многолетней работы сплоченной команды программистов, ученых, редакторов, дизайнеров. При этом, фактически, ***С. Вольфрам*** перезапустил идеи, представленные на обсуждение в ***80-***х и ***90-***х годах прошлого века в области хаоса

и сложности, которые можно рассматривать как единое поле деятельности. Специалисты в данной области уже давно говорят о том факте, что очень простые правила с помощью компьютера могут генерировать чрезвычайно сложные картины, кажется, изменяющиеся беспорядочно, как функция времени. Подобным же образом, утверждают они, простые правила должны лежать и в основе многих, по-видимости, сложных явлений в природе, но, естественно, далеко не всех [536].

Не вдаваясь в детальный обзор указанной книги (*некоторые из рецензий на нее можно найти в* [536] *и в Интернете*), только отметим, что вопреки преследуемым целям, она не только не явилась откровением для специалистов, работающих по ***TOC-***проблематике, но и в определенной мере сформировала несколько искаженное представление о самой области исследований, на самом деле достаточно перспективной со многих точек зрения. Хотя, быть может, она и явилась откровением для любителей, интересующихся различного рода околонаучными теориями, либо неспециалистов. Не красит книгу не только откровенно спекулятивный характер изложения (*когда в целом ряде случаев автор пишет о вещах, не имея на то понятия*), но и уничижительный тон к своим коллегам, которыми в целом ряде случаев получены намного более серьезные результаты, искажение истории предмета, косвенное приписывание чужих результатов, менторский тон, ничем не обоснованные утверждения и многое другое, что не позволяет нам рассматривать данную книгу в качестве серьезного научного исследования. При этом, не стоит рассматривать наше мнение слишком предвзято, из многочисленных отзывов на книгу оно смотрится в достаточно выдержанных тонах (*[536], A Collection of Reviews of ANKOS*).

Между тем, нельзя утверждать, что указанную книгу не стоит читать. Если вы сможете проигнорировать эгоцентрический уклон, то она даст краткий обзор по ***TOC-***проблематике и ее приложениям, хотя стиль ее изложения носит довольно сумбурный характер. И хотя основополагающий вывод книги ***– простые программы объясняют все –*** может вдохновить непрофессиональных читателей, однако весьма сомнительно, что эта книга вдохновит серьезное научное сообщество. Данная книга призывает ученых исследовать ***OC-***модели, которые уже давно и успешно исследуются с различных точек зрения. По нашему мнению, книга представляет спекулятивный взгляд как на ***OC***, так и на науку в целом. Она может представить определенный интерес лишь для дилетантов в области ***OC-***проблематики и для весьма нетребовательных любителей научной фантастики.

И еще на одном весьма существенном аспекте следует остановиться особо. Любая хорошая теория, не говоря уже о «*науке нового типа*», должна предсказывать и получать нетривиальные качественно новые результаты, не повторяя уже имеющиеся и полученные иными средствами. В случае же с рассматриваемой нами ***TOC-***проблематикой такого по большому счету не наблюдается – в вычислительном плане ***OC-***модели эквивалентны другим известным формальным моделям вычислителей, параллелизм использовался в природе и вычислительной технике и ранее, правда, в плане моделирования появляется возможность в целом ряде случаев более адекватного симулирования и эмпирического исследования процессов и объектов. Но если на эмпирическом фундаменте и можно строить определенные технические проекты и предположения, то фундаментальная наука требует строких математических обоснований. Именно поэтому определенным противопоставлением точке зрения на ***OC-***проблематику, декларируемой вышеупомянутой книгой [407], представим и свое видение данного вопроса. Наш опыт работы по ***TOC-***проблематике как на теоретическом, так и на сугубо прикладном уровне говорит совершенно иное, а именно:

(1) OC (*клеточные автоматы*) представляют собой один из типов бесконечных абстрактных автоматов со специфической внутренней организацией, обуславливающей весьма высокий уровень распараллеливания обработки информации и вычислений; они образуют ***специфический*** класс дискретных динамических систем, функционирующих сугу-

бо параллельным образом на основе принципа локального близкодействия; это позволяет исследовать их в русле и методами систем подобного типа;

(2) ***ОС*** могут служить вполне удовлетворительной моделью параллельных вычислений аналогично тому, как машины Тьюринга (*нормальные алгоритмы Маркова, системы продукций Поста,* ***TAG-, LAG-****системы и др.)* служат в качестве формальных моделей последовательных вычислений; подобно вторым ***ОС-***модели обладают свойством *универсальной* вычислимости; с этой точки зрения ***ОС*** можно рассматривать и как алгебраические системы переработки конечных слов на основе правил параллельных подстановок;

(3) принцип локального взаимодействия составляющих ***ОС*** единичных конечных автоматов, определяющего в результате их глобальную динамику, позволяет использовать ***ОС*** в качестве прекрасной среды моделирования/симулирования весьма широкого круга процессов, явлений и феноменов; при этом, феномен обратимости ***ОС-***динамики делает ***ОС*** весьма интересной средой как для физического моделирования, так и для создания перспективных вычислительных структур, использующих нанотехнологии. При этом, ***ОС*** можно рассматривать, прежде всего, как модельную альтернативу дифференциальным уравнениям в частных производных. Наряду с этим ***ОС*** представляют весьма перспективную модельную среду для исследования тех процессов, явлений, феноменов и объектов, для которых отсутствуют известные классические средства. Между тем, следует констатировать, что собственно сама теория ***ОС*** известна достаточно давно довольно узкому кругу математиков. При этом вполне возможно, что пик активности теоретических проработок классических ***ОС-***моделей уже позади и, дав мощный импульс как различного рода модификациям и типам ***ОС-***моделей, так и разноплановым прикладным разработкам, базирующимся на ***ОС-***концепции в широком смысле ее понимания, классические ***ОС-***модели будут уже не столь активно теоретически исследоваться в качестве сугубо математического объекта.

В целом же, ***ТОС-***проблематику, на наш взгляд, с большой долей достоверности можно представить себе как две составляющие, а именно: ***(1) ОС*** в качестве самостоятельного математического объекта исследований (*например, как высокопараллельные дискретные динамические системы, формальные параллельные алгоритмы и грамматики и др.)* и ***(2) ОС*** как среду моделирования/симулирования различных процессов, явлений и феноменов, чья суть использует повсеместный принцип локального взаимодействия элементарных составляющих (*например, целого ряда физических, химических и биологических процессов*). Как правило, первая составляющая достаточно интенсивно развивается математиками, тогда как свой вклад в развитие второй составляющей вносит существенно более представительный круг исследователей из различных естественно-научных как теоретических, так и прикладных областей (*физика, химия, биология, техника и др.*). При этом, если сугубо теоретические исследования по ***ТОС-***проблематике в основе своей ограничиваются классическими, полигенными и стохастическими ***ОС***, то результаты второй составляющей базируются на существенно более широком представительстве и типов, и классов ***ОС-***моделей, наделяющих составляющие их элементарные автоматы самыми разнообразными свойствами и с достаточно сложными правилами локального взаимодействия между ними. В целом, если классические ***ОС-***модели представляют собой, прежде всего, формальные математические системы, исследуемые именно в данном контексте, то их многочисленные модификации и обобщения – достаточно перспективная среда моделирования тех либо иных процессов, явлений, объектов и феноменов.

Как нами уже отмечалось, в отличие от целого ряда других современных разделов естественных наук теоретическая составляющая ***ТОС-***проблематики не столь существенно пересекается с ее второй прикладной составляющей и в этом отношении вполне уместно говорить о ***ТОС-***проблематике как о двух достаточно самостоятельных направлениях - исследование математических ***ОС-***объектов как таковых и использование ***ОС-***среды

для моделирования/симулирования; при этом, второе направление характеризуется и более широким спектром направлений сугубо прикладного характера. Уровень развития второго направления в значительной мере определяется возможностями современной ***ВТ***, ибо ***ОС-***модели, как правило, реализуются на большом числе единичных автоматов и, как правило, с достаточно сложными правилами локального взаимодействия.

Сам же ***ОС-***подход можно в целом ряде случаев ассоциировать с неким модельным аналогом дифференциальных уравнений, описывающих тот или иной процесс с тем отличием, что если дифференциальные уравнения усредненно описывают процесс *(что как расширяет охватываемый ими круг частных процессов, так и не позволяет для многих из них определить соответствующие уравнения, тем более их решать аналитически)*, то в соответствующим образом определенную ***ОС-***модель реально погружается некий исследуемый процесс и динамика модели наглядно представляет качественное поведение исследуемого процесса. Требуется лишь корректно наделить единичный автомата модели необходимыми свойствами *(состояниями)* и определить правила локального их взаимодействия. Как видим, ***ОС-***подход можно использовать как для исследования процессов, описываемых сложными дифференциальными уравнениями, не имеющими аналитического решения, так и для процессов, не позволяющих описать их такими уравнениями.

Наряду с попыткой, по-возможности, полнее охватить ***СА-***проблематику, лежащую как в русле наших интересов, так и в фундаменте собственно ***ТОС***, в данной монографии с достаточной степенью полноты представлены результаты и отечественных исследователей. Многие из этих результатов малоизвестны или совсем неизвестны англоязычному читателю, хотя целый ряд из них внесли весьма существенный вклад в становление современной теории ***однородных структур (Homogeneous Structures)*** {*синоним* «*клеточных автоматов*» ***(Cellular Automata)***} и их приложений в качестве самостоятельного раздела современной математической кибернетики. Впоследствии целый ряд из них были заново переоткрыты другими исследователями. Часть из них представлены более детально, тогда как другие указаны в перечне работ, содержащих наиболее важные результаты.

Предлагаемая монография ориентирована на самый широкий круг читателей, интересующихся стратегически важными направлениями современной вычислительной техники, кибернетики, математического моделирования в различных областях, параллельной обработкой информации и параллельными алгоритмами, формальных грамматик и теорией автоматов, математической и теоретической биологий, физикой, искусственным интеллектом, робототехникой и др. Представит данная монография интерес и для студентов, аспирантов и докторантов соответствующих специальностей университетов, желающих углубить свои познания в области автоматного моделироввания природных феноменов. Монография будет достаточно полезна всем, кто только начинает знакомиться с однородными структурами, их концепцией и основами теории. Читателю же, уже имеющему определенный опыт исследовательской работы в данной области, настоящая монография представит достаточно полезную информацию к размышлению и ознакомит с основными результатами в данной области, полученными, прежде всего, отечественными исследователями. Многих она сможет побудить к дальнейшим исследованиям в данной весьма перспективной области современной математической кибернетики. С нашими последующими разработками и публикациями по данной проблематике можно периодически знакомиться на наших Web-страницах:

www.aladjev.newmail.ru, http://www.aladjev.narod.ru, www.geocities.com/ca_hs_ref

На этих же страницах указаны адреса, в которые можно отправлять замечания, пожелания и предложения, относящиеся к материалу настоящей монографии, а также в целом по довольно обширной тематике наших исследований. Все они будут приняты с благодарностью и без нашего внимания не оставлены.

В в е д е н и е

Теория однородных структур (ТОС), у истоков которой стояли крупнейшие современные математики и кибернетики ***Джон фон Нейман, Станислав Улам, Эдвард Мур*** и ***А. Черч*** привлекла к себе пристальное внимание целого ряда исследователей в конце ***50-***х годов прошлого столетия благодаря основополагающим работам ***Э. Мура, Дж. Майхилла*** и ***А. Беркса,*** систематизировавшего, завершившего и издавшего работы ***Джона фон Неймана*** в этой области [5,124,128]**;** здесь и в дальнейшем часто будем делать ссылки на наши работы ***(****как более доступные****)***, в которых дается представление или обзор соответствующих результатов других исследователей по ***ТОС-***проблематике и смежным вопросам, имеющим к ней наиболее близкое отношение. При этом, в ряде наших работ можно найти и интересные исторические экскурсы по данной проблематике.

Однородные структуры переоткрывались не один раз и под различными названиями **–** в электротехнике они известны как итеративные сети, в чистой математике как раздел топологической динамики, в биологии как клеточные структуры и т.д. Поэтому, предлагаемый краткий исторический экскурс ставит целью определить *основные* этапы становления собственно самой ***ОС-***теории, не отвлекаясь на многочисленные частности. При этом, следует иметь в виду, что по ***ТОС-***проблематике работает целый ряд групп и отдельных исследователей, недостаточно или совершенно не связанных друг с другом, что зачастую ведет к серьезному дублированию работ и результатов. Начав свои исследования по ***ТОС-***проблематике в ***1969*** г**.,** мы располагаем вполне достаточной информацией ***(****как на основе анализа большинства публикаций****,*** *так и в процессе непосредственного общения со многими ведущими исследователями в этом направлении****)*** относительно объективного развития основных ее направлений ***(****и в первую очередь****,*** *теоретического характера****).*** Это позволяет нам с достаточной степенью объективности хронометрировать основные этапы ее развития**;** многие детали исторического характера по ***ТОС-***проблематике можно найти в книгах [1,3,5,8-10,53-56,114,131,135,146,150,161,163,179,186,230,264,265,271,536].

Однородные структуры ***(ОС)*** в их первоначальном виде были введены ***Джон фон Нейманом*** на основе предложения ***С. Улама*** с целью получить более реалистическую и хорошо формализуемую модель для исследования поведения сложных развивающихся систем. Сам же ***С. Улам*** использовал ***ОС-***подобные модели, в частности, для исследования проблемы роста кристаллов и других растущих по *рекуррентным* правилам дискретных систем. Несколько позднее подобные структуры начал исследовать и ***А. Черч*** в связи с работами по бесконечным абстрактным автоматам и математической логике. В этой же связи весьма уместно упомянуть и пионерские работы по ***ОС-***проблематике немецкого инженера ***Конрада Цузе*** [126] **–** автора первой программно-управляемой универсальной вычислительной машины. Им был высказан целый ряд весьма прогрессивных для своего времени взглядов на структуру команд ЭВМ, параллельное программирование и др., включая клеточные вычислительные пространства, явившиеся *прообразом* современных вычислительных ***ОС-***моделей**.** ***ОС-***модели имеют ряд синонимов**,** среди которых наиболее известным является термин **«*клеточные автоматы* (*Cellular Automata*)».** В дальнейшем, говоря **«*однородные структуры*» (***основываясь на русскоязычной терминологии*** [119, 443,536]***)***, будем везде понимать также и их синонимы, и наоборот.

В ***1969 К. Цузе*** выпустил книгу **«*Rechnender Raum*» (***Вычислительное пространство***)**, в которой излагал мысли о том, что физические процессы **–** суть вычисления, тогда как наша *Вселенная* есть ничто иное, как **«*cellular automaton*» (*СА*)**, т.е. **«*клеточный автомат*»;** само понятие ***СА*** ввел ***Дж. фон Нейман.*** Для конца ***70-х*** такой взгляд на Вселенную был новаторским**,** зато сейчас идея вычисляющей себя саму Вселенной никого не пугает**,** находя логичное место в теориях исследователей**,** работающих в области квантовой меха-

ники [536]. К сожалению, сегодня книга ***К. Цузе*** малознакома (*если не сказать – незнакома совсем*) даже весьма дотошным исследователям и специалистам в данной области. Дабы исключить имеющиеся на сегодня спекулятивные аспекты исторического характера, в будущих исторических исследованиях весьма целесообразно обратить на это внимание.

И здесь вполне уместно отметить весьма любопытное с исторической точки зрения обстоятельство. В отличие от ***Джон фон Неймана, К. Цузе*** однородные структуры рассматривал только с точки зрения цифровой вычислительной техники (***ВТ***), не связывая их с использованием в других областях приложений. К сожалению, сложившиеся на то время обстоятельства [126] не позволили ознакомиться с его идеями и разработками широкому кругу специалистов и ученых. В то время как ***Джон фон Нейман*** ограничился применением однородных структур для биологического моделирования. Возможно, он не был заинтересован в исследованиях ***ОС***-моделей в качестве самостоятельного математического объекта и/или в качестве формальной модели высокопараллельной ***ВТ***. Эти обстоятельства, вероятно, привели к тому, что высокий уровень параллелизма, допускаемый однородными структурами, и не явился определяющим фактором на начальной стадии развития ***ВТ***. Принимая во внимание то влияние, которое оказал авторитет ***фон Неймана*** на развитие ***ВТ*** [124] (*не зря же до сих пор основу современной* ***ВТ*** *составляет так называемая вычислительная модель фон Неймана*), его предложение по использованию клеточных автоматов в вычислительных целях на заре зарождения современной ***ВТ***, по-видимому, изменило бы ход последующей истории ее развития. С другой стороны, практическое незнакомство с работами ***К. Цузе*** широкой научной общественности и не сравнимый с ***Джон фон Нейманом*** научный авторитет не позволили им оказать серьезного влияния на последующий ход развития как ***ВТ***, так и собственно ***ТОС***-проблематики. В результате чего мы имеем то, что имеем – развитую ***ВТ***, исповедующую последовательную вычислительную модель ***фон Неймана***, и интенсивные проработки по созданию перспективных средств ***ВТ*** на основе ненеймановских параллельных моделей вычислителей, одними из которых являются именно вычислительные формальные ***ОС***-модели.

Одной из основных предпосылок, стимулировавших зарождение ***ОС***-концепции параллельных дискретных систем, явилась настоятельная потребность в достаточно хорошо формализуемой среде для моделирования процессов биологического развития и, прежде всего, процесса самовоспроизведения. ***Джон фон Нейман*** и ряд его последователей достаточно детально исследовали вопросы вычислительных и конструктивных возможностей первых ***ОС***-моделей, которые были завершены и собраны ***А. Берксом*** в его превосходных книгах [124,128], определивших развитие исследований в этом направлении на несколько лет. В процессе работ по ***ОС***-проблематике ***А. Берксом*** при Мичиганском университете была создана исследовательская группа «***The Logic of Computer Group***», из которой впоследствии вышел ряд первоклассных специалистов по ***ТОС***-проблематике (***Дж. Холланд, Р. Лэинг, Т. Тоффоли*** *и др.*). Ранние идеи и работы ***Дж. фон Неймана, С. Улама, А. Черча*** и их непосредственных последователей [125,127,129-133,288-299] можно с полным основанием отнести к ***первому*** этапу становления ***ТОС***-проблематики.

Вторым этапом в становлении ***ТОС*** можно считать опубликование ныне широко известных работ ***Э. Мура*** и ***Дж. Майхилла*** [274,275] по проблеме неконструируемости в классических ***ОС***-моделях, которые наряду с решением ряда чисто математических задач явились своего рода катализаторами активности, привлекшими внимание к этой проблематике целого ряда математиков и исследователей из других областей. Формируются научные коллективы и школы по ***ТОС***-проблематике в США, ФРГ, Японии, Италии, Франции, ГДР, Венгрии и Эстонии (***ТТТ, 1969 г.***). В частности, именно этим работам мы обязаны своим интересом к этой области исследований, ознакомившись с упомянутой работой ***Э. Мура*** по превосходному сборнику статей под ред ***Р. Беллмана*** [123].

Наконец, теоретические работы ***Э. Кодда*** [125], ***Г. Хедлунда*** [127], ***Х. Ямада и С. Аморозо*** [129,130], ***А.Р. Смита*** [131], ***Э. Бэнкса*** [132], ***Т. Остранда*** [133], ***В.З. Аладьева*** [1,2-5,17-35], ***Т. Китагава*** [134] и целого ряда других исследователей положили начало собственно современной математической ***ТОС***, выросшей к настоящему времени в самостоятельную ветвь теории абстрактных автоматов, имеющую многочисленные приложения в различных областях науки и техники. Многочисленные исследователи подготовили вступление ***ТОС*** в конце ***60-х*** годов прошлого века в современный этап ее развития, характеризующийся объединением ранее разрозненных идей и методов на общей концептуальной и методологической платформах и весьма существенным расширением областей ее приложений, особенно в физике, математической биологии развития, вычислительных науках и информатике, связанных с математическим и компьютерным моделированием, параллельной обработкой информации, параллельными алгоритмами, созданием перспективных архитектур высокопроизводительной ***ВТ*** и других, в значительной степени выводя ***ОС***-концепцию на междисциплинарный уровень.

Особый интерес к ***ОС***-моделям возобновился в начале ***80-х*** прошлого века в связи с весьма активными исследованиями по созданию новых перспективных архитектур высокопроизводительной ***ВТ***, проблеме искусственного интеллекта ***(ИИ)***, робототехникой, информатикой, физикой и другими важными мотивациями. На наш взгляд, именно с работ ***Bennet C., Boghosian B., Chopard B., Crutchfield J., Culik II K., Gács P., Grassberger P., Green D., Gutowitz H., Ibarra O., Kobuchi Y., Langton C., Margolus M., Martin O., Mazoyer J., Toffoli T., Wolfram S., Аладьева В.З., Бандман О.Л.*** и др. [536] начался новый всплеск интереса к ***ОС*** как среде, прежде всего, физического моделирования. Наконец предполагается, что ***ОС*** могут сыграть чрезвычайно важную роль в качестве как концептуальных, так и прикладных моделей пространственно-распределенных динамических систем, в числе которых в первую очередь представляют особый интерес вычислительные, физические и биологические клеточные системы. В данных направлениях уже налицо весьма существенная активность целого ряда исследователей, получивших вполне обнадеживающие результаты [1,3-5,9,69,90,145,146,153,155-157,161,162,197,269,275,355,536]. В предисловии приведен ряд соображений в подтверждение роли и места ***ОС***-проблематики в структуре современной математической кибернетики и связанных с ней естественнонаучных направлений и, прежде всего, прикладного характера.

Современная точка зрения на ***ТОС***, как на отдельную ветвь теории абстрактных бесконечных автоматов, сформировалась под влиянием основополагающих работ ***Адаматского А.И., Аладьева В.З., Amoroso S., Arbib M., Bagnoli F., Bandini S., Бандман О.Л., Banks E.R., Barca D., Барздиня Я., Bays C., Binder P., Boghosian B., Burks A.W., Butler J., Cattaneo G., Chate H., Chowdhury D., Church A., Codd E., Cole S., Crutchfield J., Culik K., Das R., Durand B., Durret R., Fokas A., Fredkin E.F., Gács P., Gardner M., Gerhardt M., Golze U., Grassberger P., Green D., Griffeath D., Gutowitz G., Hedlund G., Hemmerling A., Holland J., Honda N., Ibarra O., Икауниекса Э., Ильяшинского А., Jen E., Kaneko K., Kari J., Kimura M., Kobuchi Y., Langton C., Legendi T., Li W., Lieblein E., Lindenmayer A., Maneville P., Margolus N., Martin O., Maruoka A., Mazoyer J., Mitchell M., Moore E.F., Morita K., Myhill J., Nasu M., John von Neumann, Nishio H., Ostrand T., Pedersen J., Подколзина А., Richardson D., Sarkar P., Sato T., Шерешевского М., Sipper M., Smith A., Sutner K., Takahashi H., Thatcher J., Toffoli T., Тоома А., Цейтлина Г., Ulam S., Варшавского В., Vichniac G., Vollmar R., Voorhees B., Waksman A., Weimar J., Willson S., Wolfram S., Wuensche A., Yaku T., Yamada H., Zuse K.*** и других многочисленных исследователей из многих стран. На начальной стадии прикладные аспекты ***ТОС*** в связи с перспективными параллельными компьютерами весьма интенсивно развивались научными школами ***Т. Тоффоли*** в ***США*** и ***Р. Фольмаром*** в ***Германии***, тогда как в связи с биологическим моделированием ***В.З. Аладьевым*** в ***Эстонии***.

Наряду с нашими работами в ***ОС-***теории необходимо обратить внимание на целый ряд других советских исследователей, которые получили в данном направлении как фундаментальные, так и достаточно значительные результаты в течение ***60-х – 80-х.*** А именно: ***Адаматский А.*** (*идентификация* ***ОС***), ***Бандман О.Л.*** (*асинхронные* ***ОС***), ***Блишун А.Ф.*** (*рост конфигураций*), ***Блюмин С.Л.*** (*рост конфигураций*), ***Болотов А.А.*** (*симуляция между классами* ***ОС***), ***Варшавский В.И.*** (*синхронизация* ***ОС****, симуляция анизотропных* ***ОС*** *на изотропных*), ***Георгадзе А.К.***, ***Манджаладзе П.В.***, ***Матевосян А.А.*** (*рост конфигураций, универсальные детерминированные и стохастические* ***ОС***, ***ОС*** *и параллельные грамматики*), ***Добрушин Р.Л.***, ***Тоом А.Л.***, ***Васильев Н.Б.***, ***Ставская О.Н.***, ***Митюшин Л.Г.***, ***Леонтович А.*** (*стохастические* ***ОС***), ***Икауниекс Э.*** (*неконструируемые конфигурации*), ***Коганов А.В.*** (*универсальные* ***ОС****, устойчивые конфигурации, симуляция* ***ОС***), ***Колотов А.*** (***ОС-****модели возбудимой среды*), ***Левенштейн В.И.*** (*синхронизация в* ***ОС***), ***Левин Л.А.*** и ***Курдюмов Г.Л.*** (*стохастические* ***ОС***), ***Макаревский А.Ю.*** (*реализация булевых функций в* ***ОС***), ***Петров Е.И.*** (*синхронизация* ***2-****мерных* ***ОС***), ***Подколзин А.С.*** (*симуляция* ***ОС****, асимптотика глобальной динамики, неразрешимость, универсальные* ***ОС***), ***Поспелов Д.*** (*однородные структуры и распределенный* ***ИИ*** *в* ***ОС***), ***Прангишвили И.В.*** (***ОС-****архитектуры параллельных процессоров*), ***Ревин О.М.*** (*симуляция анизотропных* ***ОС*** *на изотропных*), ***Решодько Л.*** (***ОС-****модели возбудимой среды*), ***Солнцев С.В.*** (*рост конфигураций*), ***Цейтлин Г.Е.*** (*алгебра периодически определенныхе преобразований*), ***Цейтлин М.Л.*** (*коллективы автоматов,* ***ОС-****игры*), ***Щербаков Е.*** (*универсальные алгебры параллельных подстановок*). В наших многочисленных предыдущих работах исследовались различные аспекты ***ОС-***теории и ее приложений в математике, информатике, вычислительных науках, биологическом и физическом моделировании. Полученные в этом направлении наши результаты, внесли существенный вклад как собственно в ***ОС-***теорию, так и в ее приложения. Настоящая монография предназначена для обсуждения наиболее общих направлений в теории классических ***ОС-***моделей и результатов, полученных нами. К сожалению, достаточного ограниченный объем не позволяет детально рассмотреть все богатство проблематики в данной области. Между тем, мы надеемся, что предлагаемая монография позволит ознакомить читателя с общими аспектами и тенденциями в теории классических ***ОС-***моделей как формальной модели параллельной обработки, так и перспективной среды для физического и математического моделирования.

Однородные структуры являются формализацией понятия бесконечных регулярных решеток (*сетей*) из идентичных конечных автоматов, которые информационно связаны друг с другом одинаковым образом в том смысле, что каждый автомат решетки может непосредственно получать информацию от вполне определенного для него конечного множества соседних ему автоматов. При этом, соседство понимается не в геометрическом, а в информационном плане. Соседство единичных автоматов устанавливается постоянным для каждого автомата решетки и определяется специальным вектором – индексом соседства. Как правило, рассматриваются ***d-***мерные регулярные решетки в Евклидовом пространстве E^d, в целочисленные точки которого помещены копии некоторого автомата Мура. В качестве весьма простого примера формальной ***ОС-***модели мы можем представить себе бесконечную клеточную бумагу, в каждой клетке которой расположена копия конечного автомата Мура, для которого в качестве соседних являются все непосредственно примыкающие к нему автоматы, включая и его самого.

ОС функционирует в дискретные моменты времени ***t*** (***t=0,1,2, ...***) так, что каждый автомат решетки может синхронно изменять свое состояние в дискретные моменты времени ***t>0*** как функция состояний всех своих соседей в предыдущий момент времени ***(t - 1).*** Эта локальная функция перехода может со временем меняться, но остается всегда постоянной для каждого автомата решетки в любой конкретный момент времени ***t > 0. Одновременное*** применение локальной функции перехода ко всем автоматам решетки определяет глобальную функцию перехода в структуре, которая действует на всей решет-

ке, изменяя текущую конфигурацию состояний автоматов решетки на новую конфигурацию. Изменение конфигураций структуры под воздействием глобальной функции определяет ***динамику*** функционирования ***ОС-***модели с течением времени, которая играет основную роль в исследованиях ее поведенческих свойств.

Состояния единичных автоматов ***ОС-***моделей можно ассоциировать с различными понятиями, такими как состояния биологических клеток, команды клеточных микропроцессоров, символы некоторых параллельных формальных систем, характеристики точек некоторого абстрактного поля и т.д. Тогда как сама история конфигураций в ***ОС*** ассоциируется с динамикой погружаемых в структуру различного рода дискретных моделей, процессов, алгоритмов и явлений. Подобные модели могут быть применены в таких различных областях как распознавание образов, морфогенез, теория эволюции и развития, математика, кибернетика, синергетика, физика, адаптивные и динамические системы, машинное самовоспроизведение, искусственный интеллект и робототехника, космология и др. Мы можем интерпретировать ***ОС*** не только как абстракцию биологических клеточных систем, но также как теоретическую основу искусственных параллельных систем обработки информации либо как среду представления концептуальных и практических моделей пространственно-распределенных динамических систем,для которых именно физические системы являются наиболее важными прототипами. С логической точки зрения ***ОС*** являются бесконечными абстрактными автоматами со специфической внутренней структурой, определяющей целый ряд важных свойств и допускающей использование ее в качестве новой перспективной среды моделирования различных дискретных процессов, использующих режим максимального распараллеливания. В целом ***ТОС-***проблематика может рассматриваться как структурная и динамическая составляющие теории бесконечных абстрактных автоматов, наделенных специфической внутренней организацией, носящей качественный характер. В настоящее время ***ТОС-***проблематика образует вполне самостоятельный раздел современной кибернетики со своими методами, проблематикой и приложениями, а сами структуры служат формальной средой для моделирования многих дискретных процессов, явлений и фкноменов в различных областях естествознания. При этом, допускается моделирование и *непрерывных* процессов, явлений и феноменов.

При этом, ***ОС-***концепция является в определенном смысле уникальным научно-техническим явлением – с одной строны, она является основой формального моделирования целого ряда процессов, феноменов и объектов в весьма широком спектре областей, а с другой, имеет эквивалентные технические реализации в виде ***САМ-***машин ***Тоффоли,*** сетей транспьютеров, систолических структур, клеточных процессоров, однородных вычислительных сред и т.д., что делает ее весьма привлекательной и в теоретических, и в прикладных исследованиях во многих областях современного естествознания.

Впервые в мировой практике в учебниках [94-96] по информатике для высшей школы, выдержавших два издания, мы представили отдельную главу ***«Общие формальные вычислительные модели»***, в которой рассмотрены машины Тьюринга как формальная модель классических последовательных вычислений и обработки, и ***ОС*** в качестве формальной модели неклассических высокопараллельных вычислений и обработки. На наш взгляд, данная новация в настоящее время весьма актуальна, прежде всего, в свете как модельных перспектив в различных областях, так и интенсивных исследований в области создания вычислительных средств нетрадиционной параллельной архитектуры.

Полученные за последние годы важные теоретические результаты по ***ТОС*** и целый ряд интересных прикладных аспектов теории разбросаны по специальным статьям и изданиям. Более того, возрастающий интерес к ***ТОС-***проблематике все настоятельнее требует популяризации ее концепции, фундаментальных и прикладных аспектов. Наряду с

этим, весьма актуальной является работа по консолидации усилий большого числа отдельных исследователей в данном и смежных с ним направлениях.

В предлагаемой монографии на примере классических ***ОС***-моделей обсуждаются наиболее фундаментальные проблемы их динамики, составляющие базис математической теории поведенческого аспекта *(динамики)* ***ОС***-моделей, не затрагивая вопросов их конструктивной организации. Простота и прозрачность данного класса ***ОС***-моделей, не снижая степени общности рассматриваемой на их основе проблематики, вместе с тем, позволяют начинающему читателю легче воспринимать предлагаемый материал, чему способствует как содержательный уровень изложения, используемый математический аппарат, который для рассматриваемого класса ***ОС***-моделей относительно простой, так и вполне достаточный подбор иллюстративного материала. Представленный материал в значительной мере содержит как ранее полученные нами результаты в данном направлении, опубликованные в периодической и монографической литературе, научных отчетах, так и некоторые новые результаты, аннотированные на специальных курсах для аспирантов и докторантов физико-математических специальностей университетов. Содержимое предлагаемой вашему вниманию монографии вкратце может быть охарактеризовано следующим образом.

Первая глава представляет основные понятия, определения, используемые обозначения, вводя единую и уже достаточно устоявшуюся русскоязычную терминологию. В настоящей главе вводятся основные типы ***ОС***-моделей, обсуждается архитектура современной ***ТОС***-проблематики и основные составляющие аппарата исследований в данной области. ***Вторая*** глава достаточно детально знакомит с современным состоянием проблемы неконструируемости для классических ***ОС***-моделей, являющейся одной из центральных в ***ТОС***-проблематике. Определяются типы неконструируемости, представляются критерии их существования, а также связанные с ними алгоритмические вопросы неконструируемости и ряд специальных вопросов, представляющих и самостоятельный интерес. Прежде всего, это относится к особенностям данной проблемы для конечных ***ОС***-моделей, играющей важную роль в их практических приложениях. Проблема ***неконструируемости*** в ***ОС***-моделях представляет несомненный интерес не только с точки зрения того, что она непосредственно относится к истокам становления ***ОС***-проблематики, но и по той причине, что результаты, полученные по ней, составляют существенную часть собственного аппарата исследований в данном направлении.

В ***третьей*** главе, в отличие от предыдущей, определяющей *ограничения* динамики классических ***ОС***-моделей, рассматриваются их экстремальные конструктивные возможности, характеризуемые условиями существования универсальных и самовоспроизводящихся конечных конфигураций. ***Четвертая*** глава посвящена проблеме сложности конечных конфигураций, являющейся одной из ключевых в ***ТОС***-проблематике и тесно связанной с важными как теоретическими, так и многими прикладными ее аспектами.

В ***пятой*** главе классические и недетерминированные ***ОС***-модели достаточно детально рассматриваются с лингвистической точки зрения в контексте определяемых ими формальных параллельных грамматик и языков. Многоаспектной проблеме моделирования в ***ОС***-среде посвящена ***шестая*** глава, в которой наряду с базовыми вопросами сугубо модельного характера рассматривается целый ряд более специальных вопросов моделирования и параллельные алгоритмы, определяемые классическими ***ОС***-моделями. Основное внимание уделяется моделированию в ***ОС***-среде известных *формальных* алгоритмов и моделированию классических структур структурами из того же класса.

В ***седьмой*** главе достаточно детально обсуждается проблема декомпозиции глобальных функций перехода в классических ***ОС***-моделях и связанные с нею вопросы как теоретического, так и прикладного характера. Представленные здесь результаты в своей основе решают проблему декомпозиции и устанавливают интересные связи с проблемой слож-

ности в ***OC*-**аксиоматике**.** Много внимания уделяется обсуждению подходов к исследованию данной и подобных ей проблем динамики ***OC*-**моделей**,** а также вопросам алгоритмической разрешимости проблемы и иерархии сложности функций**.** Завершается глава обсуждением целого ряда интересных более специальных вопросов ***TOC*-**проблематики, не нашедших отражения в предыдущих главах настоящей монографии.

Наконец**,** ***восьмая*** глава представляет основные прикладные аспекты современной ***TOC*-**проблематики, в значительной степени определяющие как интерес к ней, так и перспективы ее дальнейшего развития. Делая акцент на прикладных аспектах в математических, вычислительных и биологических науках**,** обсуждается также целый ряд весьма интересных приложений ***OC*-**концепции и в других областях. При этом, основное внимание уделяется прикладным аспектам в биологии развития**,** вычислительной технике и информатике, как одним из стратегически важных направлений развития современного естествознания. Тогда как прикладные аспекты ***OC*-**концепции в других также достаточно важных направлениях рассматриваются с различной степенью детализации.

Каждая глава содержит ряд интересных открытых и перспективных вопросов в соответствующих разделах ***TOC*-**проблематики**,** исследование которых представляет для нее существенный интерес. Приведенная в конце книги весьма обширная библиография, в свою очередь, содержит многочисленные ссылки на другие источники по ***TOC*-**проблематике и позволяет взыскательному читателю получить более детальную информацию по весьма широкому спектру теоретических и прикладных аспектов проблематики, как рассмотренных в настоящей книге**,** так и оставшихся по тем или иным причинам вне ее рамок**.**В отечественной литературе столь обширная библиография по ***TOC*-**проблематике приводится впервые. Между тем, в [536] представлена еще более развернутая библиография по ***TOC*-**проблематике и связанным с ней направлениям**,** которая существенно дополняет приведенную в монографии библиографию.

В настоящее время в развитии ***TOC*** и ее прикладных аспектов достаточно четко прослеживаются следующие доминирующие направления исследований, а именно**:**

• феноменологическая сложность ***OC*-**моделей с акцентом на установление некоторой удовлетворительной классификации в обширном многообразии такого типа параллельных дискретных динамических систем**;**

• алгоритмическая сложность ***OC*-**моделей с акцентом на исследованиях различных понятий сложности, отвечающих базовой аксиоматике однородных структур**;**

• исследования ***OC*-**моделей как параллельных дискретных динамических систем**;**

• обобщения и модификации ***OC*-**моделей относительно их классического понятия**;**

• использование однородных структур в качестве новой перспективной среды моделирования в различных областях современного естествознания**,** прежде всего**,** в физических, вычислительных и биологических науках**.**

Сказанное подтверждает как направленность основных публикаций в данном направлении за последние пять лет**,** так и тематика целого ряда серьезных международных научных форумов, проведенных в этот же период. В этом отношении наши исследования в значительной степени отвечают и развивают отмеченную направленность дальнейшего развития современной как теоретической**,** так и прикладной частей ***TOC*-**проблематики, составляя существенную часть ее базового наполнения.

Переходим теперь к непосредственному рассмотрению концептуальных аспектов классических однородных структур, предварительно введя основные понятия, определения и обозначения. Остальные базовые элементы будут вводится по мере необходимости в процессе изложения тех или иных аспектов ***TOC*-**проблематики.

Гродно – Таллинн, апрель - июнь, 2008

Глава 1. Базовая концепция однородных структур

Однородные структуры (ОС) во всей своей общности представляют собой, как говорилось выше, высоко формализованные модели неких абстрактных Вселенных, развивающихся по простым правилам и состоящим из весьма простых идентичных элементов. Такие ***ОС-***вселенные развиваются в соответствии с локальными и всюду одинаковыми правилами взаимодействия составляющих их элементов *(законами)*. В данном контексте ***ОС*** можно рассматривать в качестве некоторого аналога физического понятия ***«поля»***. Пространство ***ОС-****вселенной* представляет собой регулярную решетку, каждая клетка которой представляет собой идентичный элемент *(элементарную частицу)*, допускающий конечное число состояний. Развитие ***ОС-****вселенной* происходит в *дискретной* временной шкале ***(t=0,1,2,...)*** согласно конечному набору инструкций изменения состояний ее элементов в каждый ***t-***момент времени как функция состояний самого элемента и конечного числа его ближайших соседей в предыдущий ***(t-1)-***момент времени. Не взирая на такие простые организацию и принцип функционирования, ***ОС-***вселенные допускают весьма сложное поведение *(динамику развития конфигураций состояний составляющих ее элементов)*, обеспечивающее моделирование большого количества объектов, процессов и явлений в различных областях науки и техники. Для более конкретного рассмотрения концепции ***ОС-вселенных*** *(моделей)* нам понадобится целый ряд ***базовых*** понятий и определений, позволяющих на формальном уровне исследовать выразительные возможности однородных структур в качестве перспективной *среды* моделирования в целом ряде стратегически важных направлений современного естествознания.

1.1. Основные понятия, определения и обозначения

В настоящем разделе вводятся *основные* понятия, определения и обозначения, связанные с концепцией классической ***ОС-***модели и используемые на протяжении всего дальнейшего изложения. Наряду с этим, используются единая, введенная нами ранее, русская терминология и система обозначений для определения основных понятий. Детальное обсуждение основных понятий ***ТОС-***проблематики и связанных с нею вопросов позволит читателю глубже уяснить основы данного раздела общей теории абстрактных автоматов. Прежде всего, основное изложение материала будет базироваться на так называемом ***классическом*** понятии ***d-мерных однородных структур (d-ОС; d ≥ 1)***, относительно которого здесь вводится ряд основных определений и суммируются некоторые результаты, относящиеся к важному вопросу ***степени общности*** классического понятия.

1. Понятие ***классической d-ОС*** определяется как упорядоченная четверка компонент

$$d\text{-}OC = \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X \rangle$$

где ***A –*** конечное непустое множество, называемое ***алфавитом внутренних состояний*** единичных автоматов структуры и представляющее собой множество состояний, которые может принимать каждый элементарный *(единичный)* автомат структуры. Алфавит ***A*** содержит так называемое состояние ***покоя***, обозначаемое символом ***«0»*** *(для удобства в ряде случаев* ***0-****символ будем отождествлять с* □***-****символом)*; суть данного особого состояния будет выяснена несколько позже. Не нарушая общности, в качестве ***A-***алфавита будем использовать множество состояний ***A={0,1,2,..., a-1}***, содержащее ***a*** элементов ***–*** чисел от ***0*** до ***(a-1)***. Компонента Z^d представляет собой множество всех ***d-***мерных кортежей ***–*** цело-

численных координат точек в евклидовом E^d пространстве, т. е. Z^d представляет собой целочисленную решетку в E^d, элементы которой служат для пространственной идентификации единичных автоматов структуры. Компонента Z^d определяет ***однородное пространство*** структуры, в котором она функционирует. Можно показать [1], что другие типы регулярных решеток в качестве однородного пространства не вносят относительно *динамических* свойств ***ОС-***моделей математически ничего нового, т.е. вполне достаточно ограничиться Z^d***-***пространством. Естественно, что в целом ряде прикладных аспектов ***d-ОС*** их геометрия играет, порой, существенную роль (*вопрос геометрии однородного пространства приобретает особое значение в структурной теории, когда исследуются свойства* ***ОС-****моделей в зависимости от их внутренней организации*), однако в настоящей книге данный вопрос не рассматривается и читатель отсылается к работам, представленным в [536].

Размерность (d) однородного пространства ***ОС-***модели также играет весьма существенную роль, дифференцируя все множество моделей на два неравных подмножества: одномерной ***(d=1)*** и высших ***(d ≥ 2)*** размерностей. При этом, переход уже от ***1-***мерного к ***2-***мерному случаю резко изменяет не только динамику ***ОС-***моделей (*обусловленную сугубо увеличением размерности*), но и сложность решаемых относительно их проблем. Ниже будет показано, что целый ряд проблем динамики для случая классических ***1-ОС*** и ***d-ОС*** ***(d ≥ 2)*** имеют соответственно положительное решение и алгоритмически неразрешимы, т.е. в общем случае для их решения не существует алгоритма в современном нашем понимании. В этом отношении ***1-ОС*** представляют собой *особый* подкласс множества всех ***d-ОС (d≥1)***, исследуемый достаточно эффективно. И если в плане моделирования ***1-ОС*** особой перспективы, на наш взгляд, не имеют, то в качестве самостоятельного математического объекта представляются нам достаточно интересными. К тому же, на примере ***1-ОС*** значительно проще осваивать концепцию классических ***ОС-***моделей, что и будет широко использоваться нами в дальнейшем изложении. По причине же того, что ***1-ОС*** намного проще даже ***2-ОС*** (*намного меньший набор возможных правил перехода единичного автомата, алгоритмическая разрешимость целого ряда проблем и т.д.*), именно ***1-ОС*** наиболее интенсивно исследовались с теоретической точки зрения и именно данному классу ***ОС-***моделей посвящено большинство как теоретических публикаций, так и их компьютерного симулирования на предмет исследования тех или иных динамических свойств.

В каждую точку пространства Z^d помещается копия конечного автомата ***(КА)*** Мура, алфавит внутренних состояний которого есть ***А***. Как известно, автомат Мура представляет собой конечный автомат, выход которого в данный момент времени ***t*** зависит только от его внутреннего состояния в этот же момент времени ***t*** и не зависит от значения его входов. Состояние S_t ***КА*** в момент ***t>0*** есть некоторая функция $F(Bx_1, ..., Bx_n, t\text{-}1)$ его входов в момент времени ***(t-1);*** при этом, выход автомата в момент ***t*** тождественен его внутреннему S_t***-***состоянию и при наличии связи между автоматами их взаимодействие фрагментарно показано на нижеследующем достаточно наглядном рис. ***1.***

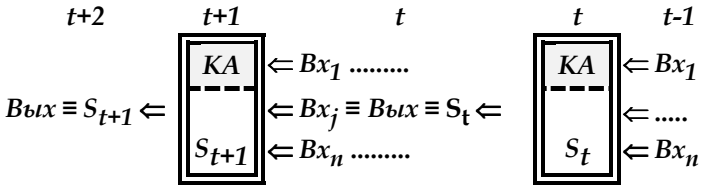


Рис. 1. Временная схема взаимодействия двух связанных автоматов Мура

В качестве ***входов, внутренних состояний*** и ***выходов КА-***автомата ***ОС-***модели используются символы из некоторого фиксированного конечного ***А-***алфавита. В этом случае каждая точка Z^d определяет ***имя*** либо ***координату*** единичного автомата, помещенного в данную точку. Для удобства в дальнейшем будем идентифицировать точки пространс-

тва Z^d с расположенными в них единичными автоматами. Таким образом, два термина «***автомат z***» и «***автомат с координатой*** $z \in Z^d$» будем полагать идентичными**.** Компонента ***X,*** называемая ***индексом соседства*** структуры, есть упорядоченный кортеж ***n*** элементов из Z^d**,** который служит для определения автоматов***-соседей*** любого единичного автомата структуры**,** т.е**.** тех ее автоматов**,** с которыми данный единичный автомат непосредственно связан информационными каналами, т.е. обменивается информацией.

В качестве простейшего примера структуры ***2-OC*** пространство Z^2 можно представить себе в виде клеточной бумаги, в каждой клетке которой расположена копия некоторого конечного автомата Мура**.** Тогда X_H**=**{***(0,0), (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)***}** и X_M**=**{***(i,j)***}** ***(i,j*** $\in$ {***0,1,-1***}***)*** называются соответственно индексами соседства Дж. фон Неймана и Мура **(**рис. **2).** Эти индексы соседства стали классическими и широко используются в исследованиях теоретических и прикладных аспектов ***d-OC,*** а определяемые ими ***шаблоны соседства (ШС)*** имеют весьма прозрачный геометрический образ, а именно.

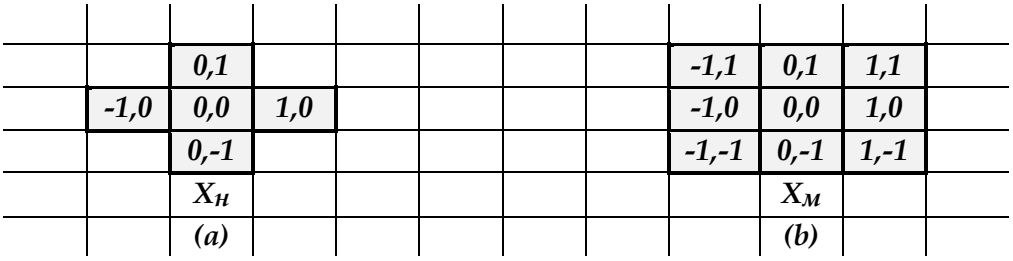
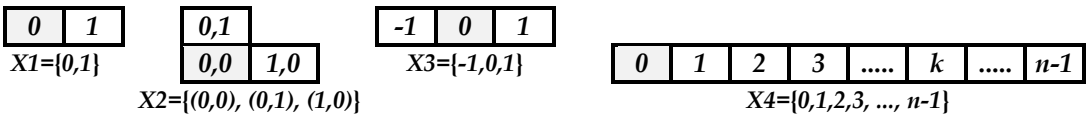


Рис. 2. Шаблоны соседства Джон фон Неймана (a) и Э.Ф. Мура (в).

В одномерном случае оба типа индексов соседства совпадают**.** Читателю не составит особого труда обобщить двухмерные индексы соседства X_H и X_M на общий ***d-***мерный случай. В общем случае шаблоны соседства ***OC-***моделей произвольны и могут принимать весьма экзотический вид, определяемый прикладными аспектами модели.

К наиболее часто используемым индексам соседства и соответствующим им ***ШС*** **(***наряду с отмеченными индексами соседства Джон фон Неймана и Мура***)** можно также отнести**:**



При этом**,** индексы соседства ***X1*** и ***X2*** являются простейшими соответственно для ***1-OC*** и ***2-OC.*** В общем случае для ***d-***мерной классической ***OC-***модели *простейший* индекс соседства ***X*** принимает следующий вид**:**

$$X=\{\underbrace{(0,0,\ldots\ldots\ldots,0)}_{d},\underbrace{(1,0,0,\ldots\ldots,0)}_{d},\underbrace{(0,1,0,\ldots\ldots,0)}_{d},\ldots\ldots\ldots,\underbrace{(0,0,\ldots\ldots,0,1)}_{d}\}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{d+1}$$

т.е. один автомат простейшего ***ШС*** является ***центральным*** и от него по каждой оси координат расходится строго по *одному* единичному ***z-***автомату структуры**.** Но несмотря на универсальность простейших индексов соседства **(***каждая классическая* ***d-OC*** *моделируется структурой той же размерности, но с простейшим индексом соседства***),** для конкретных приложений и большинства исследований используются более сложные индексы **(***например, для случая* ***1-OC*** *индекс* ***X*****=**{***0,1,2, ..., n-1***}***)*** со специальной геометрией ***ШС.*** Это в целом ряде случаев позволяет весьма существенно упрощать сам процесс погружения в классические ***OC-***модели конкретных объектов, процессов и алгоритмов.

Каждый единичный автомат структуры в любой дискретный ***t-***момент времени может получать информацию только от своих непосредственных соседей и передавать информацию о своем текущем состоянии также только им**.** Таким образом, *непосредственными соседями* единичного автомата $z \in Z^d$ являются автоматы $z+x_1, z+x_2, \ldots, z+x_n$, где $X=\{x_1,x_2,$

..., x_n}; $x_j \in Z^d$ (j=1..n). Индекс соседства ***X*** описывает единый ***шаблон соседства (ШС;*** *геометрический образ соседей-автоматов)* для каждого единичного ***z-***автомата структуры**.** 0н определяет позиции автоматов**-**соседей относительно каждого конкретного единичного ***z-***автомата**,** который имеет с ними непосредственный информационный интерфейс. Если индекс соседства ***X*** содержит элемент 0^d**=**{***0,0,0, ..., 0***}**,** то каждый единичный автомат структуры принадлежит собственному ***ШС.*** В дальнейшем**,**не нарушая общности**,** будем полагать**,** что ***X-***индекс соседства содержит 0^d***-***элемент**,** определяющий ***центральный*** автомат ***ШС.*** Доказано [1]**,** что динамика ***d-ОС (d≥1)*** не зависит от выбора в качестве центрального любого автомата ***ШС*** структуры**.** Таким образом, деление ***d-ОС*** на структуры с ярко выраженным ***градиентом*** передачи информации, обусловленным выбором центрального автомата шаблона соседства, не изменяет динамических и вычислительных возможностей ***ОС-***моделей во временном отношении, хотя и влияет на их конструктивные характеристики, т.е. характеристики, зависящие от геометрии пространства структуры**.** Например**,** ***1-ОС*** с индексами соседства ***X***={***-k, ..., -1,0,1, ..., p***} при ***k,p***∈{***0,1,2, ..., n-1***} и определяющем соотношении ***p+k+1=n*** в поведенческом отношении строго эквивалентны друг другу**,** т.е. на каждый шаг моделируемой ***1-ОС*** с индексом соседства из указанного класса требуется только один шаг моделирующей ее ***1-ОС*** с индексом соседства из того же класса**.** В конструктивном же отношении**,** в общем случае**,** такие ***ОС-***модели различаются. Это имеет место, например, при погружении в них процессов, динамика которых существенно зависит от направленности информационных потоков. Тогда как в случае ***ОС-***моделей, отличных от классических **(***например**,** *конечных структур***),** выбор же центрального автомата ***ШС*** может играть определяющую роль как для динамических, так и для конструктивных характеристик исследуемой модели.

Среди *шаблонов соседства* ***(ШС)*** различают ***связные*** и ***несвязные,*** данный показатель в общем случае существенно влияет на динамику ***ОС-***моделей. ***ШС*** называется ***связным,*** если занимаемая им область связна в топологическом смысле**;** иначе шаблон соседства называется ***несвязным.*** Так, например, две ***1-ОС*** с индексами соседства ***X1***={***0,1,2,3,4,5,6,7***} и ***X2***={***0,1,2,4,5,7,8,10***} имеют соответственно *связный* и *несвязный* ***ШС*** **(**рис. ***3),*** что даже в случае одинаковых локальных функциях перехода может приводить к существенным различиям в их динамике. В дальнейшем изложении мы будем иметь дело**,** как правило**,** со связными шаблонами соседства, имея в виду то обстоятельство, что несвязный шаблон соседства всегда можно заменить эквивалентным ему связным шаблоном того же максимального размера**,** задействовав в соответствующем ему индексе соседства несущественные компоненты, что несложно уяснить из нижеследующего простого примера **(**рис. ***3).***

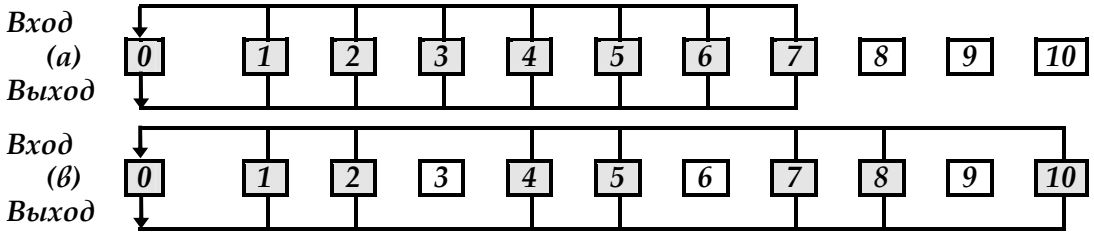


Рис. 3. Схема непосредственного информационного обмена в связном (а) и несвязном (в) шаблонах соседства (ШС) одномерной однородной структуры.

2. *Первые* три рассмотренные компоненты ***d-ОС,*** а именно**:** ***A-***алфавит состояний единичных автоматов**,** однородное пространство Z^d и ***X-***индекс соседства образуют ***однородную среду,*** являющуюся статической частью ***ОС-***модели**.** Данная часть описывает физическую организацию структуры и ее геометрию**,** но не специфицирует ***взаимодействия*** ***(****динамики****)*** среди составляющих ее единичных автоматов**.** Для определения функциони-

рования ***d-OC*** необходимо иметь возможность описывать текущие состояния всех единичных автоматов структуры в любой дискретный момент времени $t \geq 0$.

Состояние всей однородной среды называется ***конфигурацией (КФ) d-OC*** и представляет собой набор текущих состояний всех составляющих ее единичных автоматов. А именно, конфигурация ***d-OC*** есть любое отображение $КФ : Z^d \to A$ и $C(A,d)$ обозначает множество всевозможных конфигураций относительно Z^d и A, т.е.

$$C(A,d) = \{КФ \mid КФ : Z^d \to A\}$$

Специальным символом «$□^d$» обозначается полностью *нулевая* $КФ$; $□^d : Z^d \to 0$, когда все единичные автоматы ***d-OC*** находятся в состоянии покоя «***0***». Отождествляя состояния «***0***» и «□», второе из них будем использовать для обозначения бесконечных областей Z^d-пространства, заполненных автоматами в ***0****-состоянии*. Множество конфигураций $C(A,d)$ неоднородно относительно динамики функционирования ***d-OC*** по причине наличия выделенного состояния покоя, поэтому определяются два основных его подмножества конфигураций: ***конечных*** и ***бесконечных.*** На рис. ***4*** приведены примеры ***1-*** и ***2-***мерных конечных и бесконечных $КФ$ в алфавите $A=\{□,0,1,2,3\}$ $(0 \equiv □)$.

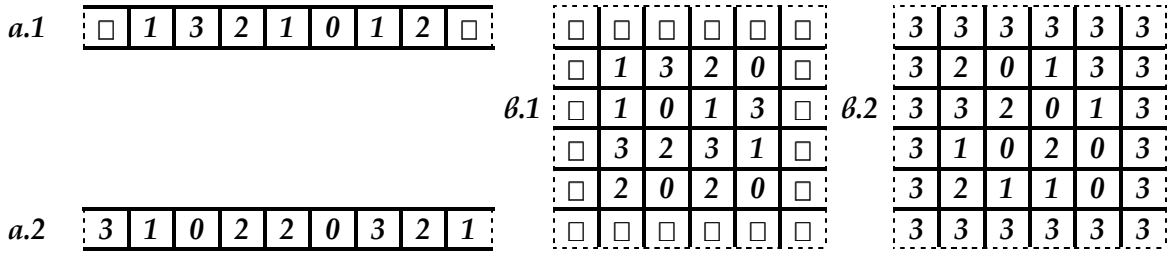


Рис. 4. Примеры конечных (а.1, в.1) и бесконечных (а.2, в.2) конфигураций.

Под ***конечной*** понимается такая $КФ\ c \in C(A,d)$, которая содержит только конечное число единичных автоматов в состояниях, отличных от ***0***-состояния *покоя*. В противном случае $КФ$ называется ***бесконечной*** (рис. ***4***). Конечные конфигурации представляют особый интерес и множество ***всех*** таких $КФ$ для данной структуры ***d-OC*** будем обозначать через $C(A,d,\phi)$; при этом, ***d***-размерность $КФ$ определяется размерностью самой структуры. Будем обозначать множество ***бесконечных*** $КФ$ соответственно как $C(A,d,\infty)$. Очевидно, что относительно любой ***d-OC*** имеют место соотношения: ***(1)*** объединение всех ***конечных*** и ***бесконечных*** $КФ$ составляет в точности множество $C(A,d)$ и ***(2)*** ни одна $КФ$ не может принадлежать одновременно как множеству $C(A,d,\phi)$, так и множеству $C(A,d,\infty)$, что на языке операций над множествами можно кратко выразить как: $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty) = C(A,d)$ и $C(A,d,\phi) \cap C(A,d,\infty) = \varnothing$, где $\varnothing$ – пустое множество. Здесь и в дальнейшем будут использоваться общепринятые теоретико-множественные и логические обозначения, хорошо известные уже из школьных курсов математики, не говоря уже об университетских.

Наряду с конфигурацией всего Z^d-пространства определяем и конфигурацию c_b конечного ***d***-мерного *гиперкуба* (*блока*) $b \subset Z^d$ единичных автоматов структуры; множество всех таких $КФ$ будем обозначать через $C(A,d,B)$. Понятие ***блочных*** конфигураций играет важную роль, в частности, при исследовании проблемы неконструируемости в классических ***d-OC***. В дальнейшем данный вопрос будет более детализирован. Так как в дальнейшем речь будет в значительной мере идти об одномерных ***OC (1-OC)***, то для обозначения одномерных ***конечных***, ***блочных*** и ***бесконечных*** $КФ$ будут использоваться соответственно обозначения $c=□c_1c_2c_3 \ldots c_k□$, $c_b=b_1b_2b_3 \ldots b_p$ и $c=\infty c_1c_2c_3 \ldots c_k\infty$, где $c_1, c_k \in A\backslash\{0\}$ и $c_j, b_q \in A;\ j=2..(k-1);\ q=1..p$. Длина конечных $КФ$ полагается равной k и обозначается как $|c|$ $(|c|=k)$; аналогично определяется длина и блочных $КФ$. Множества одномерных *всевозможных*, *конечных*, *блочных* и *бесконечных* $КФ$ будем обозначать соответственно как

$C(A)$, $C(A,\phi)$, $C(A,B)$ и $C(A,\infty)$. Непосредственно из определения множеств $C(A,\phi)$ и $C(A,B)$ следует, что *первое* замкнуто относительно определяемого ниже глобального **τ-**преобразования, а второе замкнуто относительно операции конкатенации. Более того, очевидны следующие соотношения $(\forall c_b \in C(A,B))(c=\square c_b \square \in C(A,\phi))$ и $(\forall c^* \in C(A,\phi))([c^*] \in C(A,B))$. При этом, множество $C(A,\phi)$ включает и *нулевую* ***КФ*** $c=\square$ при отсутствии ее в $C(A,\infty)$. Соглашение об этом делается по ряду важных соображений. Переходим к непосредственному описанию принципа функционирования классических ***OC-***моделей.

3. Функционирование ***d-OC*** осуществляется в дискретной шкале времени $t=0,1,2,...$ и определяется ***локальной функцией перехода (ЛФП)*** $\sigma^{(n)}$, которая задает состояние каждому единичному *z-*автомату структуры в момент времени t на основе состояний всех соседних ему автоматов (*согласно X-индекса соседства*) в момент времени $(t-1)$. Иными словами, ***ЛФП*** есть любое отображение $\sigma^{(n)} : A^n \to A$; в дальнейшем для ***ЛФП*** классических ***OC-***моделей будем использовать следующие основные обозначения:

$$\sigma^{(n)}(a_1,a_2, ..., a_n) = a^*_1; \qquad a_j, a^*_1 \in A \quad (j=1 .. n) \qquad (1)$$

$$a_1a_2 ... a_n \Rightarrow a^*_1 \text{ – множество параллельных подстановок} \qquad (2)$$

где a_j – состояния любого *z-*автомата ***d-OC*** и его соседей (*согласно индекса соседства* $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$) в момент времени $(t-1)$, а a^*_1 – состояние этого же *z-*автомата в следующий момент времени $t>0$. При этом, рассматриваемый *z-*автомат структуры полагается центральным относительно приписываемого ему *шаблона соседства* ***(ШС)***. Поясним теперь вопрос произвольности выбора центрального автомата, не нарушающего динамику ***d-OC*** на примере ***1-OC***. Две ***1-OC*** полагаются ***эквивалентными*** в динамическом отношении, если их ***ЛФП*** определяются параллельными подстановками следующего вида:

$$x_1x_2 ... x_k ... x_n \Rightarrow x^*_k = b \quad \text{и} \quad x_1x_2 ... x_j ... x_n \Rightarrow x^*_j = b \quad (k \neq j;\ 1 \le k,j \le n;\ x_p, b \in A;\ p=1..n)$$

при различных центральных автоматах (k, j) шаблона соседства длины n; при этом, сами кортежи $\langle x_1x_2 ... x_k ... x_n \rangle$ и $\langle x_1x_2 ... x_j ... x_n \rangle$ должны быть идентичными. В общем же случае ***1-OC*** с ***ЛФП***, определяемыми параллельными подстановками вида

$$x_1 x_2 ... x_n \to x^*_1; \qquad x_1 x_2 ... x_j ... x_n \to x^*_j \quad \text{и} \quad x_1 x_2 ... x_n \to x^*_n \qquad (1<j<n)$$

характеризуются направлением передачи информации *влево*, *влево и вправо*, и *вправо* соответственно. Вышесказанное легко переносится и на случай высших размерностей.

Наиболее удобным является *формульное* представление ***ЛФП***, когда вычисление последующего состояния текущего *z-*автомата структуры производится на основе формулы (**1**). Во многих интересных случаях такой подход возможен, однако в целом ряде случаев требуется использование ***ЛФП*** в виде множества ***параллельных*** *подстановок* (**2**). Множество ***параллельных подстановок*** (**2**) определяет программу (*параллельный алгоритм*) функционирования классической ***OC-***модели; параллельные подстановки (**2**) представляют собой *параллельный* язык программирования низшего уровня в среде ***OC-***моделей. Например, если в момент t текущая ***КФ 1-OC*** с алфавитом $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, индексом соседства $X=\{0,1,2,3\}$ и ***ЛФП***, определяемой, в частности, подстановкой вида $1023 \Rightarrow 2$ (*либо в эквивалентном виде* $\sigma^{(4)}(1,0,2,3)=2$), имеет вид (φ), то в следующий момент $t+1$ она переходит в **φ*-*КФ***, содержащую выделенный ***J-***автомат структуры в новом состоянии, полученном на основе ***ЛФП*** (*параллельных правил подстановки*) ***OC-***модели, а именно:

J – *выделенный единичный автомат структуры*

Формульное представление ***ЛФП*** особенно предпочтительно при компьютерной реализации ***ОС-***моделей, тогда как параллельные подстановки незаменимы на стадии программирования конкретных ***ОС-***моделей. Вопросы формульного (**1**) представления параллельных подстановок (**2**) подробно рассматриваются в наших монографиях [1,5].

В монографии рассматриваются структуры**,** чьи ***ЛФП*** подчиняются определяющему соотношению $\sigma^{(n)} : 0^n \Rightarrow 0$ или $\sigma^{(n)}(0,0,...,0)=0$**,** т.е. структуры с ограничением на скорость передачи информации в них **(***некоторый аналог ограничения скорости распространения света согласно современной физической концепции***).** Данное предположение играет существенную роль при исследованиях динамических свойств ***d-ОС*** и хорошо отвечает требованиям использования структур в качестве основы моделирования параллельных динамических систем различной природы**.** Определяющее соотношение не только вводит ограничение на скорость распространения информации в ***ОС-***моделях**,** но и определяет собственно пространство **(***своеобразный абстрактный* ***вакуум)***, в среде которого и происходит вся динамика развития исследуемых дискретных объектов, процессов и явлений. При этом**,** в качестве ***состояния покоя*** может быть выбран любой элемент ***A-***алфавита структуры, но по целому ряду соображений ему наилучшим образом отвечает именно $\{0 \mid \square\}$**-**элемент. Структуры, удовлетворяющие определяющему соотношению**,** будем называть ***стабильными,*** в противном случае **–** ***нестабильными.*** В плане исследования ***ОС-***моделей как самостоятельного математического объекта определенный интерес представляют и ***нестабильные*** структуры. Между тем, ***нестабильные*** структуры могут представить интерес и с точки зрения исследования в них моделей**,** основывающихся на концепции возможности мгновенной передачи информации на сколь угодно большие расстояния**.** Подобные примеры использования *нестабильных* ***ОС-***моделей нам пока не известны, однако работы в данном направлении представляются весьма интересными.

При определении классических ***d-ОС,*** являющихся основным предметом рассмотрения настоящей книги, мы будем постоянно аппелировать к определяющему данный класс структур соотношению для их локальных функций перехода**,** а именно**:** $\sigma^{(n)}(0,0,...,0)=0$**,** смысл которого рассматривался выше. Между тем, следует иметь ввиду, что ***определяющее*** соотношение для локальной функции перехода ***классической d-ОС*** $(d \geq 1)$ в общем случае имеет следующий вид, а именно**:**

$$(\exists h \in A)\left(\sigma^{(n)}(h,h,h,...,h) = h\right) \qquad (\Theta)$$

т.е., в качестве состояния «*покоя*» может выступать произвольное состояние ***A-***алфавита внутренних состояний структуры. Данное определение понятия ***классических d-ОС*** довольно существенно расширяет класс такого типа структур и все представленные ниже результаты, обусловленные наличием для однородных структур наиболее распространенного определяющегося соотношения $\sigma^{(n)}(0,0,...,0)=0$**,** естественным образом переносятся и на ***d-ОС*** общего класса структур, ***ЛФП*** которых удовлетворяют определяющим соотношениям **(Θ).** При этом, наиболее естественным такое понимание классических структур присуще именно для *бинарного* алфавита внутренних состояний, когда смысл состояний «***0***» и «***1***» просто меняется на противоположный. Приведенное пояснение по определению классических структур будем иметь ввиду на протяжении всего нижеследующего рассмотрения данного типа однородных структур размерности ≥ 1**.**

Для дальнейшего будет вполне уместно сделать одно замечание, носящее конвенционный характер. Данное соглашение используется нами вот уже на протяжении более ***35*** лет для описания ***ЛФП 1-***мерных ***ОС-***моделей. Ради удобства представления бинарных классических ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура нами, начиная с ***1971*** г. [19,20], использовался простой и весьма естественный прием, когда ***ЛФП*** такого типа структур определяется параллельными подстановками следующего вида, а именно**:**

$000 \to x_1 = 0$	$010 \to x_3$	$100 \to x_5$	$110 \to x_7$
$001 \to x_2$	$011 \to x_4$	$101 \to x_6$	$111 \to x_8$

Очевидно, количество всех таких структур равно $2^7=128$. Игнорируя условие $000 \to 0$, определяющее рассматриваемый нами тип ***классических*** структур, получим **256** *различных* структур, из которых половина классических. Пронумеруем данные структуры целыми числами, соответствующими их бинарным представлениям $<x_1x_2 \ldots x_8>$, т.е. от **0** до **127 (255).** На наш взгляд, данный подход наиболее естественен, вместе с тем, в начале **80-х** с подачи ***С. Вольфрама*** был определен иной *(с точностью до наоборот)* принцип нумерации такого типа структур, когда нумерация структур базируется на использовании обратного порядка параллельных подстановок, определяющих ***ЛФП***, а именно:

$111 \to y_1$	$110 \to y_3$	$101 \to y_5$	$100 \to y_7$
$011 \to y_2$	$010 \to y_4$	$001 \to y_6$	$000 \to y_8$

и *характеристический* номер структуры определяется десятичным *эквивалентом* бинарного кортежа $<y_1y_2 \ldots y_8>$. Естественно, данное различие не принципиально, однако его следует иметь ввиду, когда привязываются к нумерации данного класса структур. Например, классическая структура, определяемая ***ЛФП*** следующего вида, а именно:

$$\sigma^{(3)}(x_o, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{2} x_j \pmod 2; \quad x_j \in B = \{0,1\}$$

в нашей классификации будет иметь номер **105**, тогда как в классификации ***С. Вольфрама*** номер **150**. Везде в настоящей книге используется именно наша классификация.

Естественно, можно иссследовать и нестабильные ***ОС***-модели, для которых отсутствует специально выделенное состояние «*покоя*», т.е. структуры, не удовлетворяющие определяющему соотношению $\sigma^{(n)}(0,0, \ldots, 0) = 0$. Однако такие структуры носят довольно умозрительный характер, являясь продуктом «*чистого разума*» и, на наш взгляд, не представляют серьезного интереса. Действительно, ***ОС***-модели ориентированы, прежде всего, на задачи симулирования различных процессов, явлений и феноменов, что уже априори предполагает наличие у них таких свойств как ограниченность размеров исследуемых объектов и скорости передачи информации. Естественно, можно рассматривать ***ОС*** как некие *абстрактные системы* переработки как конечных, так и бесконечных слов в конечных алфавитах. Однако и здесь довольно проблематично оперировать с бесконечными конфигурациями, например, в момент их определения – или задавать их по определенному детерминированному алгоритму, или стохастически, что в случае их бесконечности и размерности **> 1** и вовсе проблематично. Правда, и здесь можно такого типа структурам находить некоторые аналогии в реальном мире *(иногда, казалось бы, и довольно убедительные)*, однако ввиду немалых сложностей при интерпретации даже более простых структур это превращается в весьма сложную проблему. Сложность и разнообразие реального мира никак не вписываются в прокрустово ложе ***ОС***-концепции, если ее существенно не усложнять, что серьезно влияет на притягательность их простоты в изначальном определении. На наш взгляд, в настоящее время ***ОС*** представляют интерес по двум основным естественнонаучным направлениям, а именно:

(1) среда моделирования и реализации различных процессов, явлений, феноменов и объектов (прежде всего тех, которые сложно либо невозможно описывать другими средствами, например, дифференциальными уравнениями в частных производных);

(2) самостоятельный математический объект исследования (алгебраические системы обработки слов с параллельными правилами подстановок, параллельные динамические дискретные системы, абстрактные параллельные вычислители, подобно машине Тьюринга, Поста и др.).

И если в первом качестве вышеуказанное определяющее соотношение является неотъемлемой чертой ***OC***-моделей, то во втором можно обойтись и без него, но вот реальная польза от данного допущения представляется нам не очень впечатляющей.

4. Итак, ***динамика*** классических ***d-OC*** полностью определяется в терминах ***ЛФП –*** локальных взаимодействий автоматов шаблона соседства каждого единичного ***z***-автомата, а сама ***ЛФП*** представляет собой типичный пример локального алгоритма, выполняющегося сугубо параллельным образом на основе информации о состояниях единичных автоматов из локальной окрестности *(определяемой индексом соседства)* текущего ***z***-автомата Z^d-пространства классической ***OC***-модели.

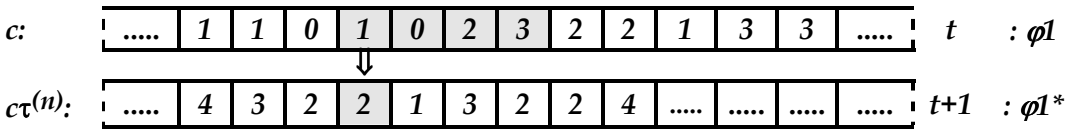
Одновременное применение ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ к текущей конфигурации шаблона соседства каждого единичного ***z***-автомата ***d-OC*** определяет *глобальную функцию перехода* ***(ГФП)*** $\tau^{(n)}$ структуры, переводящую текущую ***КФ*** $c \in C(A,d)$ в последующую ***КФ*** $c\tau^{(n)} \in C(A,d)$ структуры. Если через $s[z]$ обозначить текущее состояние единичного ***z***-автомата структуры, то формально ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ при индексе соседства $X=\{x_1,x_2, ..., x_n\}$ определяется следующим образом, а именно:

$$c\tau^{(n)} = c^* \leftrightarrow (\forall z \in Z^d)(s^*[z] = \sigma^{(n)}(s[z+x_1], s[z+x_2], ..., s[z+x_n]))$$

Из приведенных определений следует, что между множествами ***ЛФП*** и ***ГФП*** для заданной ***d-OC*** существует взаимно однозначное соответствие, иногда обозначаемое как ***(1-1)***-соответствие. Следовательно, можно говорить о ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определяемой ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, и наоборот. Оказывается, семейство глобальных функций перехода оказывается превосходным средством для решения широкого круга задач моделирования в режиме максимального распараллеливания *(архивирование и криптование данных; решение интегральных, дифференциальных и разностных уравнений; распознавание образов; обработка сигналов и др.)*. Более того, глобальные параллельные преобразования, определяемые классическими ***OC***-моделями, на наш взгляд, можно достаточно широко использовать подобно другим хорошо известным математическим преобразованиям *(Фурье, Лапласа и др.)*.

Проблема нахождения ***ЛФП***, соответствующая которой ***ГФП*** генерирует определенную историю *(динамику)* конфигураций структуры, подобна индуктивной проблеме нахождения законов, лежащих в основе наблюдаемого явления. Именно такая аналогия лежит в основе моделирования в ***OC***-среде естественных и искусственных систем различной, в первую очередь, клеточной, природы, а также при целом ряде других мотиваций, обусловленных задачами исследования. В общем случае проблема полного и точного описания динамики даже классических ***OC***-моделей является одной из самых сложных в ***TOC*** и имеющиеся в этом направлении попытки пока не столь эффективны как хотелось бы. Можно констатировать, что несмотря на всю простоту такого математического объекта как ***классические d-OC***, их динамика в общем случае носит весьма сложный характер и ее исследование требует значительных усилий, а в ряде случаев нетрадиционных подходов. Именно поэтому в данном направлении имеется относительно немного результатов, полученных сугубо теоретическими методами, тогда как большая часть носит эмпирический характер и получены они средствами компьютерного моделирования.

5. В качестве простого примера действия ***ГФП*** рассмотрим ***1-OC*** с алфавитом вида $A=\{0, 1,2,3,4\}$, индексом соседства $X=\{0,1,2,3\}$ и ***ЛФП***, определяемой, в частности, параллельными подстановками вида $\{1023 \Rightarrow 2, 1101 \Rightarrow 4, 1010 \Rightarrow 3, 0102 \Rightarrow 2, 0232 \Rightarrow 1, 2322 \Rightarrow 3, 3221 \Rightarrow 2, 2213 \Rightarrow 2, 2133 \Rightarrow 4, ...\}$. Тогда, если в момент ***t*** текущая ***КФ 1-OC*** имеет вид ***(φ1)***, то в следующий момент ***t+1*** она переходит в ***φ1*-КФ*** нижеследующего вида. С учетом вышесказанного, и завершается определение четвертой определяющей компоненты $\{\tau^{(n)}\}$ классической однородной структуры $d\text{-}OC = <Z^d, A, \tau^{(n)}, X>$ ***(OC либо OC-модели)***.



Именно ***классические d-OC*** *(или для краткости просто* ***d-OC)*** будут в основном рассматриваться ниже. Функционирование классической ***d-OC*** чрезвычайно просто и состоит в следующем**:** если $c=c_0 \in C(A,d)$ есть начальная ***КФ*** структуры в момент времени $t=0$**,** то ***КФ*** структуры в любой момент времени $t=k>0$ есть $c_0\tau^{(n)k} \in C(A,d)$ **–** результат ***k-***кратного применения ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ к начальной ***КФ*** $c_0 \in C(A,d)$**.** Предшественником произвольной ***КФ*** $c \in C(A,d)$ будем называть любую ***КФ*** $c^{-1} \in C(A,d)$ такую**,** что имеет место соотношение $c^{-1}\tau^{(n)}=c$**.** Каждая ***КФ*** $c \in C(A,d)$ может иметь единственного предшественника, конечное или бесконечное их число либо вовсе не иметь предшественников. Естественным образом определяются непосредственные предшественники для блочных или бесконечных конфигураций в классических ***OC-***моделях [1,5,536].

Пусть $<c_0>[\tau^{(n)}]$ обозначает последовательность ***КФ,*** генерируемых ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ из начальной c_0***-КФ.*** Тогда для любой конечной ***КФ*** $c_0 \in C(A,d,\phi)$ данная ***КФ-***последовательность представляет собой некоторую ***историю КФ*** c_0 в классической ***d-OC,*** играющую основную роль в исследованиях ее динамических свойств. Под ***динамикой*** понимается функционирование того или иного типа ***d-OC,*** состоящее в изменении с течением времени конфигурации структуры в зависимости от ее начальной ***КФ*** и ***ЛФП (ГФП).*** Таким образом, динамика классических $d\text{-}OC = <Z^d,A,\tau^{(n)},X>$ *(*$<c_0>[\tau^{(n)}]$*-последовательности* ***КФ;*** *история развития погружаемых в* ***d-OC*** *моделей)* определяется вполне однозначно рассмотренными ее базовыми компонентами, а именно**:** d**,** Z^d**,** A**,** X и $\tau^{(n)}$ $\{\sigma^{(n)}\}$**.**

6. В качестве простого примера рассмотрим известную «***экологическую***» игру из весьма популярного американского журнала *Scientific American* за февраль ***1971*** г**.** Она представляет собой типичную классическую ***2-***мерную ***OC-***модель с алфавитом $A=\{0,1\}$ и индексом соседства Мура**;** ***ЛФП*** такой модели описывается следующей простой формулой**:**

$$\sigma^{(9)}(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_8)=\begin{cases}1, & if \quad x_0=0 \,\&\, \sum x_j = 3\\ 1, & if \quad x_0=1 \,\&\, \sum x_j = \{2\,|\,3\}\\ 0, & otherwise \qquad (j=1..8)\end{cases} \qquad (3)$$

где в качестве текущего выступает x_0***-***автомат**,** а x_j *(j=1..8)* представляют его *8* непосредственных соседей. Иными словами, любой x_0***-***автомат ***2-OC*** переходит в состояние «***1***»**,** если**:** ***(1)*** сам он находится в состоянии «***0***» и три его любых соседа находятся в состоянии «***1***» или ***(2)*** сам он находится в состоянии «***1***» и два или три его соседа также находятся в состоянии «***1***»**;** в противном случае x_0***-***автомат переводится в ***0-***состояние. На обычной клетчатой бумаге такая игра может быть весьма просто реализована вручную с помощью карандаша или ручки. Данная экологическая игра значительно более известна под названием «***Жизнь***» *(«****Life****»)* и исследуется довольно интенсивно с различных точек зрения [3,150,168,172,409,536]. В дальнейшем оба эти названия будут нами отождествляться.

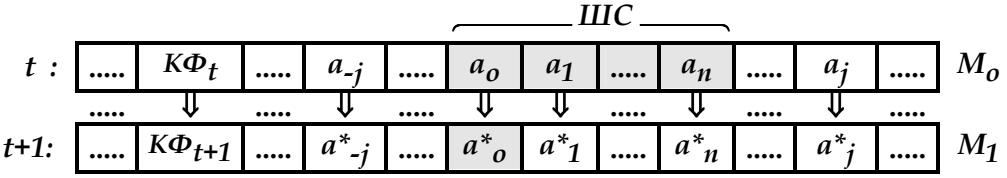
В ряде работ [523-531] игра «***Жизнь***» рассматривается в различных интересных контекстах как классическая бинарная ***2-OC*** с индексом соседства Мура**.** Так, ***С. Лэнгтон*** [523] выполнил достаточно интересное предварительное исследование потенциальных ***OC-***моделей, поддерживающих «***Жизнь***»**.** Интересное обсуждение вопросов искусственной ***Жизни*** в контексте ***OC-***проблематики может быть найдено в работах [524,525]. Наконец, ***Д. Тхалман*** [526] предложил т.н. ***Lifegame-***подход к моделированию и визуализации по-

верхностей в компьютерных алгоритмах обработки визуальной информации. В работе [527] ***К. Сутнер*** исследовал ***sigma-***игру в контексте динамики ***ОС-***моделей.

Для ручной реализации экологической игры можно поступить следующим образом. Выбирается стопка клетчатой бумаги хорошего качества (*соответствие графления между листами и удовлетворительная прозрачность бумаги*) и на первой странице наносится начальная ***КФ (t=0)*** путем заполнения *активных* клеток символом ***«1»***; *пассивные* клетки в ***0-***состоянии оставляются нетронутыми (*пустыми*). Затем первые два листа накладываются друг на друга и на фоне яркого освещения (*например, на оконном стекле*) на ***4-***й странице стопки формируется следующая ***КФ (t=1)*** на основе указанной ***ЛФП*** (**3**): для каждой клетки страницы проверяется конфигурация ее ***ШС*** (*сама клетка и ближайшие ее 8 соседей; просвечивает с **1-**й страницы*) и в зависимости от нее в клетку вписывается ***«1»*** или она остается без изменения. Подобная операция повторяется с листами ***2*** и ***3*** стопки и т. д., пока не получим последовательности ***КФ*** нужной нам длины. Любой читатель без особых затруднений сможет провести ручную имитацию экологической игры, весьма наглядно отслеживая динамику начальной конечной конфигурации ***ОС-***модели.

Естественно, при большем числе состояний ***А-***алфавита ***2-ОС,*** сложных геометрии ***ШС*** и ***ЛФП*** резко возрастает сложность ручной имитации ***ОС-***моделей, требуя как больших расходов бумаги, так и огромных временных затрат. При этом, резко возрастает вероятность появления ошибок (*кстати, достаточно трудно обнаруживаемых*), что может свести на нет большой объем работы. Поэтому, как правило, имитация ***ОС-***моделей производится посредством компьютерного симулирования, чему во многом способствует широкое распространение класса персональных компьютеров ***(ПК)*** с хорошими средствами отображения информации. В данном случае выводимое на экран изображение ***КФ*** представляет собой ***2-***мерный массив ***пикселей –*** элементов графического изображения, несущих информацию о *яркости* и *цвете* элементарного участка изображения, чья совокупность составляет изображение ***КФ*** в целом. В настоящее время пиксельные матрицы характеризуются размерностью более ***1280x1024*** пикселей, определяя достаточно высокую разрешающую способность дисплейных систем для ***ПК***.

7. Однако и в случае имитации ***ОС-***моделей на компьютерах традиционной последовательной фон неймановской архитектуры [6] мы вынуждены использовать вышеописанную ручную схему имитации (*на примере некоторой классической **1-ОС***), а именно:



определяются два идентичных по размерности массива M_o и M_1, из которых первый определяет основное Z^1-пространство, отображающее динамику последовательности ***КФ*** имитируемой ***ОС-***модели. Учитывая последовательный принцип обработки информации на традиционной ЭВМ фон-неймановской архитектуры, на ***t-***шаге на основе последовательной обработки ***ШС*** каждого элемента M_o-массива (*содержащего текущую конечную* $КФ_t$) формируется выходной M_1-массив, содержащий следующую конфигурацию $КФ_{t+1}$ истории имитируемой ***ОС-***модели. После этого массивы M_o и M_1 или логически меняются местами, либо содержимое M_1-массива переписывается в M_o-массив, идентифицируя следующую конфигурацию $КФ_{t+1}$, и вышеописанный процесс повторяется на заданную глубину истории развития симулируемой классической ***ОС-***модели.

Описанный алгоритм (*или его модификации*) компьютерной реализации динамики классических и ряда других типов ***ОС-***моделей использовался целым рядом авторов как для

исследования свойств собственно самих структур, так и их прикладных аспектов [1,4,8,9, 15,54-56,74,78,73,94-96,137,165,166,408] в различных областях естествознания, включая хорошо известные игровые приложения ***ОС-***моделей (*«Популяция», «Жизнь», «Экология» и др.).* В частности, нами была написана весьма простая ***Pascal-***программа ***Ecology*** [5,6].

```
PROGRAM Ecology;  {Имитация экологической игры из Scientific American}
        USES Crt, Dos; {$I-} {Created in March, 1997 in TRG & VASCO * Tallinn}
        VAR HS0: Array [1..25, 1..25] Of Integer; Z,Q,N,M,K,P,Mn: Integer;
              HS1: Array [1..25, 1..25] Of Integer; R: String;
        LABEL L55;
Function Sigma(X: Integer; Y: Integer): Integer;
        BEGIN Q:=0; FOR N:= -1 TO 1 DO FOR M:= -1 TO 1 DO Q:= Q+HS0[X+N,Y+M];
        Q:= Q-HS0[X,Y]; IF (Q = 3) And (HS0[X,Y] = 0) THEN Sigma:= 1 ELSE
        IF ((Q = 2) Or (Q = 3)) And (HS0[X,Y] = 1) THEN Sigma:= 1 ELSE Sigma:=0 END;
                        BEGIN  ClrScr;  {Главное тело программы}
WriteLn('Экологическая игра!'); WriteLn('========================');
Write(`For continue press any key: `); IF Not KeYPressed THEN ReadLn(R);
WriteLn('Ввести координаты активных точек (25x25)-решетки в виде "X Y", определив');
WriteLn('тем самым начальную конфигурацию активных клеток в 0-момент.');
  WriteLn('Ввод координат активных клеток завершается по <0 0>-набору!');
       FOR K:= 1 TO 25 DO FOR P:= 1 TO 25 DO HS0[K,P]:= 0;
 REPEAT     Write('Координаты: '); ReadLn(N,M); HS0[N,M]:= 1; UNTIL N = 0;
Write('Ввести число итераций: '); ReadLn(Mn);  L55: FOR Z:= 1 TO Mn DO  Begin
     FOR K:= 2 TO 24 DO FOR P:= 2 TO 24 DO HS1[K,P]:= Sigma(K,P);
   FOR K:= 1 TO 25 DO FOR P:= 1 TO 25 DO HS0[K,P]:= HS1[K,P];  End;
       FOR K:= 2 TO 24 DO  Begin Write('  ');
FOR P:= 2 TO 24 DO Begin Write(HS0[K,P]); Write(' '); End; WriteLn; END;
       Write(`Указать число дополнительных итераций (0/N): `);  ReadLn(Mn);
                    IF  Mn <> 0  THEN  GoTo  L55;    END.
```

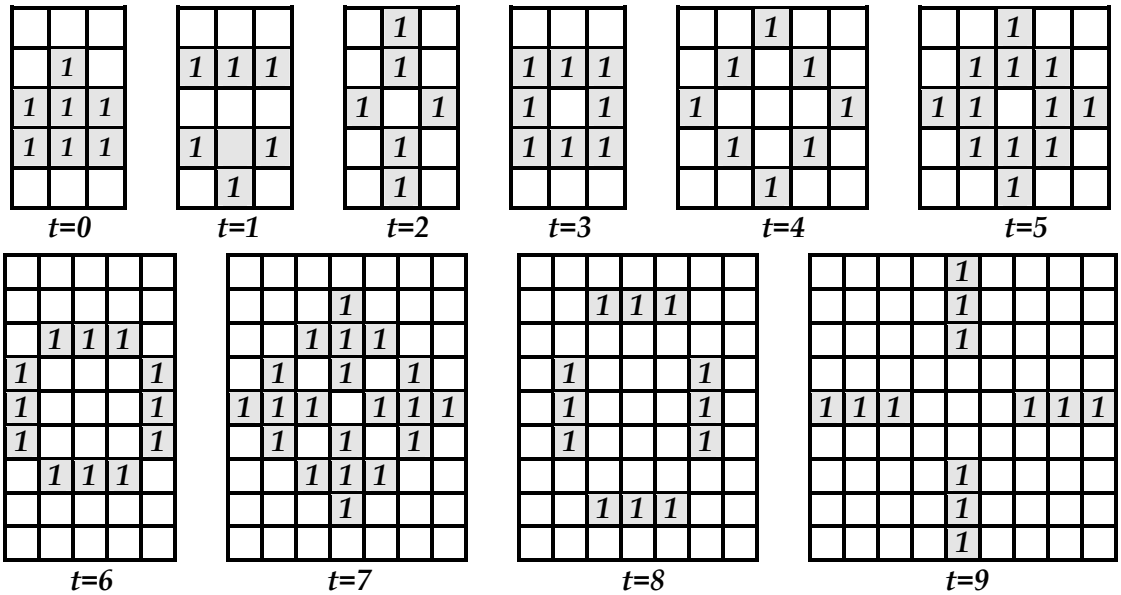


Рис. 5. Пример выполнения Ecology-программы при конкретных установках: начальной конечной КФ и заданном количестве итераций структуры.

Программа ***Ecology*** использует вышеописанный алгоритм имитации ***ГФП*** симулируемой классической ***2-ОС.*** Данная программа позволяет на требуемую глубину отслежи-

вать на экране ***IBM-***совместимого ***ПК*** динамику распространения активности в ***OC-***модели**.** Листинг исходного модуля ***Ecology-***программы представлен выше.

Один из примеров выполнения данной программы иллюстрирует рис. **5,** в котором приведены начальная конфигурация ***(t = 0)*** распределения активных ***(в 1-****состоянии****)*** клеток среды и ее конфигурации на девяти последующих шагах итерации**.** Компьютерный эксперимент показывает, что полученные конфигурации завершаются двумя периодическими ***КФ*** в моменты времени ***t = 8*** и ***t = 9.*** Все последующие конфигурации динамики развития данной ***OC-***модели вычисляются по следующему правилу**:** для всех целых $t \geq 8$ $КФ_t \equiv КФ_8$**,** если ***t –*** четное, и $КФ_t \equiv КФ_9$**,** в противном случае.

В общих чертах суть данной имитационной игры ***Ecology*** сводится к следующему. Выбирается некоторая абстрактная среда, представляющая собой матрицу ***(NxN)-***размерности**,** каждый элемент которой может находиться в состоянии из {***0,1***}**-**алфавита ***(0-****пассивен****, 1-****активен****).*** Для каждого элемента определяются его непосредственные соседи в количестве ***8,*** дискретная временная шкала изменения состояний элементов матрицы и локальная **σ-**функция**,** определяющая состояние любого элемента матрицы в последующий момент времени в зависимости от состояния его самого и его ***8*** соседей в текущий момент. Для конкретного случая локальная функция определяется формулой (**3**). В каждый момент времени локальная функция одновременно применяется ко всем элементам матрицы ***(****влияние граничных условий не рассматривается****),*** определяя *динамику* изменения состояний ***(****конфигураций****)*** элементов матрицы с течением времени**.** В процессе экспериментирования с ***Ecology-***программой пользователь получает возможность производить мониторинг развития процесса распространения активных элементов матрицы в зависимости от заданной начальной конфигурации. Данная игра представляет собой один из примеров ***OC-***подобных игр ***(****Жизнь****,*** *Популяция, Миграция и др****.)*** [88,90,165,536].

После запуска программа выходит на заставку с краткой информацией по сути имитационной игры и инструкцией по формированию начальной ***КФ*** активных клеток поля ***(25x25)-***размера**.** После завершения формирования ***КФ*** и получения желательного числа итераций производится имитация динамики развития активных клеток на базе локальной ***Sigma-***функции**,** реализованной в соответствии с формулой (**3**)**.** По истечении заданного числа итераций на экран выводится полученная ***КФ*** и пользователю предоставляется возможность продолжить итерационный процесс на заданное число шагов модели.

В программную реализацию игры заложен минимум возможностей, базирующийся на организации локальной функции перехода и обеспечении ее параллельного применения ко всей ***КФ*** рабочего ***(NxN)-***поля клеток. В качестве полезного упражнения читателю рекомендуется провести дальнейшее развитие данной программы**,** наполнив ее**,** например, такими возможностями как модификация текущей ***КФ*** с целью отслеживания влияния на динамику случайных повреждений того или иного типа, использование рабочего поле большой размерности для возможности отслеживания динамики на большом количестве итерационных шагов, удобная система визуализации выбираемых областей рабочего поля, обработка особых и аварийных ситуаций, режим прерывания выполнения программы с сохранением текущего состояния в файле с последующей возможностью продолжения работы с момента ее прерывания и др**.** Программные реализации ***OC-***подобных игр и имитационных ***OC-***моделей различного назначения зантересованный читатель может найти в [1-3,6,15,19,20,53-56,85,88,90,150,159-161,167,536].

8. Использование современных мощных ***ПК*** позволяет получать существенное уменьшение временных затрат на имитацию ***OC-***моделей**,** в ряде случаев решая задачи в режиме реального времени**.** Однако ввиду последовательного принципа обработки кардинально изменить ситуацию в общем случае традиционная вычислительная техника ***(BT)*** не может**.** Действительно**,** имитация только одного шага классической ***2-OC*** с индексом со-

седства Мура и текущей ***КФ*** размера ***(n×n)*** требует порядка $(n+2)^2$ операций процессора для получения следующей ***КФ*** имитируемой структуры. При этом, учитываются только крупные операции обработки элементов однородного Z^2-пространства, не учитывая целого ряда дополнительных, но необходимых операций (*например, вычисление следующего состояния текущего z-автомата структуры согласно ее ЛФП и др.*). Для имитации же истории такой ***ОС***-модели на глубину ***p*** шагов требуется не менее $[3n^2+2(p+1)(3n+2p+1)]p/3$ операций процессора (***n*** - *размер ребра минимального квадрата, содержащего начальную* ***КФ***). Приведенная оценка легко получается средствами элементарной математики на основе простых выкладок, получение ее оставляем читателю в качестве полезного упражнения [*рекомендуется воспользоваться известной формулой суммы квадратов целых чисел*].

Следовательно, уже при небольших ***ШС*** и значительной глубине имитируемой динамики ***2-ОС*** временные затраты на ***p*** шагов структуры растут очень быстро, что уже становится заметным и на современных массовых ***ПК***. Естественно, что использование более мощных ***ПК*** хоть и дает более «***радужную***» картину, однако при необходимости имитации действительно сложных ***ОС***-моделей, требующей просмотра большого числа историй (*до* ***500*** *начальных* ***КФ***) на значительную их глубину (*до* ***5000..10000*** *шагов*) возникают сложности и для самых мощных современных ***ПК***. В значительной степени данную проблему можно решать за счет использования современных супер-ЭВМ [6], однако их ресурсы в данном случае будут использоваться весьма неэффективно. Но и такое решение в целом ряде случаев может оказаться малоэффективным для имитации динамики целого ряда сложных ***ОС***-моделей в реальное время.

Решать задачи компьютерной имитации ***ОС***-моделей в реальное время позволяет лишь высокопараллельная ***ВТ*** ненеймановской архитектуры, максимальным образом отражающая специфику функционирования ***ОС***. В настоящее время создан ряд компьютеров, базирующихся на вычислительных ***ОС***-моделях. Одними из первых практических разработок в данном направлении следует отметить клеточные процессоры Легенди и ***ML***-сопроцессоры для ***IBM***-совместимых ***ПК***, созданные группой венгерских исследователей под руководством ***Легенди*** [169-171]. Подробнее с организацией ***ML***-сопроцессоров можно ознакомиться в [5,171]. Использование ***ML***-сопроцессоров позволило существенно повысить быстродействие при решении таких важных классов задач как: распознавание образов, обработка сигналов, управление некоторыми технологическими процессами, все типы клеточных и булевых вычислений, использование некоторых типов операций с базами данных и знаний, экспертными системами и других. Довольно интересная работа проводилась в рамках совместного Немецко-Венгерского проекта [156,175], преследующего цель создания клеточных процессоров на основе вычислительной ***ОС***-модели и их параллельного программного обеспечения. Интересным эмулятором ***ОС***-моделей является виртуальный клеточный процессор [175], а также целый ряд других весьма интересных разработок [242,308,360]. Целый ряд прикладных разработок в этом направлении сделан и в других странах [146]. Так, итальянскими специалистами [410,411] создана вычислительная среда ***CAMEL (Cellular Automata environMent for systEms modeLing)***, имеющая ***ОС***-модель в качестве теоретической основы и использующаяся для моделирования достаточно широкого круга приложений из различных областей.

Именно разнообразными приложениями ***ОС***-моделей к моделированию различных феноменов, явлений и процессов характеризуются в области ***ТОС***-проблематики исследователи из ***Cellular Automata Group*** университета Калабрии (*Италия*). И действительно, сфера приложений ***ОС***-моделей чрезвычайно обширна: от *микроскопического* симулирования физических и биологических феноменов до *макроскопического* симулирования геологических и социальных процессов. И в этом отношении итальянской школой получено немало весьма интересных приложений ***ОС***-моделей к довольно утилитарным задачам, имеющим непосредственную практическую значимость [397-402,410-414]. Так, в

работе [413] предложен детальный симулятор трафика на автостраде на основе вышеупомянутой высокопараллельной системы ***CAMEL,*** базирующейся на ***OC-***модели. Тогда как из отечественных практических разработок по реализации вычислительных ***OC-***моделей следует отметить многочисленные результаты групп исследователей из Таганрога, Новосибирска, Москвы, Ленинграда, Киева и Кишинева [176-178,536].

Другой весьма интересный и перспективный подход к практической реализации вычислительной ***OC-***модели предложили ***Н. Марголус*** и ***Т. Тоффоли,*** создав серию так называемых *машин клеточных автоматов* ***(Cellular Automata Machines – CAM)*** [150,165]. Модель ***CAM-6*** представляет собой машину клеточных автоматов, предназначенную для экспериментального исследования относительно простых ***OC-***моделей. Она представляет собой среду для интерактивных исследования и демонстрации ***OC-***моделей в режиме реального времени**.** С популярным описанием модели и примерами ее использования можно ознакомиться в превосходной книге [150]. Последней моделью серии является ***CAM-8,*** технически представляющая собой систолический массив процессоров, симулирующий параллельную архитектуру ***SIMD-***типа [6]. В настоящее время модель выпускается фирмой ***Step Research*** и ее подробное описание можно найти в статье [165]**.** Использование модели ***CAM-8*** оказалось довольно эффективным при моделировании целого ряда достаточно сложных задач**:** гидродинамики, экологии**,** обработки образов**,** изучения математических свойств различного типа ***OC-***моделей**,** физического моделирования**,** получения специальных эффектов и др. С перспективами развития данного направления в ***TOC-***проблематике можно ознакомиться в монографии [366].

В связи с успехами микроэлектроники и нанотехнологии ряд авторов уже сейчас предлагают практические подходы к реализации перспективных сверхбольших интегральных схем на основе концепции ***OC-***моделей, которые могут быть разработаны в ближайшее время. В связи с развитием технологии интегральных схем ***(****где сама специфика производства такова****,*** *что там удобно создавать устройства итеративной архитектуры****)*** постоянно растет интерес к ***TOC-***проблематике. Клеточная логика имеет дело с математическими моделями и техникой для анализа и синтеза цифровых сетей на основе вычислительных ***OC-***моделей, но из-за обширности данной тематики ее рассмотрение выходит за рамки настоящей монографии и читатель отсылается к многочисленным работам [536].

9. Элементы программирования ***OC-***моделей на языке параллельных подстановок ***(ПП)*** проиллюстрируем на простом примере классической ***1-OC,*** моделирующей работу произвольной машины Тьюринга ***(MT).*** Однако предварительно кратко поясним принцип функционирования ***MT.*** Понятие мащины Тьюринга ***(MT)*** достаточно прозрачно и состоит в следующем ***(****детальнее с* ***MT-****проблематикой на вполне доступном уровне можно ознакомиться в книге* [260]***).*** Классическая ***MT*** состоит из трех компонент (рис. ***6).***

(1) Бесконечная в обе стороны лента разбита на ячейки**,** содержащие строго по одному символу из некоторого конечного алфавита $S=\{\square, s_1, s_2, ..., s_n\}$**,** называемого внешним алфавитом ***MT.*** *Внешний* алфавит содержит специальный □-символ, идентифицирующий *пустую* ячейку ленты ***(****в предположении****,*** *что лента бесконечна в обе стороны****).***

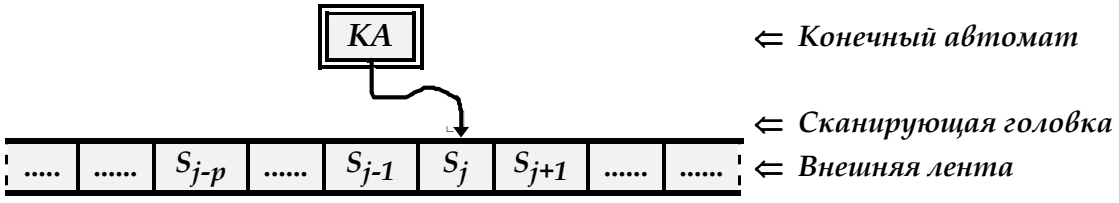


Рис. 6. Принципиальная схема абстрактной машины Тьюринга (MT).

Словом, записанным на ленте**,** будем полагать ориентированную слева направо конфигурацию всех состояний ячеек**;** при этом, рассматриваться будет только множество всех

конечных слов, т.е. слов, имеющих конечное число вхождений символов s_k ($k=1 .. n$). Не нарушая общности, внешнюю ленту машины можно полагать и конечной, но с возможностью при необходимости подстраивания пустых ячеек слева и справа. Ленту машины можно рассматривать в качестве внешней памяти ***МТ***, а ее ячейки можно для удобства тем или иным способом перенумеровывать целыми числами.

(2) Конечный автомат (***КА***) машины представляет собой устройство, находящееся в каждый дискретный момент времени ($t=0,1,2,3,...$) в некотором состоянии из конечного множества $Q=\{q_0,q_1,q_2, ..., q_m\}$, где q_0-состояние определяет останов ***МТ*** и называется *заключительным*. При этом, множества ***S*** и ***Q*** не имеют общих символов, т. е. $S \cap Q = \emptyset$. ***КА*** наделен внутренней памятью, содержащей программу работы ***МТ***, и *устройством управления* (***УУ***), обеспечивающим механизм выполнения всех допустимых машиной операций. ***Q***-множество символов называется *внутренним* алфавитом ***МТ***; в дальнейшем ***МТ*** с внешним ***S*** и внутренним ***Q*** алфавитами будем обозначать как $МТ^s_q$; $\#S=s$ и $\#Q=q$, где $\#A$ – мощность (*количество элементов*) произвольного конечного ***A***-множества.

(3) Сканирующая головка (***СГ***) за единичный момент времени (*такт машины*) может сдвигаться вправо/влево на одну ячейку ленты и изменять состояние сканируемой ею ячейки; ***СГ*** может оставаться и неподвижной любое число тактов машины.

10. Работа $МТ^s_q$ происходит в дискретные моменты времени и управляется ***УУ*** конечного автомата, а именно: в зависимости от внутреннего ***q***-*состояния* и ***s***-*состояния* сканируемой ячейки *внешней* ленты производится в общем случае изменение обоих состояний и сдвиг сканирующей головки. Если на некотором шаге ***КА*** переходит в q_0-состояние, то $МТ^s_q$ переходит в заключительное состояние и останавливается, завершая вычисление. ***Состоянием*** (*или конфигурацией*) $МТ^s_q$ называется последовательность вида, а именно:

$$□\, s_{j-d} \,\ldots..\, s_{j-1} s_j q_j s_{j+1} s_{j+2} \,\ldots..\, s_{j+p}\, □ \qquad (4)$$

состояний всех ячеек внешней ленты и внутренним состоянием ***КА***; q_j-символ внутреннего состояния следует за состоянием сканируемой ячейки ленты ($j=-\infty .. +\infty$); p,d – натуральные числа и $□ \in S$ – вспомогательный символ, идентифицирующий пустую клетку ленты. Далее предполагается, что существуют $МТ^s_q$ с любыми непересекающимися алфавитами ***S*** и ***Q***, и что машину можно привести в начальный момент $t=0$ в любую конфигурацию вида (**4**) и поместить во внутреннюю память программу ее работы.

Следовательно, функционирование $МТ^s_q$ формально состоит в переработке конечных конфигураций вида (**4**) в конфигурации того же вида; завершается функционирование $МТ^s_q$ по достижении конфигурации, содержащей *заключительное* внутреннее q_0-состояние, в противном случае машина работает бесконечно и результат вычисления полагается неопределенным. В свете сказанного о ***КА*** работа машины определяется согласно заданной ей программы, содержащей конечное число команд следующего вида:

$$s_k q_k \Rightarrow s`_k q`_k \{Z_k\} \quad s_k, s`_k \in S; \;\; q_k, q`_k \in Q; \;\; Z_k \in \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\} \quad (k= -\infty .. +\infty) \qquad (5)$$

имеющих следующий смысл: если в некоторый момент времени $t \geq 0$ ***КА*** имеет внутреннее состояние q_k, головка сканирует ***k***-ю ячейку ленты с s_k-символом, то в следующий ($t+1$)-момент времени ***УУ*** изменяет символ в ячейке на $s`_k$, внутреннее состояние ***КА*** на $q`_k$ и подвергает ***СГ*** сдвигу $\{\rightarrow$ - *вправо*, $\leftarrow$ - *влево*, $\uparrow$ - *оставляет на месте*$\}$. Таким образом, $МТ^s_q$ считается заданной при указании для нее алфавитов ***S*** (*с пустым* $□$-*символом*), ***Q*** (*с заключительным* q_0-*состоянием*) и программы работы с командами вида (**5**); при этом, каждая команда выполняется за один такт $МТ^s_q$-машины [260].

11. Моделирующую произвольную MT^s_q классическую ***1-OC*** определяем с алфавитом $A = S \cup Q \cup Q^*$ (*Q^* получается из **Q-**алфавита заменой всех его q_j-символов на символы q_j^*)* и индексом соседства Неймана-Мура $X=\{-1,0,1\}$**.** Тогда как ***ЛФП ОС-***модели определяется следующим набором ***параллельных подстановок (ПП),*** а именно:

$\square\square\square \Rightarrow \square$ $\quad s_i s_j s_k \Rightarrow s_j$ $\quad s_i s_j \square \Rightarrow s_j$ $\quad s_i \square\square \Rightarrow \square$ $\quad \square\square s_k \Rightarrow \square$ **(6)**

$\square s_j s_k \Rightarrow s_j$ $\quad (s_i, s_j, s_k, s`_k \in S;\ \ q_k, q`_k \in Q;\ \ q^*, q`^*_k \in Q^*)$

$s_{j-1} s_j q_j \Rightarrow q`_j$ $\quad s_j q_j s_{j+1} \Rightarrow s`_j$ $\quad q_j s_{j+1} s_{j+2} \Rightarrow s_{j+1}$ **(7)**

$s_{j-1} s_j q_j \Rightarrow s`_j$ $\quad s_j q_j s_{j+1} \Rightarrow q`^*_j$ $\quad q_j s_{j+1} s_{j+2} \Rightarrow s_{j+1}$ **(8)**

$s_{j-1} s`_j q`^*_j \Rightarrow s`_j$ $\quad s`_j q`^*_j s_{j+1} \Rightarrow s`_{j+1}$ $\quad q`^*_j s_{j+1} s_{j+2} \Rightarrow q`_j$

$s_{j-1} s_j q_j \Rightarrow s`_j$ $\quad s_j q_j s_{j+1} \Rightarrow q`_j$ $\quad q_j s_{j+1} s_{j+2} \Rightarrow s_{j+1}$ **(9)**

При этом, $\square$**-**символ покоя моделирующей ***1-OC*** соответствует пустому символу MT^s_q**.**

Используя систему ***ПП*** (**6**) **..** (**9**)**,** нетрудно убедиться, что взяв в качестве текущей ***КФ*** определенной таким образом ***1-OC*** конфигурацию (**4**), ***ГФП,*** определяемая группой ***ПП*** (**6**), (**7**) и (**6**), (**9**) за один шаг структуры переводят ее соответственно в ***КФ*** вида**:**

$$\square s_{j-1} q`_j s`_j s_{j+1} s_{j+2} \square \quad u \quad \square s_{j-1} s`_j q`_j s_{j+1} s_{j+2} \square$$

Тогда как группа ***ПП*** (**6**), (**8**) за один шаг переводит ***КФ*** (**4**) в конфигурацию вида**:**

$$\square s_{j-1} s`_j q`^*_j s_{j+1} s_{j+2} \square \qquad \textbf{(10)}$$

и только на втором шаге переводит ***КФ*** (**10**) уже в необходимую конфигурацию вида**:**

$$\square s_{j-1} s`_j s_{j+1} q`_j s_{j+2} \square$$

Таким образом, запрограммированная нами на языке ***ПП*** классическая ***1-OC*** моделирует MT^s_q в *реальное* время с не худшим, чем в ***2*** раза замедлением. Моделирующая структура имеет индекс соседства Неймана-Мура и ***(s+2q)-***мощность ***A-***алфавита. Нами в дальнейшем будут рассмотрены и другие примеры программирования классических ***ОС-***моделей на языке ***ПП,*** что позволит более ясно представить особенности параллельного программирования на низком уровне в среде одной из формальных моделей высокопараллельной обработки информации**.** В качестве полезного упражнения читателю предлагается запрограммировать для вычисления в среде классических ***1-OC*** задач симметрического обращения и удвоения любой конечной ***КФ.*** Интересные примеры программирования в среде классических ***1-OC*** известных последовательных алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах и целого ряда других задач, исследующих отдельные вопросы поведения ***ОС-***моделей, можно найти в наших работах [5,19,20,53-56,88,90].

Язык параллельных подстановок ***(ЯПП)*** может служить в качестве примера алгебраического языка описания и анализа параллельных микропрограмм [12,173], также являющегося лингвистическим формализмом довольно узкого класса вычислительных ***ОС-***моделей и базирующегося на понятии системы параллельных подстановок, определяющих локальную функцию перехода классических ***ОС-***моделей.

Однако уже и из приведенного примера можно сделать вполне определенный вывод о том, что сложность параллельного программирования в среде ***ОС-***моделей достаточно сложных задач представляется значительно сложнее программирования их на вычислительных моделях сугубо последовательного действия. Объяснить это можно рядом обстоятельств, из которых отметим, на наш взгляд, основное**.** Традиционное программирование носит сугубо последовательный *(пооператорный)* характер, позволяя разработчику в процессе достижения основной цели задачи на отдельных этапах концентрировать свое внимание на весьма ограниченных *(локальных)* ресурсах вычислительной среды. И каждый этап *(оператор)* программы использует информацию *(вход)* из относительно ог-

раниченной *(по сравнению со всей задачей)* локальной области. При этом, проблемы синхронизации процессов относительно нечасты и разрешаются, например, довольно простым механизмом семафоров *(флажков)*. Таким образом, программирование задачи в среде последовательных вычислительных моделей сводится к созданию последовательных *(возможно, с конструкциями цикла и ветвления)* цепочек локального характера операторов, выполнение которых и обеспечивает достижение общей цели задачи [6,88,90,536].

В случае высоко параллельных вычислительных ***ОС-***моделей каждый последовательный шаг в эволюции решаемой задачи программируется сугубо параллельным образом на основе локальных ***ПП***, действующих одновременно и синхронно на всем вычислительном пространстве, что требует глобальной синхронизации. Следовательно, разработчик должен не только руководствоваться конечной целью задачи, но и постоянно отслеживать динамику *всей* вычислительной среды *(ресурсов)*, функционирующей сугубо параллельным синхронным образом. Вместе с тем, быть может сложность параллельного программирования носит во многом субъективный характер, обусловленный традиционностью используемых нами последовательных вычислительных моделей *(вопреки параллельному принципу функционирования большинства клеточных систем, включая и человеческий мозг)*, а также укоренившейся методикой решаемых нами на них задач.

Использование параллельных моделей обработки информации должно оказать *(и уже начинает оказывать)* прогрессирующее влияние на формирование параллельного образа мышления, что позволит существенно повысить интеллект естественных и искусственных систем обработки информации *(и, прежде всего, за счет резкого сокращения временных издержек)*. Высокий параллелизм обработки информации, заложенный в такой сложной системе клеточной организации как человеческий мозг, наилучшим образом отвечает ***концепции параллельного мышления***, которая для подавляющего числа людей происходит неосознанно, а поэтому не может дать всего обеспечиваемого им эффекта. Вместе с тем, переход на осознанные модели параллельного мышления может оказаться не менее сложным эволюционным развитием человека, чем вся его предыдущая история становления традиционного последовательного интеллекта.

Однако, искусственные интеллектуальные системы обработки информации, базирующиеся на параллельных вычислительных моделях *(и формальных, и практически реализованных)* должны существенно сократить такой эволюционный процесс, приблизив его к уровню революционного пересмотра многих основных современных концепций мышления. И уже не человек будет приспосабливать архитектуру автоматизирующих его *интеллектуальный* труд вычислительных средств к, вообще говоря, не естественному для его мозга последовательному принципу обработки информации, а формальные высоко параллельные вычислительные модели и их практические реализации должны способствовать его повороту к более естественному для него параллельному образу мышления, существенно увеличивая загрузку ресурсов мозга и резко расширяя границы человеческого интеллекта. Работа с ***ОС-***моделями, в частности, и стимулирует такой процесс.

И философские, и гносеологические аспекты данной, сложнейшей во всех отношениях проблемы, здесь не обсуждаются, но требуют самого пристального внимания и серьезной проработки. И здесь мы должны в полной мере руководствоваться принципом опережающего обучения, когда глобальная проблема еще задолго до обретения ею живого очертания должна пройти всестороннее осмысление и ознакомление с ней достаточно широких слоев общества. Подготовленное общество более естественно и легко в последующем воспринимает осмысленные идеи и концепции, внедряемые затем в его жизнь значительно быстрее, безболезненнее и без ненужных издержек различного характера. И здесь с полным основанием можно перефразировать одно широко известное изречение – Знание определяет сознание, хотя, конечно, и бытие играет далеко не последнюю

роль. И сопоставление обоих изречений в ретроспективе истории человечества может, в свою очередь, дать немало глубоких философских осмыслений.

12. Таким образом, понятие ***классической d-OC*** интуитивно представляется весьма простым и в этой связи возникает вопрос о степени его общности, т.е. насколько широко это понятие допускает расширения, не выводящие за рамки того или иного исследуемого феномена структуры или за рамки определенным образом заданного критерия эквивалентности (*своего рода свойство устойчивости понятия*). С этой целью был проведен анализ целого ряда расширений классического понятия ***d-OC*** относительно их динамических свойств [38], результаты которого показали, что несмотря на относительно жесткие критерии эквивалентности динамики двух структур (*положенные в основу сравнительного анализа*) классическое понятие обладает достаточной степенью общности, что позволяет рассматривать его в качестве одного из базовых, составляющих основу ***TOC-***концепции во всей ее общности и, вместе с тем, всей его разноплановости.

13. Из вышесказанного следует, что понятие классических $d\text{-}OC=<Z^d,A,\tau^{(n)},X>$ обладает вполне приемлемой степенью общности для многих важных приложений (*несмотря на всю его простоту*), а также представляет значительный интерес в качестве самостоятельного математического объекта, являющегося важной составной частью как абстрактных, так и прикладных моделей параллельной обработки информации и вычислений. И, если компоненты Z^d, A и X структуры являются довольно простыми и прозрачными, то о сложности ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определяющей собственно динамику ***OC-***моделей, пока ничего не говорилось. Данный вопрос удобнее всего оказалось рассматривать в терминах теории рекурсивных функций [3,5]. Из определения классической ***d-OC*** несложно убедиться, что она представляет собой формальный параллельный алгоритм переработки конечных ***КФ*** (*слов*) из словарного множества $C(A,d,\phi)$ посредством ***ГФП***, которую можно рассматривать как *словарную функцию*, всюду определенную на множестве $C(A,d,\phi)$. На основе данного подхода было доказано [5], что: ***Произвольная ГФП в классической d-OC примитивно рекурсивна.*** Данный результат определяет не только место ***ГФП*** в иерархии всех рекурсивных функций, но и совместно с отмеченной простотой остальных компонент структуры позволяет говорить о том, что определяемый ими такой простой объект, как ***классические d-OC***, обладает достаточно большой степенью общности и весьма сложной динамикой, позволяющей моделировать достаточно широкий класс явлений, процессов и феноменов, имеющих место в целом ряде разделов науки и техники. Наряду с этим, он представляет несомненный интерес для исследования как самостоятельная формальная модель параллельной обработки информации и вычислений. В рамках же классических ***d-OC*** выделяются специальные подклассы структур со специфическими характеристиками, такие как ***OC*** с ***рефрактерностью***, ***памятью*** и ряд других, позволяющие более эффективно моделировать целый ряд весьма интересных процессов и объектов. Некоторые из этих типов структур рассматриваются нами несколько ниже.

1.2. Основные типы однородных структур

На сегодня с той или иной степенью интенсивности используется целый ряд расширений и обобщений определенного выше понятия классических ***OC-***моделей. Однако далеко не каждое расширение классического понятия ***d-OC*** оставляет нас в рамках избранных ***критериев эквивалентности*** структур. Существенными обобщениями классического понятия являются полигенные детерминированные, недетерминированные и стохастические ***OC-***модели; тогда как в качестве широко используемых расширений – ***OC-***модели с памятью, с рефрактерностью, на разбиении и др. В настоящем разделе кратко

остановимся лишь на пяти типах ***OC-***моделей**,** представляющих значительный интерес со многих точек зрения, а именно**:** ***полигенные, структуры с памятью*** и ***рефрактерностью, OC*-структуры,*** а также ***структуры на разбиении,*** ориентированные на моделирование физических приложений, прежде всего, ввиду свойства их обратимости.

Для заданных компонент ***A, Z^d*** и ***X*** множество ***G*** допустимых параллельных преобразований есть любое непустое подмножество множества всех ***ГФП,*** определяемых данными тремя компонентами. Если множество ***G*** содержит только одну ***ГФП*** $\tau^{(n)}$**,** то структура ***d-OC=<Z^d,A,$\tau^{(n)}$,X>*** называется ***моногенной,*** в противном случае **–** ***полигенной.*** Моногенная ***d-OC*** называется также ***классической*** структурой, рассмотренной выше. Тогда как для ***полигенной d-OC*** вместо единственной используется более одной ***ГФП*** и для такой структуры в каждый дискретный момент времени ***t>0*** к текущей ***КФ*** применяется одна из ***ГФП G-***множества допустимых функций перехода**.** Среди полигенных ***d-OC*** выделяются три основных подкласса структур**:** ***детерминированные*** *(в каждый момент времени* ***t>0*** *применение* ***ГФП*** *производится по некоторому детерминированному алгоритму)***,*** ***недетерминированные*** *(в случае отсутствия такого алгоритма)* и ***стохастические*** *(****ГФП*** *применяются по некоторому стохастическому закону)***.** В настоящее время наиболее развита теория детерминированных ***OC-***моделей, поэтому ниже более подробно рассматривается именно этот класс структур. Определенные нами структуры ***(моногенные <Z^d,A,$\tau^{(n)}$,X>*** *и* ***полигенные <Z^d,A,G,X>)*** будут основным объектом обсуждения и, в первую очередь, ***моногенные*** или ***классические OC-***модели. Более того, основное внимание уделено вопросам теории классических ***1-OC,*** имея при этом в виду, что базовые параметры ***d, #(A)*** и ***X*** для ***OC-***моделей существенны и образуют иерархию свойств относительно того или иного феномена или поведения структуры. Например, классы ***1-OC*** и ***d-OC (d>1)*** не эквивалентны между собой относительно проблем неконструируемости и алгоритмической разрешимости, конструктивных возможностей и др**.** Подобная ситуация имеет место и для других основных параметров ***OC-***моделей и в данном направлении имеется целый ряд интересных результатов [3,5,9], однако общая картина в данном направлении пока остается не до конца прозрачной [5,88,90,536].

1. Таким образом**,** в общем случае ***полигенная d-OC≡<Z^d,A,G,Ω>*** отличается от моногенной *(классической)* структуры ***<Z^d,A,$\tau^{(n)}$,X>*** тем**,** что *первая* в каждый дискретный момент времени ***t>0*** допускает использование в качестве ***ГФП*** любой из фиксированного конечного ***G-***множества ***d-***мерных функций**,** определенных в ***A-***алфавите**,** в соответствии с некоторым **Ω-**алгоритмом их применения к текущей ***КФ*** однородного пространства Z^d**,** т. е. для нее история конфигураций принимает следующий вид, а именно**:**

$$< c_o > [G] = c_o \tau_1^{(n_1)} \tau_2^{(n_2)} \tau_3^{(n_3)} \ldots\ldots \tau_j^{(n_j)} \ldots\ldots ; \quad \tau_j^{(n_j)} \in G \quad (j = 1..m)$$

Множество ***G*** содержит конечное число ***d-***мерных ***ГФП,*** определенных в одном и том же ***A-***алфавите, но каждая из этих функций в общем случае может иметь собственный индекс соседства. В зависимости от типа используемого **Ω-**алгоритма различают ***детерминированные, недетерминированные*** и ***стохастические*** полигенные ***OC-***модели. Для детерминированной полигенной ***d-OC*** характерно наличие строго определенного **Ω-**алгоритма, определяющего порядок применения на каждом шаге к текущей ***КФ*** структуры ***ГФП*** из заданного конечного ***G-***множества допустимых глобальных функций.

Простым примером детерминированной полигенной структуры может служить ***1-OC ≡ <Z,A={0,1},G={$\tau_1^{(2)}$, $\tau_2^{(3)}$}, Ω=$\tau_1^{(2)}\tau_2^{(3)}\tau_1^{(2)}\tau_2^{(3)}$ ...>,*** где ***ГФП*** $\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(3)}$ определяются ***ЛФП*** соответственно с индексами соседства $X_1=\{0,1\}$ и $X_2=\{-1,0,1\}$**:**

$$\sigma_1^{(2)}(s_1,s_2) = s`_1 = s_1 + s_2 \pmod 2 \qquad \sigma_2^{(3)}(s_1,s_2,s_3) = s`_2 = s_1 + s_2 s_3 \pmod 2$$

Порядок применения ***ГФП*** из ***G*-**множества допустимых функций к каждой начальной ***КФ co*** строго детерминирован и определен **Ω-**алгоритмом, суть которого особого пояснения не требует. В данном случае **<*co*>**[*G*]**-**последовательность *(история)* ***КФ*** на глубину ***20*** шагов при ***co*=□*11*□** принимает следующий весьма простой вид, а именно**:**

co **=**	□□***11***□□	***c10*** **=**	□□***1001100101***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c1 **=**	□□***101***□□	***c11*** **=**	□□***11010101111***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c2 **=**	□□***101***□□	***c12*** **=**	□□***111010110011***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c3 **=**	□□***1111***□□	***c13*** **=**	□□***1001111010101***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c4 **=**	□□***10011***□□	***c14*** **=**	□□***1010011010101***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c5 **=**	□□***110101***□□	***c15*** **=**	□□***111101011111111***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c6 **=**	□□***1110101***□□	***c16*** **=**	□□***10011011010000011***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c7 **=**	□□***10011111***□□	***c17*** **=**	□□***1101011010000101***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c8 **=**	□□***10100011***□□	***c18*** **=**	□□***11101111010000101***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c9 **=**	□□***111100101***□□	***c19*** **=**	□□***10011000111000111***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c10 **=**	□□***1001100101***□□	***c20*** **=**	□□***10111001011011001***□□

В общем случае детерминированная *полигенная* ***d-OC*** определяется **Ω-**алгоритмом, в качестве которого выступает некоторая рекурсивная функция ***N*=Ω*(t) (t=1,2,...)*,** возвращающая номер ***ГФП*** из ***G*-**множества, элементы которого определенным образом занумерованы. Так, для рассмотренного выше примера детерминированной ***1-OC*** **Ω-**функция принимает весьма простой вид**:** **Ω*(t)=1+t (mod 2)+1*** и ***G*=**$\{\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(3)}\}$**.** Так как **Ω-**функция ***рекурсивна*,** то она вычислима на соответствующей машине Тьюринга ***(MT*^s_q*)*** [180,181]. Учитывая же частичную рекурсивность и каждой ***ГФП*** из ***G*-**множества [5,53], нетрудно убедиться, что для каждой генерируемой детерминированной полигенной структурой ***1-OC*** **<*co*>**[*G*]**-**последовательности ***КФ*** существует ***MT*^s_q*,*** симулирующая эту же последовательность ***КФ.*** Но так как любая ***MT*^s_q** моделируется в реальное время классической ***1-OC*** с индексом соседства Неймана-Мура *(*раздел ***1.1)*,** то можно получить весьма интересное следствие *(с обобщением на* ***d****-мерный случай)****: Любая детерминированная полигенная d-OC ≡ <Z^d, A, G, Ω> моделируется соответствующей классической d-OC.*** Предложенный подход позволяет получить неконструктивное доказательство результата**,** тогда как конструктивным путем можно получать количественные оценки основных параметров *классической* структуры, моделирующей *детерминированную полигенную* структуру.

Недетерминированные полигенные d-OC наряду с самостоятельным интересом в качестве математического объекта оказываются весьма полезными при исследовании методов и принципов повышения надежности и живучести сложных клеточных систем как жи-

вой, так и неживой природы. С интересным обсуждением данной проблематики можно ознакомиться в работах [5,53-56]. Здесь же этот вопрос кратко рассмотрим лишь в связи с понятием общности *классических* ***OC-***моделей. Будем называть ***недетерминированной*** структуру $SH(d,a,n,N)=<Z^d,A,G,X>$, если в каждый момент времени $t > 0$ к текущей ***КФ*** $c_t \in C(A,d)$ применяются поочередно все ***ГФП*** из ***G-***множества мощности N $(\#G=N)$ допустимых функций перехода; при этом, порядок применения функций строго не определяется. Показано [53], что определенная таким образом *недетерминированная* структура $SH(d,a,n,N)$ моделируется классической ***d-OC*** с индексом соседства Мура, еще раз подтверждая вполне достаточную степень общности классического понятия ***OC-***моделей. С обобщением понятия ***d-OC*** на стохастический случай открываются не только новые возможности для приложений, но и предлагаются для исследования интересные математические объекты стохастической и квазистохастической природы.

Если *детерминированные* и *недетерминированные* полигенные ***OC-***модели характеризуются соответственно наличием **Ω-**алгоритма и отсутствием его для применения на каждом шаге структуры соответствующей ***ГФП*** из ***G-***множества допустимых глобальных функций перехода, то для ***стохастических*** полигенных ***OC-***моделей **Ω-**алгоритм определяется некоторой *функцией распределения вероятностей*, приписывающей каждой функции $\tau_j^{(n_j)}$ из ***G-***множества вероятность (p_j) ее применения в каждый дискретный момент $t>0$ времени к текущей ***КФ*** структуры, а именно:

ГФП:	$\tau_1^{(n_1)}$	$\tau_2^{(n_2)}$	$\tau_3^{(n_3)}$	.....	$\tau_j^{(n_j)}$	.....	$\tau_m^{(n_m)}$
P:	p_1	p_2	p_3	.....	p_j	.....	p_m

$\Sigma p_j=1$

В целом ряде случаев можно провести вполне удовлетворительные аналогии между стохастическими ***d-OC*** и различными многокомпонентными объектами *стохастической* либо *квазистохастической* природы. В этой связи нами были определены два типа стохастических ***d-OC (гетерогенные и гомогенные)*** и исследовано их асимптотическое поведение [3,5,21]. В частности, было получено условие *асимптотического* приближения динамики *гетерогенных* структур к классическим. Целый ряд интересных результатов по стохастическим ***OC-***моделям получен и другими исследователями. Так, на основе специального подхода к моделированию одних стохастических ***d-OC*** другими того же класса ***А. Матевосяном*** [182] доказано существование универсальных стохастических структур и исследованы оценки соответствующих сложностных и временных издержек моделирования. Показано, что для определенных подклассов ***W*** стохастических ***OC-***моделей существует универсальная бинарная стохастическая ***d-OC***, моделирующая любую структуру из ***W*** в реальное время. Интересные вопросы идентификации стохастических конечных ***OC-***моделей изучались ***А. Адаматским*** [161,183]. Обсуждение проблематики *стохастических* ***OC-***моделей и целого ряда интересных результатов в данном направлении заинтересованный читатель может найти в работах [3,5,15,55,90,143,147,149,157,160,161,166,308,536], содержащих ссылки на достаточно большое количество оригинальных источников.

До сих пор мы рассматривали *(да и в дальнейшем также будем рассматривать)* исключительно синхронные ***OC-***модели, характеризуемые тем, что на каждом их шаге применяется единая для всего Z^d***-***пространства структуры ***ГФП*** из фиксированного ***G-***множества; для классических ***OC-***моделей ***G-***множество содержит единственную ***ГФП***. Однако с теоретической точки зрения и ряда приложений представляют интерес и *асинхронные* ***OC-***модели, допускающие использование на каждом шаге структуры в различных областях Z^d***-***пространства структуры разных ***ЛФП (ГФП)*** из некоторого фиксированного ***G-***множества. На наш взгляд, *асинхронные* ***OC*** могут представить определенный интерес в плане исследования космогонических моделей Вселенной, однако на сегодня нам не известны сколько-нибудь интересные результаты по такого класса структурам.

При нашем же подходе (*подобно случаю классических конечных автоматов*) в качестве состояния ***OC-***модели понимается конфигурация ее Z^d**-**пространства. А так как она перерабатывается ***ГФП,*** то именно относительно глобальной функции перехода мы и определяем детерминированность**,** недетерминированность и стохастичность**.** Однако эти понятия можно определять и на уровне ***ЛФП,*** но в таком случае мы будем иметь дело с *асинхронными* ***OC-***моделями**,** когда на Z^d**-**пространстве нарушается, в общем случае, сам принцип универсальности локальных законов в каждый момент времени $t>0$**.** Класс же *асинхронных* ***OC-***моделей представляет значительный как теоретический**,** так и прикладной интерес, однако и теоретические результаты по нему не столь внушительны ввиду сложности исследования такого типа *недетерминированных* и *стохастических* клеточных систем. Большинство полученных здесь результатов носит эмпирический характер.

2. В последнее десятилетие наметился значительный интерес к разработке новых поколений вычислительных систем, исповедующих ***ненеймановскую*** параллельную модель вычислений [6]. Были реализованы интересные практические разработки в данном направлении [5,6,136,150,156,165,169,178,366,394]**,** базирующиеся на вычислительных ***OC-***моделях, из которых некоторые уже упоминались. С другой стороны, классические ***d-OC*** довольно громоздки для адекватного моделирования целого ряда сложных параллельных вычислительных устройств и алгоритмов**.** В этой связи был определен специальный подкласс ***d-OC с памятью (d-ОСП),*** которые в определенной мере подобны параллельным вычислительным устройствам с памятью [5,68-72,88,90,536].

Каждый единичный автомат в ***d-ОСП*** имеет конечную ***память*** глубиной ***P*** и может непосредственно получать информацию от своих соседей в структуре согласно индекса ***X*** соседства**.** Память автомата представляет собой ***P-***позиционный регистр, состояния каждой позиции которого являются элементами из алфавита $M=\{m_1, m_2, ..., m_k\}$ (рис. 7**).**

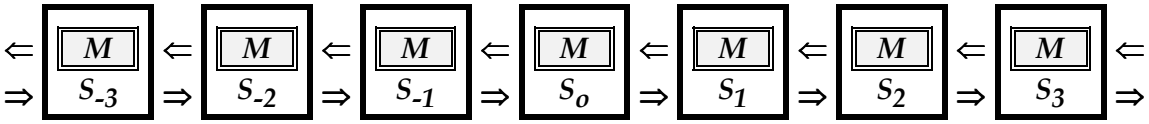


Рис. 7. Принципиальная организация одномерной ОС с памятью (1-ОСП).

Каждый автомат в ***d-ОСП*** может синхронно изменять свое состояние и содержимое ***M-***памяти в дискретные моменты $t>0$ времени как функции предыдущих состояний ***(F)*** и содержимого памяти ***(R)*** автоматов своего шаблона соседства, определяемого индексом соседства ***X*****.** По определению ***d-ОСП*** есть упорядоченная семерка $<Z^d,A,M,P,X,F,R>$**,** где Z^d**,*****A,X*** определяются аналогично случаю классических ***d-OC, M –*** алфавит регистровой памяти ***P-***глубины, ***F*** и ***R –*** упомянутые дискретные функции перехода. Функционирование единичного автомата структуры ***d-ОСП*** производится в дискретной шкале времени ***t=1,2,3, ...*** согласно следующим дискретным уравнениям, а именно**:**

$$\begin{cases} S(z,t+1) = F(S_z^X(t), M(z,t)) & S(z,t+1) \in A \\ M(z,t+1) = R(S_z^X(t), M(z,t)) & M(z,t+1) \in M \end{cases} \qquad \textbf{(11)}$$

где $z \in Z^d$ **–** произвольный единичный автомат структуры**;** $S(z,t) \in A$ **–** состояние ***z-***автомата**;** $S^X_z(t)$ **–** конфигурация шаблона соседства ***z-***автомата и $M(z,t)$ **–** содержимое его ***M-***памяти в момент времени $t>0$**.** Автомат структуры *дискретно* и *синхронно* изменяет свои ***S-***состояние и состояние ***M-***памяти в зависимости от состояний его ***M-***памяти и ***КФ*** состояний автоматов его шаблона соседства в предыдущий ***(t-1)-***момент времени.

На наш взгляд, структуры типа ***d-ОСП*** могут служить как формальной основой для моделирования в их среде многих параллельных дискретных объектов и алгоритмов, так и представляют достаточно интересный самостоятельный формальный объект исследо-

вания. При этом, нетрудно убедиться, что определенные таким образом ***d-ОСП*** структуры (**11**) представляют собой *подкласс* класса всех классических ***ОС***-моделей, у которых определена соответствующая двухуровневая структуризация состояния единичного автомата – внутреннее ***S***-состояние и состояние его регистровой ***M***-памяти.

Действительно, каждая структура $d\text{-}ОСП \equiv \langle Z^d, A, M, P, X, F, R\rangle$, функционирование которой определяется системой дискретных уравнений (**11**), строго эквивалентна [5,53] соответствующей ей классической структуре $d\text{-}ОС \equiv \langle Z^d, A^*, \tau^{(n)}, X\rangle$, для которой имеют место соотношения $A^* = A \times M^p$ и $\#(A^*) = ak^p$. Вместе с тем подобная структуризация состояния единичного автомата в ***d-ОСП*** позволяет достаточно эффективно решать на ***ОСП***-подобных моделях ряд специфических прикладных задач, в первую очередь связанных с исследованием ***ВТ*** высокопараллельного действия. И если в рамках общей теории классических ***d-ОС ОСП***-модели не представляют особого интереса, то *структуризация* состояний их единичных автоматов (*подобно случаю рассматриваемых ниже* ***ОС*** *с рефрактерностью*) определяет для них новые интересные прикладные возможности. В то же время на сегодня отсутствует достаточно развитая прикладная теория ***d-ОСП***.

Интересным подклассом ***d-ОСП*** являются структуры, определяемые следующими условиями: ***(1)*** алфавит ***M***-памяти совпадает с ***A***-алфавитом внутренних состояний единичного ***z***-автомата структуры; ***(2)*** ***M***-память ***P***-глубины имеет *стэковую* организацию; ***(3)*** обновление текущего внутреннего состояния ***z***-автомата сопровождается одновременным помещением обновленного состояния в ***M***-стэк автомата, выталкивая самое раннее по времени хранящееся в нем состояние; ***(4)*** внутреннее состояние ***z***-автомата в момент $t>0$ является *функцией* конфигураций состояний его шаблона соседства и ***M***-стэка в момент времени $(t\text{-}1)$. Формально функционирование такого типа ***d-ОС*** описывается системой дискретных уравнений следующего общего вида, а именно:

$$\begin{cases} \sigma^{(n+p)}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n | m_1, m_2, m_3, \cdots, m_p) = x^*_1 \\ R^{(p)}(m_1, m_2, m_3, \cdots, m_p) = Sh(x^*_1, m_1, m_2, m_3, \cdots, m_{p-1}) \\ \sigma^{(n+p)}(0,0,0,\cdots,0|0,0,0,\cdots,0) = 0\,; \quad x_n, x^*_1, m_p \in A \\ R^{(p)}(0,0,0,\cdots,0) = Sh(x^*_1, 0,0,0,\cdots,0)\,; \quad (j = 1..n;\ k = 1..p) \end{cases} \qquad (12)$$

Из уравнений (**12**) непосредственно следует, что ***ЛФП d-ОСП*** имеет (*относительно классической*) расширенный набор переменных (*на глубину* ***M***-*стэка*), а ***R***-функция определяет модификацию ***M***-стэка путем его сдвига (*Shift*) с последующим помещением в его начало нового состояния ***z***-автомата. Последние два уравнения системы (**12**) задают определяющие условия для ***0***-состояния покоя ***ОС***-модели с памятью.

В качестве простого примера рассмотрим вопрос моделирования ***1-ОСП*** из этого класса с индексом соседства Неймана-Мура $X = \{0,1,2\}$, ***A***-алфавитом и ***M***-стэком глубины $p = 2$ посредством классической $2\text{-}ОС \equiv \langle Z^2, A^*, \tau^{(r)}, X\rangle$, определяемой следующим образом.

0,2		
0,1		
0,0	1,0	2,0
0,-1	1,-1	2,-1

(a)

	♦:	□	b	b	b	b	b	b	b	□
M:	m_2	□	0	0	0	0	0	0	0	□
	m_1	□	0	0	0	0	0	0	0	□
	КФ:	□	x_1	x_2	x_3	...	x_j	...	x_g	□

$t = 0$

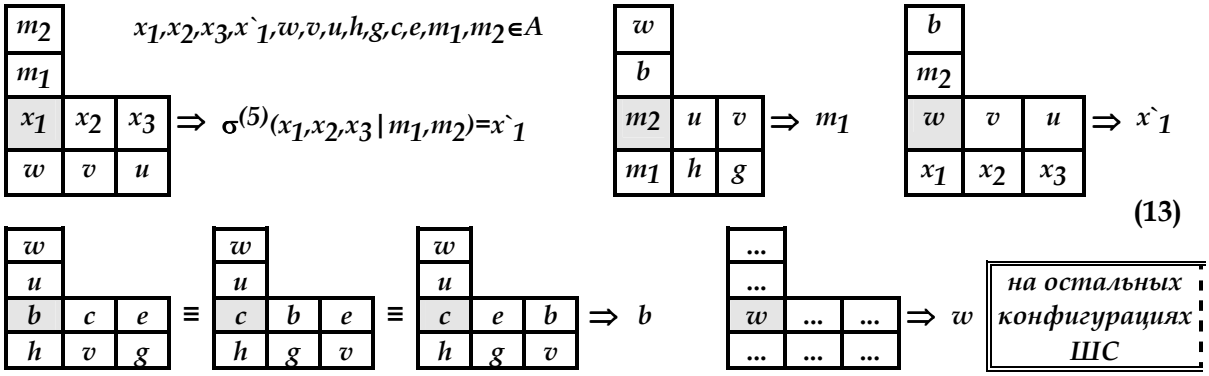
(b)

Рис. 8. ШС (a) и начальная конечная КФ (b) моделирующей классической 2-ОС.

Алфавит A^* моделирующей структуры определяем как $A^* = A \cup \{b\}$ $(b \notin A)$, т.е. расширяем алфавит моделирующей структуры относительно моделируемой на один ***b***-символ. Ин-

декс соседства ***моделирующей*** структуры определяем в виде ***X*={*(0,0),(1,0),(2,0),(0,-1),(1,-1),(2,-1),(0,1),(0,2)*}**, соответствующий ему шаблон соседства ***(ШС)*** представлен на рис. ***8.a*.**

Локальную функцию перехода ***(ЛФП)*** моделирующей классической ***2-ОС*** определяем следующей системой *параллельных подстановок* ***(ПП)*,** а именно**:**



Представляем начальную ***КФ*** моделирующей классической ***2-ОС*** в виде (рис. ***8.b*)**, где**: КФ-**строка определяет текущую конфигурацию внутренних состояний ***z*-**автоматов моделируемой ***1-ОСП; M*-**строки ***(m1,m2)*** определяют конфигурации состояний их стэковой памяти глубины ***p* = 2** и **♦-**строка выполняет маркерные функции **(***три лежащие под ней строки описывают* ***полную КФ*** *моделируемой* ***1-ОСП*).** Тогда нетрудно убедиться, что **(***оставляем это читателю а качестве полезного упражнения*)**,** используя ***ПП*** (**13**)**,** последующая динамика определенной таким образом начальной ***КФ*** (рис. ***8.b*)** в полосе ***M*-** и ***КФ*-**строк будет пошагово **(***строго в реальное время*)** моделировать динамику соответствующей начальной ***КФ*** внутренних состояний и состояний ***M*-**памяти исходной ***1-ОСП*.** Читателю предлагается апробировать описанный алгоритм моделирования и убедиться в справедливости следующего достаточно простого предложения, а именно**:**

***Произвольная 1-ОСП* ≡ <Z^1,*A,M,P,X,F,R*> [*X*={*0,1,2, ..., n-1*}; *где F, R определяются системой уравнений (12)*] *моделируется строго в реальное время посредством классической 2-ОС* ≡ <Z^2, *A*∪{*b*}, $\tau^{(2n+p)}$, *X*> (*b*∉*A*).**

Данный результат обобщается и на общий ***d*-**мерный случай, в чем предоставляем убедиться читателю**.** В качестве еще одного простого примера рекомендуется построить динамику на ***15 .. 20*** шагов некоторой начальной ***КФ*** при условии, что ***A*={*0,1*}** и первое из уравнений в (**12**) принимает следующий вид**:** $\sigma^{(5)}(x_1,x_2,x_3 \mid m_1, m_2) = \sum x_j + \prod m_k \ (mod\ 2)$**.**

3. Наряду с уже представленными ***d-ОСП*** в рамках классических ***d-ОС*** выделяется также и специальный подкласс ***ОС*-**моделей с *рефрактерностью***.** Структура ***d-ОС*** с ***рефрактерностью (d-ОСР)*** представляет собой классическую ***d-ОС*,** чей алфавит внутренних состояний специальным образом *структурирован* ***A*={*0,1*}∪{$\omega_1,\omega_2,\omega_3, ..., \omega_r$}** и чья ***ЛФП*** определяется нижеследующей системой *параллельных подстановок* ***(ПП)*,** назначение каждой из которых достаточно прозрачно и особых пояснений не требует (**14**)**.** Структуры такого типа будем обозначать как ***d-ОСР(r,P)*,** где ***r* –** глубина рефрактерности, ***P* –** порог возбудимости единичного ***z*-**автомата. Алфавит ***A*** внутренних состояний структурирован посредством присвоения его элементам следующих характеристик состояния**:** ***покоя (0), возбуждения (1)*** и ***рефрактерности r-глубины*** {$\omega_1,\omega_2, ..., \omega_r$}**.** Если величина ***r*** постоянна, то имеют место структуры с ***фиксированной*** *глубиной рефрактерности*, в противном случае **–** с ***переменной*.** В целом ряде важных приложений естественно рассматривать глубину переменной рефрактерности в зависимости от величины ***P*-**порога возбуждения ***z*-**автоматов структуры, т.е. ***r* = *r*(*P*)**.** Некоторые довольно интересные результаты в данном направлении можно найти, например, в работах [88,90,536].

$$\begin{cases} \sigma^{(n)}(\varpi_k, x_2, \ldots, x_n) = \varpi_{k+1} \\ \sigma^{(n)}(\varpi_r, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \sigma^{(n)}(1, x_2, \ldots, x_n) = \varpi_1 \\ \sigma^{(n)}(0, 0, \ldots, 0) = 0 \\ \sigma^{(n)}(0, x_2, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow \left(\sum_{x_j=1} x_j \geq P \right) \end{cases} \qquad (14)$$

$$x_j \in A, \;\; k = 1..(r-1); \;\; j = 2..n$$

Суть ***рефрактерности r-глубины*** состоит в том, что возбужденный *(в* ***1****-состоянии)* в момент $t \geq 0$ единичный ***z***-автомат структуры, в течение последующих ее ***r***-шагов ***(период*** *рефрактерности)* будет находится в состоянии *рефрактерности*, переходя с одного уровня рефрактерности на другой. По истечении *периода рефрактерности* ***z***-автомат переходит в ***0****-состояние покоя*, становясь вновь *восприимчивым* для последующего возбуждения.

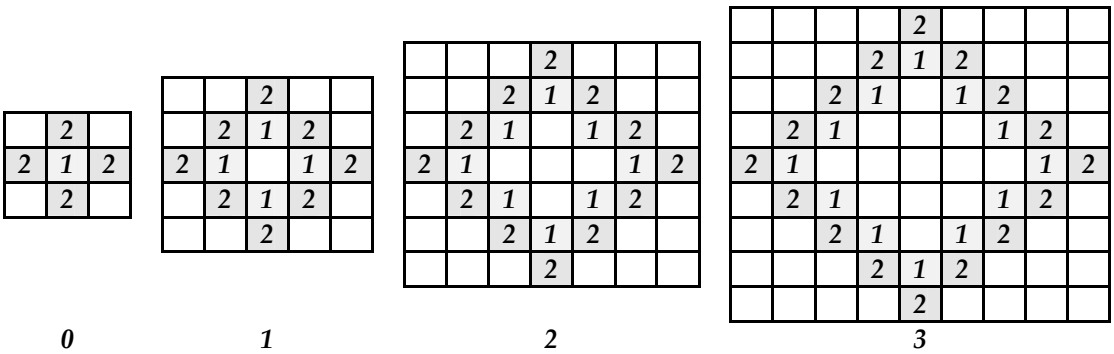
В качестве простого примера ***OC***-моделей с *рефрактерностью* рассмотрим модель Гринберга-Гастингса, симулирующую возбудимые среды. С возбудимыми средами мы имеем дело в ряде различных ситуаций. Например, нерв или мышечная ткань, которые могут быть в состоянии ***покоя***, ***возбужденном*** состоянии, сопровождаемом затем состоянием ***рефрактерности*** (*невосприимчивости*). Данная последовательность состояний имеет место, например, в сердечной мышце, при прохождении *волны* возбуждения через сердце при каждом его биении. Другой пример – пожар в степи или лесном массиве. В этой модели каждый участок леса или степи может быть в одном из нескольких состояний, а именно: горения, сожженный, восстановления и, наконец, в состоянии, доступном для нового возгорания. Имеется также много химических систем, включающих некоторую форму автокатализа, которые проявляют *возбудимое* поведение. Наиболее известные из них – реакция Белоусова-Жаботинского и реакции при гетерогенном катализе.

Модифицированные ***OCP***-модели достаточно успешно используются в медико-биологических исследованиях, в частности, при разработке методов обработки временных и пространственных характеристик процессов в медицинских диагностических системах. Ввиду сложности изучаемых систем их эволюция обычно представляется в дискретных пространственно-временных координатах *(класс* ***OCP****-моделей)* с последующим компьютерным моделированием. В одной из таких моделей состояние элемента (x,y) в момент времени $t=n$ характеризуется энергией $Z(x,y)$. Если эта величина не превышает некоторый критический уровень Z^*, элемент считается устойчивым, в противном случае элемент переходит в возбужденное состояние и в следующий момент времени $t=n+1$ отдает по единице энергии окружающим его соседям. Объектом исследования на такой модели являются биомедицинские электрокардиографические сигналы, используемые в функциональной диагностике состояния сердечно-сосудистой системы [536].

Смоделируем ради простоты данную систему ***OC***-моделью с рефрактерностью с тремя состояниями, а именно: состояниями *покоя* **(0)**, *возбуждения* **(2)** и *рефрактерности* **(1)**. Данная ***OC***-модель будет иметь размерность **2**, глубину рефрактерности **1**, индекс соседства Неймана и алфавит $A=\{0,1,2\}$ внутренних состояний единичного автомата структуры.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & b & \\ \hline a & x & c \\ \hline & d & \\ \hline \end{array} \rightarrow x^* = \begin{cases} 0, & if \quad x = 1 \;\; or \;\; 2 \notin \{a,b,c,d\} \\ 1, & if \quad x = 2 \\ 2, & if \quad 2 \in \{a,b,c,d\} \end{cases} \qquad (\psi)$$

Приведем фрагмент динамики такой модели Гринберга-Гастингса для начальной конфигурации $(t=0)$, содержащей один автомат в *рефрактерном* состоянии **(1)**, тогда как все остальные автоматы его шаблона соседства находятся в *возбужденном* состоянии **(2)**.



Динамика представлена тремя шагами для ***t=1,2,3,*** из которых легко усматривается распространение фронта возбуждения в ***OC-***модели. Естественно, характер динамики распространения возбуждений в такой модели определяется такими ее параметрами как: шаблон соседства**,** глубина рефрактерности**,** алфавит внутренних состояний**,** локальная функция перехода и начальной ***КФ.*** Для анализа подобных ***OC-***моделей весьма эффективным представляется их компьютерное симулирование, для чего уже имеется целый ряд интересных программных средств, рассматриваемых несколько ниже. В этой связи определенный интерес представляет программа ***VR,*** созданная в ИМПБ РАН ***(****Пущино****)*** и предназначенная для симулирования возбудимой среды Винера-Розенблюта, образованной ***OCP-***моделями [536].

Одной из наиболее известных реализаций ***OCP-***модели является «***мозг Брайена***»**,** предложенная ***Б. Силверманом*** в ***1984*** и являющаяся упрощенной аналогией нервной ткани. В данной модели единичные автоматы допускают лишь три состояния, а именно**: *0* (***покой***), *1* (***возбуждение***)** и **2** (***рефрактерность***)**, тогда как локальная функция перехода весьма проста **–** автомат в ***0-***состоянии возбуждается**,** если точно двое из его соседей находятся в состоянии «***1***»**.** После возбуждения на следующем шаге автомат переходит в состояние рефрактерности ***(2)*** перед восстановлением состояния покоя ***(0).*** Хотя данное правило и относительно старо**,** систематически оно никогда не исследовалось. При этом**,** оно является настолько динамичным**,** что в модели весьма не просто создавать устойчивые конфигурации. Только в ***1999 М. Свеней*** обнаружил первые осцилляторы. В настоящее время предложен ряд модификаций указанной модели и получены их весьма интересные динамические характеристики [536].

Из *фундаментальных* свойств ***OC-***моделей с *рефрактерностью* следует отметить наличие в них *неконструируемых конфигураций* ***(НКФ)***, рассматриваемых детальнее несколько ниже и суть которых состоит в том, что они могут существовать только в момент времени ***t=0*** и не могут быть сгенерированы структурой ни из какой начальной конечной ***КФ.*** В случае же нашей ***OC-***модели с рефрактерностью в качестве ***НКФ*** выступает уже такая простая ***КФ*** как ***c2,*** у которой только один автомат находится в состоянии «**2**»**,** тогда как все остальные автоматы находятся в состоянии покоя ***(0).*** Действительно, предположим, что ***КФ c2*** не является ***НКФ,*** т.е. для нее существует ***КФ*** c_o такая, что $c_o\tau^{(5)}=c2$**.** Но согласно ***ЛФП*** структуры ***(ψ)*** автомат в состоянии «**2**» может возникнуть лишь, если до этого по меньшей мере хоть один из его соседей имел в предыдущий момент времени состояние «**2**»**,** тогда как сам он в этом состоянии не был. Но тогда уже ближайшее окружение автомата не было бы ***нулевым***, ибо автомат из состояния «**2**» переходит в состояние «***1***»**,** что противоречит нашему предположению. Следовательно**, *КФ c2*** является ***НКФ,*** т.е. ***c2*** может существовать в структуре лишь в *начальный* момент времени ***t=0.*** Читателю рекомендуется обнаружить и другие ***НКФ*** в данной классической ***OC-***модели.

Принцип функционирования ***OCP-***моделей хорошо иллюстрирует следующий весьма простой пример ***1-OCP*** с *глубиной рефрактерности* ***r=2,*** *порогом возбудимости* ***P=2*** единичного ***z-***автомата структуры и индексом соседства ***X={0,1,2,3}*,** т.е. его алфавит состояний

структурирован как $A=\{0,1\}\cup\{\omega_1,\omega_2\}$. Для такой ***1-OCP*** локальная функция перехода определяется следующей системой ***ПП***, аналогичной системе (**14**), а именно:

$$\begin{cases} \sigma^{(4)}(1,x_1,x_2,x_3)=\varpi_1 \\ \sigma^{(4)}(\varpi_1,x_1,x_2,x_3)=\varpi_2 \\ \sigma^{(4)}(\varpi_2,x_1,x_2,x_3)=0 \\ \sigma^{(4)}(0,0,0,0)=0 \\ \sigma^{(4)}(0,x_1,x_2,x_3)=1 \Leftrightarrow \left(\sum\limits_{x_j=1} x_j \geq 2\right) \\ \qquad x_j\in\{0,1\};\quad j=1..3 \end{cases} \qquad (15)$$

Используя сказанное и систему подстановок вида (**15**), нетрудно убедиться в генерации таким образом определенной ***1-OCP*** следующей последовательности конфигураций:

Генерируемая посредством 1-OCP последовательность КФ																	***t***
Начальная конфигурация ⇒									□	□	***1***	***1***	***0***	***1***	***1***	□	***0***
....	....	....	....	....	....	....	□	□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	***1***	ω_1	ω_1	□	***1***
....	....	....	....	....	□	□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	ω_1	ω_2	ω_2	□	***2***
....	....	....	□	□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	***0***	***0***	ω_2	□	□	□	***3***
....	□	□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	□	***Пассивная (не меняющаяся со***							***4***
□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	□	□	□	***временем) конфигурация***							***5***

В качестве весьма полезного упражнения читателю рекомендуется рассмотреть и другие примеры ***OC-***моделей с рефрактерностью. Структуры такого типа судя уже по их названию представляют большой интерес в качестве весьма удобной среды моделирования целого ряда биомедицинских процессов. Введенные ***d-OCP*** могут служить формальной моделью целого ряда интересных объектов [3,5], включая изучение процессов самоорганизации в системах клеточной природы и распространения активности в формальных нейроноподобных сетях. Наибольший интерес, при этом, представляют исследования распространения возбуждений в зависимости от типа рефрактерности, ее глубины, порога возбудимости, наличия дефектных автоматов в структуре и начальной конфигурации активной области. В данном направлении получен целый ряд интересных общих теоретических результатов [1,3,54], но неизученными остались более тонкие свойства ***d-OCP***. Поэтому для эмпирического исследования динамических свойств ***2-OCP(r,P)*** была создана специальная симуляционная программа [6,15,46], позволившая получить целый ряд интересных эмпирических результатов, среди которых можно отметить следующие:

♦ В ***2-OCP(r,P)*** существуют самовоспроизводящиеся в смысле Мура области достаточно сложной конфигурации активных (*возбужденных*) единичных автоматов;

♦ глубина рефрактерности весьма существенно влияет на распространение активности в ***2-OCP(r,P)***. Например, ряд самовоспроизводящихся при $P=2$, $r=2,3$ областей активности при $r=4$ становятся ***исчезающими*** (*затухающими*), переходящими в нулевые;

♦ в ***2-OCP(r,P)*** из целого ряда начальных конфигураций при $P=2$, $r=2,3$ генерируются самоусложняющиеся области активности, которые при $r=4$ становятся ***затухающими***;

♦ фронт распространения активности в ***2-OCP(r,P)*** задерживается «***решетом***» из дефектных автоматов, размер ячеек которого меньше P, и продолжает распространяться при размере ячеек не меньшем, чем P;

♦ в ***2-OCP(r,P)*** области активности, достаточно плотно упакованные автоматами в возбужденном состоянии, могут, между тем, на своих границах расширяться при затухании активности внутри самой области;

♦ в классе периодических областей активности существуют начальные области активности, которые, начиная с некоторого шага ***k***, становятся ***периодичными*** с периодом ***c=3*** и ***k ≥ h***, где ***h –*** размер стороны минимального квадрата, содержащего начальную область активности единичных автоматов ***2-OCP(r,P)***.

При ***переменной*** же глубине рефрактерности картина распространения ***активности*** в ***2-OCP(r,P)*** существенно усложняется и требует для своего эффективного исследования высокопроизводительных ЭВМ класса супер-ЭВМ или ЭВМ, базирующихся на вычислительных ***OC***-моделях, например, упоминаемых выше ЭВМ типа ***CAM*** [150,165]. Ниже относительно класса ***d-OCP*** будет представлен ряд результатов и теоретического плана.

OCP-модели находят все большее практическое применение. В частности, на примерах алгоритмов моделирования распространения волн возбуждения в миокарде показана и возможность применения метода ***OCP*** для моделирования движения волн возбуждения в однородных изотропных средах. Для моделирования волновых процессов в активных средах предложена сеть *нейронных клеточных автоматов* ***(НКА)***, представляющих собой модель формальных нейронов. Такой периодически генерирующий импульсы автомат имитирует деятельность биологического нейрона. Состояние такого ***НКА*** характеризуется функцией мембранного потенциала и порогового значения мембранного потенциала. Методы анализа таких сетей позволяют выбирать параметры модели так, чтобы она имела аттрактор типа ведущего центра. Сети ***НКА*** могут оказаться удобным аппаратом симуляции для достаточно широкого разнообразия колебательных явлений [536]. С рядом других интересных вопросов, относящихся к ***OCP***-проблематике, можно ознакомиться в работах [54,88,90,134,159,160,166,167,187,198,201,205,2554,301,308,333,346,360,536].

4. Как следует из вышесказанного, классические ***d-OC*** обладают вполне приемлемой степенью общности, допускают достаточно широкий диапазон приложений и используются для моделирования многих параллельных дискретных процессов в их динамике [1,3,5,8-10,12,15,23,27,32-34,46-58,64-67,80-90,121,135,138,146,147,149-152,154,156,157,159-161,165-167,175-179,184-188,201,213-219,285,298,308,318,329,354,360,366,378,384-388]. В этом отношении динамическое поведение модели некоторого процесса, объекта или алгоритма, погруженной в классическую ***d-OC***, представляется собственной историей развития некоторой начальной ***КФ*** (*одной либо нескольких*) $c_o \in C(A,d,\phi)$, где ***история*** определяется ***КФ***-последовательностью $<c_o>[\tau^{(n)}]$ конечных конфигураций. Наряду с этим, классические ***d-OC*** представляются достаточно формализованными объектами исследования как методами современной математики, так и собственным сформировавшимся аппаратом. В то же время в прикладном отношении классическое понятие ***d-OC*** оказывается в целом ряде случаев весьма неудобным при моделировании достаточно сложных дискретных процессов и объектов. Само моделирование (*по сути дела низкого уровня параллельное символьное программирование*) становится сложным, малообозримым и неэффективным. Более того, сама сущность ряда моделируемых процессов требует модификации классического понятия ***d-OC***. С этой целью нами был определен специальный класс структур (*в дальнейшем обозначаемых как* ***d-OC****) [3,5,41], до некоторой степени подобных *нейронным сетям* или *нервным тканям*, а также хорошо отражающим принцип функционирования многих типов электронных систем.

Структуры ***d-OC**** хорошо отвечают как основным общим требованиям и положениям в биологии развития на клеточном уровне, так и принципам функционирования параллельных вычислительных систем. Действительно, общепринято, что клеточное взаимодействие является основой развития многоклеточных организмов. Все аспекты развития многоклеточных систем в основе своей содержат межклеточные взаимодействия, чей механизм весьма сложен и многогранен. Однако целый ряд его важных феноменов может вполне удовлетворительно моделироваться распространением специальных управляю-

щих импульсов в структурах ***OC*-типа.*** На основе ***d-OC**** можно существенно более адекватно моделировать также феномены морфогенетических полей, которые в настоящее время весьма активно исследуются в различных аспектах. Более того, современные идеи и гипотезы в биологии развития [1,4,5,90,264,330-334] весьма определенно указывают на перспективность использования структур ***d-OC**** в качестве формальной среды моделирования многих феноменов из данной и близких ей прикладных областей [88,90,536].

В частности, структуры ***d-OC**** представляют собой достаточно удобную среду для моделирования целого ряда биологических процессов и феноменов таких как нейроноподобные сети, процессы в молекулярных жидкостях и мембранах, развитие популяций на клеточном и индивидуальном уровнях, миграции, симулирование различных кооперативных феноменов, различного рода возбудимые среды и др. [4,27,31,134,137,159,167,172, 190,198,201-205,2643,330-334]. Многие из перечисленных аспектов лежат и в основе создания нейрокомпьютеров [8,9,354,374], образуя одну из важнейших составляющих интерфейсного моста между биологическими и вычислительными науками [4,15,45,47,50,90]. Перспективным представляется использование ***OC*-моделей*** и в ряде других важных областей [1,3-5,8,9,11,26,27,31,33,36,46,90,134-139,146-152,155-167,176-179,184-189,330-334]. В качестве модели возбудимых сред структуры ***d-OC**** обеспечивают их важнейшую характерную черту – возможность передачи управляющих импульсов на произвольные расстояния и с нужными скоростями, что дает возможность создавать различные волновые фронты распространения возбуждений в моделирующей среде. Более детальное обсуждение данного класса структур можно найти в наших книгах [1,3-5,8,9,15,88,90,536].

Введя понятие ***d-OC**,* мы не только получаем более удобный относительно *классических* структур аппарат моделирования, но также весьма удобное средство реализации ***принципа локального действия (ПЛД),*** используемого в высокопараллельных вычислительных моделях. Действительно, характер функционирования ***OC*-***моделей определяет более индивидуальное поведение единичного автомата в структуре, что позволяет легче реализовывать ***ПЛД*** и в значительной степени напоминает функционирование *однородных вычислительных систем* и *сред* ***(ОВС),*** если ассоциировать внутренние состояния единичных автоматов структуры с выполняемыми программами в узлах ***ОВС,*** а импульсы структуры – с управляющими потоками информации в системе, среде.

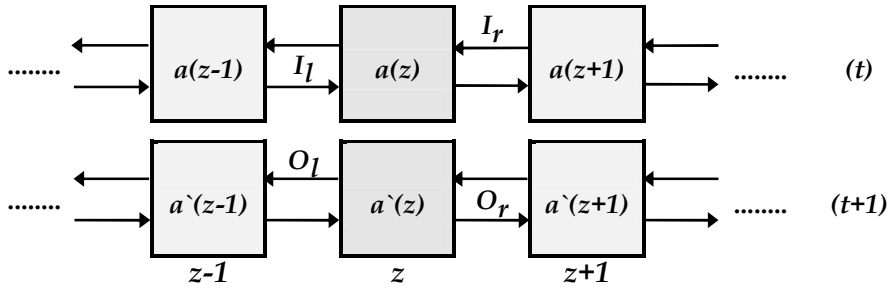


Рис. 9. Принципиальная схема функционирования однородной структуры 1-OC*.

Содержательно такие структуры определяются следующим образом, а именно. Каждый единичный автомат ***d-OC**** может получать информацию непосредственно от своих ближайших соседей и может синхронно изменять свое внутреннее состояние, испуская управляющие импульсы в дискретные моменты времени ***t>0*** как функция своего текущего внутреннего состояния и входных управляющих импульсов. Структуры этого класса оказываются очень удобной средой моделирования и описания многих интересных дискретных процессов, позволяя получать достаточно прозрачную картину информационных потоков, управляющих функционированием погружаемых в ***d-OC**** моделей и параллельных алгоритмов. Эта картина может быть весьма полезной и при анализе достаточно глубоких свойств моделей, реализуемых соответствующими функциональными

алгоритмами ***d-OC**.*** Не нарушая общности, более формально определим структуры ***d-OC**** для наиболее простого одномерного случая (см. выше рис. ***9).***

Структура ***1-OC**** есть упорядоченная четверка ***<Z^1,A,I,Fa>,*** где первые две компоненты определяются аналогично случаю классических ***1-OC, I –*** множество управляющих импульсов и ***Fa –*** функциональный алгоритм ***(ФА)*** структуры**.** Функциональный алгоритм ***Fa*** структуры определяется следующими дискретными уравнениями, а именно**:**

$$\begin{cases} a^1(z)_{t+1} = S[I_r, a(z), I_l]_t \\ (O_r)_{t+1} = R[I_r, a(z), I_l]_t \\ (O_l)_{t+1} = L[I_r, a(z), I_l]_t \end{cases} \qquad a^1(z), a(z) \in A; \quad O_r, O_l, I_r, I_l \in I; \; t = 0,1,2,\ldots \qquad \textbf{(16)}$$

где $a^1(z)$, $a(z)$ **–** состояния**;** I_r (O_r), I_l (O_l) **–** соответственно правые и левые входные (*выходные)* управляющие импульсы ***z-***автомата структуры**.** Суть функционирования таким образом определенной ***1-OC**** достаточно проста и сводиться к следующему (рис. ***9).*** Находясь в состоянии ***a(z)*** и получив на входе управляющие импульсы I_r (*справа)* и I_l (*слева)* в момент времени $t \geq 0$, в следующий момент ***(t+1)*** ***z-***автомат структуры переходит в состояние $a^1(z)$ и испускает управляющие импульсы O_r (*вправо)* и O_l (*влево),* определяемые в соответствии с уравнениями системы (**16**)**.** При этом**,** выходные импульсы ***z-***автомата являются входными импульсами для его непосредственных соседей**.** Следовательно множество ***I*** импульсов подразделяется в общем случае на два различных подмножества выходных влево $(0ut_l)$ и выходных вправо $(0ut_r)$ импульсов**;** относительно же текущего ***z-***автомата структуры удобно условно классифицировать выходные импульсы на *входные* (*поступающие в z-автомат от его соседей;* In^z_l, In^z_r) и *выходные* (*передаваемые z-автоматом его соседям;* $0ut^z_l$, $0ut^z_r$)**.** При этом**,** между обоими типами индексов имеют место очевидные соотношения**:** $0ut^z_r \equiv In^{z+1}_l$, $0ut^z_l \equiv In^{z-1}_r$, $In^z_l \equiv 0ut^{z-1}_r$, $In^z_r \equiv 0ut^{z+1}_l$**.** Очевидно, если входные импульсы для ***z-***автомата совпадают с внутренними состояниями соответствующих им ближайших соседей ***(z-1,z+1),*** а выходные импульсы с его внутренним состоянием, то структуры ***1-OC**** и классическая ***1-OC*** с индексом соседства Мура тождественны и $I \equiv A$, $I \cup A = A$**.** Следовательно**,** ***d-OC**** представляют собой эквивалентную модификацию ***классических d-OC,*** существенно более приспособленную для рассмотрения целого ряда прикладных аспектов ***TOC-***проблематики. Примеры конкретного применения ***OC*–***моделей подтвердили их достаточно высокую эффективность [54-56,88,90,536].

При использовании структуры ***d-OC**** мы не связаны теми ограничениями**,** имеющими место в случае классических структур**;** способ функционирования ***d-OC**** позволяет сфокусировать наше внимание на *сущности* самих моделируемых объектов**,** сведя к минимуму дополнительные сложности программирования модели в ***OC*-***среде, а саму модель делают легче интерпретируемой. Показано, что ***d-OC**** можно успешно использовать в качестве промежуточного этапа при моделировании в классических структурах и при исследованиях ряда вопросов их динамики [3,5,9]. В основу такого подхода положен тот факт, что любая ***d-OC**** конструктивно погружаема в классическую структуру**.** В частности, показано, что**:** ***любая 1-OC*≡<Z^1,A,I,Fa> эквивалентна классической структуре 1-OC≡<Z^1,A∪I,$\tau^{(7)}$,X> с индексом соседства X=*** {***-3,-2,-1,0,1,2,3***} [3]**.** В качестве достаточно полезного упражнения читателю рекомендуется в этом убедиться, а также и обобщить данный результат и на общий ***d-***мерный случай**.** Для доказательства в случае ***1-OC**** достаточно ***КФ*** моделирующей ее классической ***1-OC*** представлять в следующем виде**:**

…….	*a(z-1)*	$0ut^{z-1}_r$	$0ut^z_l$	*a(z)*	$0ut^z_r$	$0ut^{z+1}_l$	*a(z+1)*	…….
…….	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	…….

Действительно, для этого достаточно каждый *z*-автомат моделируемой ***1-OC**** окружить автоматами, состояния которых симулируют соответственно его левый $(0ut^z_l)$ и правый $(0ut^z_r)$ выходные импульсы, которые для соседних ему автоматов ***z-1*** и ***z+1*** будут выступать соответственно как *входные* импульсы и наоборот. Так, например, единичные автоматы *моделирующей* ***1-OC*** в позициях ***1*** и ***2*** представляют для *z*-автомата соответственно его выходной и входной импульсы *справа*, тогда как для единичного ***(z+1)***-автомата они будут представлять соответственно уже входной и выходной импульсы *слева*.

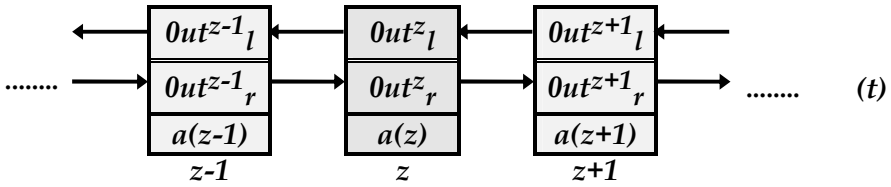


Рис. 10. Принцип организации классической 1-OC, моделирующей сруктуру 1-OC*.

Используя вышеуказанный подход и представляя состояния моделирующей классической ***1-OC*** в структурированном виде (рис. ***10***), нетрудно убедиться в справедливости результата: ***Любая структура 1-OC*≡<Z^1,A,I=$0_l \cup 0_r$,Fa> моделируется в строго реальное время классической 1-OC с индексом соседства Неймана-Мура X={-1,0,1} и алфавитом A*=Ax0_lx0_r, где 0_l и 0_r – множества выходных импульсов единичных автоматов 1-OC* соответственно влево и вправо.*** Проверку данного результата предоставляем самому читателю в качестве достаточно полезного упражнения.

Наряду с отмеченными получен ряд других результатов по эквивалентности (*включая и строгую*) ***OC*-*** и ***OC-***моделей; например, размерности и индексы соседства обоих типов структур совпадают, а алфавит ***A**** внутренних состояний классической ***d-OC*** является объединением ($A^*=A \cup I$) алфавитов ***A*** и ***I*** структуры ***d-OC****. В любом случае уместно отметить то обстоятельство, что для теоретического исследования формальной *клеточной* модели более пригодны классические ***d-OC***, тогда как структуры ***d-OC**** представляют во многих отношениях более приемлемую среду для моделирования конкретных объектов, т.е. оба типа структур представляют собой как бы *две* разные стороны классической клеточной модели параллельной обработки информации [5,88,90,536].

Проиллюстрируем возможности ***OC*-***моделей на примере решения достаточно известной *проблемы ограниченного роста* (***ПОР***), являющейся типичным представителем минимаксных задач в ***TOC-***проблематике. Исследование динамики последовательностей ***КФ*** $<c_o>[\tau^{(n)}]$, симулирующих историю развития некоторой погруженной в ***OC*** модели, включает в целом ряде случаев такой важный вопрос, как наличие в таких последовательностях пассивных ***КФ (ПКФ)***, т.е. ***КФ***, для которых имеет место соотношение $c_o\tau^{(n)} = c_o$. Ряд авторов [131,190] исследовали задачу, состоящую в определении классических ***OC-***моделей, позволяющих генерировать из довольно простых начальных ***КФ ПКФ*** максимально возможных размеров в зависимости от размера шаблона соседства структуры.

Своего рода экстремальной задачей, связанной с ***ПКФ***, явилась и задача Гайского-Ямада [191], состоящая в установлении максимально возможного размера ***ПКФ***, генерируемых классическими ***d-OC*** из некоторой простой начальной ***КФ***, но без акцента связи ее размера с размером шаблона соседства структуры. Данная задача в определенном смысле явилась распространением известной задачи Радо [192] на случай классических ***d-OC***. Заинтересованный читатель может обратиться к работе [191], содержащей не только результаты по нижним оценкам размеров таких *максимальных* ***ПКФ*** в терминах различных основных параметров ***d-OC***, но и довольно интересные обсуждения биологических ин-

терпретаций полученных в этом направлении результатов. Интересные вопросы выращивания цепочек автоматов заданной длины можно найти также в работах [195,536].

Здесь же мы рассмотрим так называемую *проблему ограниченного роста* ***(ПОР)*** в классических ***ОС***-моделях, имеющую самое непосредственное отношение к проблеме Гайского-Ямада, классу минимаксных задач в ***ТОС***-проблематике и представляющую определенный интерес с точки зрения развивающихся клеточных систем различной природы. На самом деле, рост реальных биологических систем ограничен, строго контролируем и зависит от генетических и ряда внешних факторов. Более того, ***ПОР*** имеет и большое познавательное значение, ибо позволяет нам в определенной мере оценивать и количество информации, требуемое для выращивания сложных многоклеточных организмов [536].

Учитывая и затруднения технического характера, возникающие при погружении сложных алгоритмов в классические ***ОС***-модели, нами для решения ***ПОР*** был выбран класс ***ОС****-моделей, определенных выше. И действительно, при использовании ***ОС****-моделей мы оказываемся не связанными теми ограничениями, которые имеют место для случая классических структур, а сам принцип функционирования ***ОС****-моделей позволяет сфокусировать внимание исследователя на самой сущности моделируемого процесса либо объекта, сводя к минимуму дополнительные сложности погружения исследуемой модели в структуру. Более того, любая ***d-ОС****, как мы показали, конструктивно погружаема в классическую ***d-ОС***, что позволяет итоговые результаты исследования вполне адекватно интерпретировать в контексте классических ***ОС***-моделей. Определим теперь ***ПОР***, не нарушая общности, для класса наиболее простых структур типа ***1-ОС****.

Задается конечная ***КФ*** c_o длины r состояний единичных z-автоматов в ***1-ОС**** следующего вида c_o=□*SSS...SS*□ при $|c_o|=r$. Тогда ***ПОР*** сводится к определению *функционального* алгоритма ***Fa*** структуры, позволяющего вырастить из исходной c_o***-КФ*** *пассивную* ***КФ*** вида ***c***=□***FFF ... FFFF***□ возможно наибольшего размера $L=L(c_o,Fa)$. Наилучшее известное на сегодня решение ***ПОР*** выражает следующий основной результат [3,5,9,41,56]:

Для 1-ОС*≡<Z^1,A,I,Fa> с #A=12 и #I=4m+17, где m – минимальная скорость распространения управляющих импульсов в структуре, существует функциональный алгоритм Fa, позволяющий выращивать c-КФ длины L единичных z-автоматов в состояниях F из начальной c_o-КФ длины r, где величина L определяется следующими рекуррентными соотношениями, а именно:

$$L = r(2m+1)^{\sum_{j=0}^{n} \varpi_j^2+2(2^r+1)}, \quad \varpi_0 = 2^{4rm(m+1)}, \quad \varpi_j = 2(L_j - r)$$
$$L_1 = r(2m+1)^{\varpi_0^2+2}, \qquad L_j = L_{j-1}(2m+1)^{2^{2L_{j-1}+2}+2} \qquad (17)$$

Для выращивания такой длины финальной КФ единичных z-автоматов функциональному алгоритму Fa требуется t=]3/2+1/2*m*[**L шагов структуры 1-ОС**.

Здесь мы приведем неформальное описание сути реализации одного функционального алгоритма ***1-ОС****, решающей ***ПОР***. Для решения ***ПОР*** определяем ***1-ОС**≡<Z^1,A,I,Fa>** с ***A***={***F,0,*** A_k^i , B_k^i ,***0`,0``***}, ***#I=4m+17*** и начальной ***КФ*** вида c_o=□* $A_0^0 A_0^0 A_0^0 \dots A_0^0$ □* внутренних состояний автоматов структуры. Будем говорить, что импульс $\bar{\alpha}$ имеет глубину активности ***m***, если он и его модификации за время ***t=m*** проходят через ***m*** автоматов структуры, а ***m***-й автомат переводят в состояние ***p****, если до того он был в ***p***-состоянии. Затем автомат ***1-ОС****, находящийся в ***p****-состоянии, вновь испускает $\bar{\alpha}$ ***-***импульс, переходя вновь в ***p***-состояние, и так далее. Очевидно, импульс с ***m***-глубиной активности распространяется в структуре со скоростью ***v=m/(m+1)***. Импульсы с бесконечной глубиной активности

распространяются со скоростью ***v=1.*** С учетом данных замечаний схематично алгоритм функционирования ***1-ОС*,*** решающей ***ПОР,*** сводится к следующему.

В момент времени ***t=0*** ***z-***автоматы структуры, помеченные ★***-****маркером* (рис. ***11),*** испускают две пары импульсов $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$ и $(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1)$. Импульсы $(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_2)$ распространяются в противоположных направлениях со скоростью ***v=1,*** а импульсы $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1)$ – со скоростью $v = m/(m+1)$. Необходимая скорость распространения управляющих импульсов в структуре обеспечивается их глубиной активности, путем введения *дополнительных* импульсов ***(****их модификаций****)*** и внутренних состояний структуры.

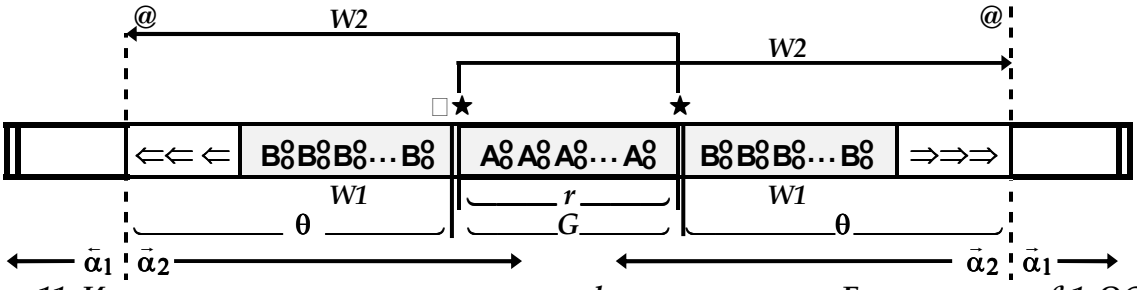


Рис. 11. Иллюстрация принципа реализации функционального Fa-алгоритма в 1-ОС*.

При своем прохождении в структуре импульсы $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_1)$ образуют *активирующие* волны ***W1,*** распространяющиеся в противоположных направления со скоростью ***v1=m/(m+1)*** и переводящие все встречные ***z-***автоматы структуры в B_0^0***-***состояние. Тогда как импульсы $(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1)$ образуют активирующие волны ***W2,*** распространяющиеся в противоположных направлениях со скоростью ***v2=1.*** В ***@-***точках встречи импульсов $(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1)$ и $(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1)$ вновь образуются пары импульсов $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2)$ и $(\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1)$ (рис. ***11).*** При этом, импульс $\vec{\alpha}_2$, распространяясь по структуре, на верхних индексах A_k^i***-***состояний автоматов реализует весьма простой алгоритм сложения по ***(mod 2).*** Данный алгоритм может быть легко реализован посредством введения нескольких *дополнительных* управляющих импульсов. Сущность его состоит в сложении содержимого, представленного верхними ***(****нижними****)*** индексами A_k^i***-***состояний единичных автоматов структуры с единицей по ***(mod 2);*** такие алгоритмы сложения будем обозначать соответственно как $S(A_k^i)_i$ и $S(A_k^i)_k$.

Полная реализация ***S-***алгоритма на *верхних* и *нижних* индексах A_k^i***-***состояний автоматов может быть представлена как $S(A_k^i)_{ik} = S(A_k^i)_i\, S(A_k^i)_k$ и требует для этого $t = 2^{2r}$ времени, где ***r –*** количество ***z-***автоматов структуры, отведенных под начальную ее ***co-КФ*** (рис. ***11).*** Алгоритм $S(A_k^i)_{ik}$ начинает свою работу на нулевых индексах и завершает ее также на нулевых индексах, что приводит нас к конфигурации следующего вида, а именно:

$$c_1 = \square\bigstar\, B_0^0B_0^0B_0^0\cdots B_0^0\ \underbrace{A_0^0A_0^0A_0^0\cdots A_0^0}_{r}\ B_0^0B_0^0B_0^0\cdots B_0^0\,\square\bigstar$$

но вместо помеченных ★***-***маркером автоматов начальной ***co-КФ*** (рис. ***11),*** ими становятся ***z-***автоматы структуры, ограничивающие выращенную описанным способом ***c1-КФ.***

(β). После этого ***z-***автоматы ***c1-КФ,*** помеченные ★***-***маркером, испускают две пары импульсов, имеющие соответственно скорости распространения $v1 = m/(m+1)$ и $v2 = 1$ как и в вышеописанной начальной части функционального алгоритма структуры. Распространяющиеся импульсы реализуют алгоритм $S(B_k^i)_{ik}$ сложения по ***(mod 2),*** продолжая движение прочь от ***@-***точек встречи. После завершения алгоритма $S(B_k^i)_{ik}$ распространяющиеся импульсы переводят все ***z-***автоматы структуры, расположенные между точками очередной встречи ***(****исключая автоматы в* A_k^i***-****состояниях****)*** в состояния B_k^i, и вновь реализуется вышеупомянутый алгоритм $S(A_k^i)_{ik}$. Затем функциональный ***Fa-***алгоритм начи-

нает выполняться с пункта (β), но для существенно более длинных θ-сегментов автоматов структуры в B_k^i -состояниях. Данный цикл продолжается до тех пор, пока не будет достигнута на *G*-отрезке (рис. *11)* автоматов *КФ* вида $A_1^1A_1^1A_1^1\ldots A_1^1$. После этого испускаются стопорящие управляющие импульсы и на обратном пути от их @-точек встречи, находящихся на уже весьма большом удалении друг от друга, все *встреченные* ими *z*-автоматы структуры переводятся в *F*-состояние, формируя заключительную (*финальную*) ***КФ*** *c*=□*FFF..FFF*□ *L*-длины. Вывод точных оценок для значений параметров решающей ***ПОР*** структуры ***1-ОС**** мы не приводим, между тем, они могут быть получены при детальном описании функционального ***Fa***-алгоритма, с которым можно ознакомиться в [41], либо получены самим читателем в качестве достаточно полезного упражнения.

Использование введенного понятия структур ***1-ОС**** позволяет нам более наглядно представить себе саму идею *функционального* ***Fa***-алгоритма роста, которая вполне может быть реализована и в среде классических ***1-ОС***, но с существенно большими издержками. Таким образом, наша идея функционального алгоритма сводится к *рекуррентно экспоненциальному* увеличению времени выращивания цепочки *z*-автоматов структуры, используя принцип увеличения амплитуд повторяющихся циклов прохождения одних и тех же пар управляющих импульсов в структуре за счет *экспоненциального* увеличения длин отрезков *z*-автоматов, определяющих длительность этих циклов. На основе предложенной идеи можно рассматривать различные ее модификации, позволяющие в значительной степени улучшать сформулированный выше результат решения ***ПОР*** [5,41,88,90,536].

Таким образом, время выращивания цепочек *z*-автоматов такой *фантастической* длины не превышает их двойной длины и при возрастании величины ***m***, существенно влияющей на длину выращиваемой цепочки, ***асимптотически*** стремится к пределу ***t***=]***3/2*L***[. Очевидно, *теоретический* предел времени выращивания цепочки *z*-автоматов *L*-длины в ***1-ОС**** равен ***t***=]***L/2***[, однако ввиду ограниченности роста и необходимости обработки этого условия функциональным ***Fa***-алгоритмом данный предел недостижим. Вместе с тем, модификация ***Fa***-алгоритма, использованного для получения вышеуказанного решения ***ПОР***, позволяет выращивать цепочку *z*-автоматов при тех же исходных посылках за время, асимптотически равное ***t***=]***1/2+1/2m***[**L*, и длиной, равной величине:

$$L = r * (2m+1)^{4^{r+1}+3} - 2m$$

Проведенный анализ *функциональных алгоритмов* [3,41,536], решающих ***ПОР***, позволил разделить их на ***два*** больших класса, принципиально различающихся между собой:

(1) алгоритмы, сущность которых состоит в постоянном поддержании роста фигуры до получения управляющего стоп-импульса (сигнала);

(2) алгоритмы, чья сущность состоит в предварительной разметке контуров выращиваемой фигуры с последующем заполнением ее финальными F-символами.

Функциональный алгоритм, лежащий в основе приведенного *первого* решения ***ПОР***, относится ко *второму* классу, тогда как оптимальный по времени алгоритм – к *первому*. Повидимому, для выращивания фигур (*конфигураций)* максимально возможного размера более приемлемыми оказываются функциональные алгоритмы *второго* типа, тогда как для выращивания за минимальное время – *первого* типа. На наш взгляд, алгоритмы *первого* типа более адекватно отражают суть процессов роста в биологии развития, в основе которого лежат как *генетическая* информация зиготы, так и влияние *внешней* среды развития. Используемый для решения ***ПОР*** первый алгоритм, определяющий распространение в моделирующей ***1-ОС**** управляющих импульсов, достаточно сложен и в случае, в частности, какого-либо сбоя может приводить к неконтролируемому росту фигуры – «***раковому процессу***». Дальнейшее усложнение такого функционального алгоритма позволяет [3] несколько улучшить предельные размеры конфигураций, выращиваемых в

ОС*-**моделях**,** и в этой связи возникает достаточно интересный вопрос**: *Существуют ли функциональные алгоритмы, использующие другие идеи и позволяющие получать лучшие результаты по выращиванию максимального размера конфигураций при прочих равных условиях? Из прикладных аспектов ***ПОР*** следует отметить ее полезность для исследования информационной связи *межклеточных* взаимодействий развивающихся клеточных систем, а также для формирования ряда соображений о характере генетического кода и механизмах возникновения различного рода онкологий [5,54-56,88,90,536].

Подобно ***ПОР*** использование концепции ***ОС*-**моделей оказывается достаточно эффективным при решении целого ряда известных минимаксных задач таких как, проблема синхронизации сети автоматов ***(ПССА)*** и *проблема Французского флага* ***(ПФФ).*** Впервые ***ПССА*** была поставлена ***Дж. Майхиллом*** в ***1957*** г. и решена сначала ***М. Минским*** и ***Дж. Маккартни*** в ***1965*** на основе метода «*разделяй и властвуй*»**,** а затем ***Э. Гото*** **(***минимальное по времени решение***),** ***А. Ваксманом*** и ***Р. Бальцером*** **(***минимальные по числу состояний единичного автомата решения***)** в ***1966*** г**.** В последующие годы ***ПССА*** получила целый ряд обобщений и по ним были получены весьма интересные результаты как теоретического**,** так и прикладного характера. Превосходный исторический обзор по ***ПССА*** и ее современному состоянию можно найти в работе [196]**.** Последние результаты в данном направлении позволяют осуществлять синхронизацию довольно общего вида сетей из конечных идентичных автоматов с произвольными индексами соседства. Сильный результат по решению ***ПССА*** в *минимальное время* получен ***Ж. Мазойером*** [157], доказавшим**,** что множество всех решений ***ПССА*** в минимальное время нерекурсивно. В прикладном аспекте результаты по ***ПССА*** и методы ее решения могут быть успешно использованы в различных прикладных областях таких, как управление функционированием сетей ЭВМ или систем радиостанций, синхронизация различных информационных процессов в ***ОС*-**моделях и так далее [536]. Ниже данная проблематика рассматривается подробнее.

5. Для задач физического моделирования и, в первую очередь, процессов, *обратимых* на микроуровне, весьма эффективными представляются так называемые ***ОС*** на ***разбиении*** [150], эквивалентные *асинхронным* ***ОС*-**моделям и определяемые нижеследующим образом. Не нарушая общности, и в целях большей прозрачности изложение концепции такого типа ***ОС*-**моделей будем вести относительно их одномерного случая.

Однородная структура на разбиении (ОСнР) определяется как упорядоченная пятерка базовых компонент следующего общего вида**:**

$$1\text{-}ОСнР \equiv \langle Z^1, A, m, \Psi^{(m)}, \Xi \rangle$$

где**:** первые две компоненты Z^1 и A аналогичны случаю классической ***ОС*-**модели**; m –** размер блока, на которые разбивается однородное Z^1**-**пространство структуры**; $\Psi^{(m)}$ –** локальная блочная функция перехода**; Ξ –** правила коммутации блоков ***(****переразметка****)*** Z^1**-**пространства структуры. Такая организация структуры выводит ее из класса типичных однородных структур. Функционирование структуры ***1-ОСнР*** достаточно просто и осуществляется нижеследующим образом.

В начальный момент времени $t=0$ Z^1**-**пространство структуры разбивается на равные по длине ***(m)*** *блоки* единичных автоматов**,** т.е. все смежные автоматы группируются в блоки m**-**длины ***(m-****блоки****).*** Разбиение определяется j**-**параметром, который не нарушая общности, полагаем равным $j=0$**.** Следовательно, m**-**блоки образуются смежными единичными автоматами структуры с координатами следующего общего вида, а именно**:**

$$m\text{-}блок:\ [X_{j+1}X_{j+2}X_{j+3}\ldots X_{j+m}] \qquad j \in \{0; \pm m; \pm 2m; \pm 3m; \ldots\}$$

(α) После этого одновременно к конфигурациям всех m**-**блоков структуры применяются *параллельные блочные подстановки* ***(ПБП)*** следующего общего вида, а именно**:**

$$X_{j+1}X_{j+2}X_{j+3}\dots X_{j+m} \Rightarrow Y_{j+1}Y_{j+2}Y_{j+3}\dots Y_{j+m} \quad 0^m \Rightarrow 0^m ; \quad X_{j+p}, Y_{j+p} \in A$$
$$(j = 0; \pm m; \pm 2m; \dots ; p = 1..m) \quad N = a^{m(a^m-1)} - \textit{number of different local functions} \qquad (18)$$

определяющие *локальную блочную функцию* (***ЛБФ***) перехода $\Psi^{(m)}$. Функция $\Psi^{(m)}$ отображает произвольную ***КФ m-блока*** в новую конфигурацию этого же блока, т.е. имеет место отображение $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$. Одновременное же применение ***ЛБФ*** ко всем блокам Z^1-пространства определяет *глобальную функцию* (***ГФП***) перехода $\tau^{(m)}$, преобразующую начальную ***co-КФ*** всего однородного пространства структуры в следующую глобальную ***c1-КФ*** (рис. *12*), т.е. $co\tau^{(m)}=c1$. Однако, в отличие от классических ***ОС***-моделей, коммутация единичных автоматов в которых постоянна и определяется лишь индексом соседства, в ***1-ОСнР*** в следующий момент времени $t=1$ производится перекоммутация ***m-блоков*** (*переразметка Z^1-пространства*). С этой целью ***j***-параметр, определяющий блочную разметку Z^1-пространства, принимает значение $j=p$ $(0<|p|<m)$, обеспечивая режим непрерывного перекрытия обоих блочных разметок. Следовательно, ***m***-блоки второй разметки Z^1-пространства образуются смежными единичными автоматами с координатами

$$m\text{-блок:}\ [Y_{j+p}Y_{j+p+1}Y_{j+p+2} \dots Y_{j+m+p}] \qquad j \in \{0; \pm m; \pm 2m; \pm 3m; \dots\}$$

смещая {*влево* | *вправо*} границы *блочной* разметки относительно предыдущей. Вновь к ***m***-блокам новой разметки одновременно применяются ***ПБП*** вида (**18**), заканчивая на этом второй шаг ***1-ОСнР*** и получая на выходе ***c2-КФ*** структуры (рис. *12*).

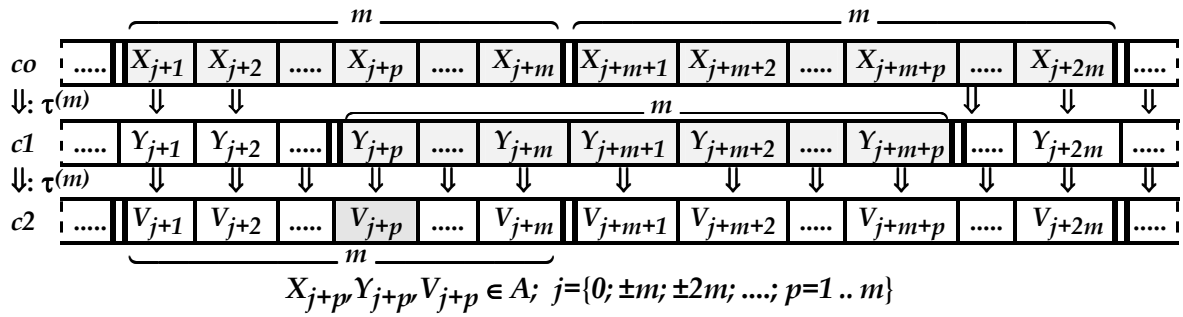


Рис. 12. Иллюстрация принципа функционирования моделей типа 1-ОСнР.

После чего вновь возвращаемся к ***(j=0)***-разметке Z^1-пространства и процесс функционирования ***1-ОСнР*** повторяется с ***(α)***-пункта. Из представленных определения структуры ***1-ОСнР*** и принципа ее функционирования несложно получить ряд весьма интересных как с теоретической, так и с прикладной точек зрения выводов, на которых остановимся несколько подробнее [536].

Прежде всего, если ***ЛБФ*** $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$ является взаимно однозначным отображением (*которое, по сути дела, состоит в перестановке состояний конфигурации* ***m***-*блока*), тогда весь процесс функционирования определенной таким образом ***1-ОСнР*** является строго *обратимым*, т.е. по любой ***КФ*** $c_k \in \langle c_o \rangle [\tau^{(m)}]$ можно отслеживать ее обратную историю (*динамику*). Режим блочной перекоммутации (*переразметки*) Z^1-пространства структуры весьма существенен и обеспечивает возможность обмена информацией между любыми двумя единичными автоматами структуры. В противном случае модели ***ОСнР***-типа вырождаются в системы бесконечного числа независимых конечных моделей, даже в совокупности не представляющих сколько-нибудь существенного прикладного интереса.

В вышеприведенном определении ***ОСнР***-модели, естественным образом обобщаемом и на случаи высших ***d***-размерностей ($d>1$), **Ξ**-правило переразметки Z^1-пространства состоит из двух последовательных шагов ***(j=0 и j=p)***, повторяющихся циклически. В общем случае можно использовать несколько (*но лишь конечное число*) шагов переразметки, пов-

торяющихся в совокупности циклически. Это позволяет сохранять однородность пространства и времени в такого типа ***ОС-***моделях. При этом, можно использовать более сложные правила блочной переразметки и т.д. При сделанных предположениях ***ОСнР-***модель можно рассматривать как некоторый существенно расширенный вариант классической ***ОС-***модели, в которой единичный шаг разбивается на несколько *более* элементарных *(микро)* подшагов, при этом сама ***ОС-***модель должна быть наделена возможностью переменной коммутации индекса соседства, зависящей от местоположения единичного *z-*автомата модели, т.е. представлять собой одну из простейших разновидностей из класса асинхронных ***ОС-***моделей [5,88,90,536].

Уже простые ***ОСнР-***модели могут использоваться, например, для моделирования поведение частиц газа. Конструкция такой модели подобна т.н. ***«бильярдному автомату»*** и базируется на шаблоне соседства ***Марголуса*** [150,268,273,376]. Простая газовая ***ОСнР-***модель ***Харди, Поззиса*** и ***Помеау*** дает результаты, достаточно близкие к результатам решения уравнения Навье-Стокса, тогда как более детальные модели ***Фритча, Хэслачера*** и ***Помеау*** позволяют моделировать движение газовых частиц в ***6*** направлениях вместо ***4.*** Такого типа модели могут быть использованы, например, в аэродинамике. Небольшого отличия ***ОСнР-***модель *(известная как модель* ***Айзинга)*** может использоваться для симулирования ферромагнетизма, а также реакционно-диффузионных систем. Более детальную информацию можно получить, обратившись к источникам, указанным в [536].

Однако между классическими ***ОС-***моделями и ***ОСнР*** существует и принципиальное отличие. Если для *первых* каждый единичный *z-*автомат ***ОС-***модели имеет несколько *(в зависимости от индекса соседства)* входов и только *один* выход *(определяемый передаваемой соседям информации о своем текущем состоянии)*, то для ***ОСнР-***модели блочное разбиение однородного Z^d-пространства обеспечивает для блоков единичных *z-*автоматов одинаковые количества входов и выходов при независимости блоков в каждый ***t-***момент времени. Такая организация *коммутации* единичных автоматов ***ОСнР-***модели позволяет относительно несложно программировать свойство ***обратимости,*** обеспечиваемое ***ЛБФ*** $\Psi^{(m)}$, которая может реализовать функцию простой перестановки в конфигурациях ***m-***блоков разбиения состояний составляющих их единичных автоматов.

Более того, в общем случае имеет место следующий основной результат, характеризующий взаимосвязь классических ***ОС-***моделей и структур ***ОСнР*** [88,90], а именно:

Произвольная структура d-ОСнР $\equiv \langle Z^d, A, m, \Psi^{(m)}, \Xi \rangle$ ***не может моделироваться классической структурой d-ОС*** $\equiv \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X \rangle$, ***и наоборот.***

Таким образом, понятие ***d-ОСнР*** является существенным обобщением классических ***ОС-***моделей. На содержательном уровне приведем соображения в пользу данного утверждения. Прежде всего, рассмотрим пример простейшей структуры ***1-ОСнР*** $\equiv \langle Z^1, A=\{0,1\}, 2, \Psi^{(2)}, \Xi \rangle$, в которой ***ЛБФ*** определяется параллельными блочными подстановками вида $\Psi^{(2)} \equiv \{00 \Rightarrow 00, 01 \Rightarrow 10, 10 \Rightarrow 01, 11 \Rightarrow 11\}$, а Ξ-правило блочной переразметки Z^1-пространства состоит в чередовании значений $\{0,1\}$ *j-*параметра в *четные* и *нечетные* ***t-***моменты.

c0:	□	□	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	□	□
c1:	□	□	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	□	□
c2:	□	□	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	□	□
c3:	□	□	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	□	□
c4:	□	□	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	□	□
c5:	□	□	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	□	□
c6:	□	□	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	□	□
c7:	□	□	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	□	□
.....	□.....		.....		.....		.....		.....		.....		.....		.....		.....		.....□	

Тогда, в соответствии со сказанным в таким образом определенной ***ОСнР-***модели генерируется ***КФ-***последовательность вышеуказанного следующего вида; при этом, *одинарными* и *двойными* линиями отмечены первая и вторая *блочные* разметки Z^1-пространства структуры ***1-ОСнР.*** Из рассмотрения поведения данной ***КФ-***последовательности, генерируемой определенной выше бинарной ***1-ОСнР,*** несложно убедиться, что, начиная с момента $t=2$, в ней представлены конечные конфигурации лишь вида $c_t=\square 10^{2t-2}1\square$, т.е. $\langle c_o\rangle[\tau^{(2)}]=\{\square 11\square,\square 11\square,\square 10^{2t-2}1\square \mid t\geq 2\}$, где 0^p **–** ***0-***цепочка длины p. С другой стороны, уже нетрудно убедиться, что никакая классическая бинарная ***1-ОС*** не может генерировать бесконечных ***КФ-***последовательностей такого вида**.** Более того**,** как несложно убедиться, определенная нами ***ОСнР-***модель является ***строго обратимой,*** что играет определяющую роль как при физическом моделировании**,** так и при создании моделей *обратимых* вычислений, прежде вего, при создании компьютеров на основе нанотехнологии [536].

Предположим теперь**,** что для каждой классической ***d-ОС*** существует симулирующая ее ***ОСнР-***модель той же размерности и в том же ***А-***алфавите внутренних состояний единичного автомата. Но тогда на основании определяющих симулирующую ***ОСнР-***модель ***ЛБФ*** получаем достаточно эффективный алгоритм определения наличия для модели свойства ***обратимости,*** а значит и ***обратимости*** симулируемой ею классической ***ОС-***модели, что противоречит алгоритмической неразрешимости проблемы ***обратимости*** *(глава* ***2)*** для общего случая классических ***d-ОС*** ***(d≥2).*** Полученное противоречие и завершает набросок доказательства вышеприведенного утверждения.

С другой стороны**,** уже за счет увеличения только на *один* символ ***А-***алфавита классической ***d-ОС*** можно посредством ее моделировать в реальное время произвольную структуру ***d-ОСнР.*** В качестве иллюстрации общего принципа рассмотрим пример моделирования произвольной простейшей структуры $\textbf{1-ОСнР} \equiv \langle Z^1, A=\{0,1\}, 2, \Psi^{(2)}, \Xi\rangle$, в которой ***ЛБФ*** определяется параллельными блочными подстановками вида $\Psi^{(2)}$: $\{xy \Rightarrow x`y` \mid x,y, x`,y`\in\{0,1\}\}$, а **Ξ-**правило блочной переразметки Z^1-пространства состоит в чередовании значений $\{0,1\}$ j-параметра в четные и нечетные t-моменты времени, посредством классической ***1-ОС*** с алфавитом $A^* = A\cup\{\#\}$ $(\#\notin A)$ и индексом соседства $X=\{-1,0,1,2,3\}$. Положим, что начальная конфигурация моделирующей ***1-ОС*** следующего вида, а именно**:**

$$c_o=\square\#00\#X_1X_2\#X_3X_4\# \ldots\ldots \#X_jX_{j+1}\# \ldots\ldots \#X_{n-1}X_n\#00\#\square \qquad \textbf{(19)}$$

(*где* ***#*** **–** *маркер-разделитель****)*** определяет начальные конфигурацию и блочное разбиение Z^1-пространства моделируемой ***1-ОСнР.*** Локальную функцию перехода *моделирующей* структуры ***1-ОС*** определяем параллельными подстановками следующего вида**:**

$$\Psi^{(2)}: X_jX_{j+1} \Rightarrow X`_jX`_{j+1} \textbf{ – локальная блочная функция 1-ОСнР}$$
$$X=\{-1,0,1,2,3\} \textbf{ – индекс соседства классической 1-ОС}$$

$$\sigma^{(5)}: \begin{cases} X_{j-1}\#X_jX_{j+1}\# \Rightarrow X`_j & \#X_jX_{j+1}\#X_{j+2} \Rightarrow \# \quad \#0000 \Rightarrow \# \\ X_jX_{j+1}\#X_{j+2}X_{j+3} \Rightarrow X`_{j+1} & 000\#0 \Rightarrow \# \quad 0\#000 \Rightarrow 0 \\ Y_{j-1}Y_jY_{j+1}Y_{j+2}Y_{j+3} \Rightarrow Y_j & -\textit{otherwise} \end{cases} \qquad \textbf{(20)}$$

$$Y_{j+p}\in A\cup\{\#\};\quad X_{j+p}X`_{j+1}, X`_j \in X`_{j+1} \quad (j=0;\ p=\pm1;\pm2;\pm3;\ \ldots)$$

Путем непосредственной проверки легко убедиться **(***оставляем это читателю в качестве упражнения****)***, что начав с ***со-КФ*** (**19**), определенная ***ЛФП*** $\sigma^{(5)}$ (**20**) *классическая* ***1-ОС*** моделирует в реальное время как саму динамику конфигураций структуры ***1-ОСнР*** **(***заданных *в* ***А-****алфавите****)***, так и **Ξ-**правило блочной переразметки Z^1-пространства ***(#-****маркерная разметка****).*** Сам моделирующий алгоритм достаточно прост и может успешно использоваться в исследованиях целого ряда подобных задач**.** Сказанное резюмирует нижеследующее достаточно интересное предложение [5,88,90,536].

Произвольная структура d-ОСнР, определенная в А-алфавите, моделируется в реальное время классической d-ОС с алфавитом $A^*=A\cup\{\#\}$ ($\#\notin A$).

С другой стороны, произвольная классическая ***d-ОС*** моделируется структурой *на разбиении* ***d-ОСнР***. Один из возможных способов такого моделирования проиллюстрируем, не нарушая общности, на примере классических ***1-ОС***. Из результатов по моделированию (глава ***6***) хорошо известно, что произвольная классическая ***d-ОС*** моделируется структурой ***d-ОС*** с простейшим индексом соседства, соответствующий шаблон соседства ***(ШС)*** которого имеет ***(d+1)***-размер. Такое моделирование обеспечивается *увеличением* мощности ***А***-алфавита моделирующей структуры и замедлением времени. Следовательно, произвольная классическая ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2,...,n-1\}$ моделируется с ***(n-1)***-*замедлением* классической ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $Xn=\{0,1\}\equiv\{-1,0\}$. Поэтому вполне достаточно ограничиться случаем классических ***1-ОС*** с *простейшим* индексом соседства ***Xn***. Для такого класса ***ОС***-моделей ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ определяется *параллельными подстановками* ***(ПП)*** следующего общего вида, а именно:

$$X_jX_{j+1}\Rightarrow X`_j \qquad X_j, X`_j, X_{j+1}\in A \quad j\in\{0;\pm1;\pm2;...\} \tag{21}$$

Тогда как ***моделирующую*** ее структуру ***1-ОСнР*** определяем в ***А****-алфавите следующего вида $A^*=A\cup\left\{\left\langle\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\rangle \mid x,y\in A\right\}$ [$\#A^*=a(a+1)$], блочная разметка Z^1-пространства производится блоками размером $m=2$, тогда как Ξ-*правило переразметки* состоит из двух последовательных шагов ($j=0$, $j=1$), повторяющихся циклически. Локальную блочную функцию $\Psi^{(2)}$ определяем параллельными блочными подстановками следующего общего вида:

$$\psi^{(2)}:\quad x_jx_{j+1}\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}x'_j\\x_j\end{matrix}\right\rangle x_{j+1} \qquad x_{j-1}\left\langle\begin{matrix}x'_j\\x_j\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow x'_{j-1}x'_j \tag{22}$$
$$x_{j-1}, x_j, x'_j, x_{j+1}\in A; \quad j\in\{0;\pm1;\pm2;\ldots\}$$

соответствующими параллельным подстановкам ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ (**21**) *моделируемой* структуры. Тогда, если ***ГФП*** $\tau^{(2)}$, определяемая ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ (**21**), моделируемой классической ***1-ОС***, переводит произвольную ***КФ*** $c\in C(A)$ в следующую ***КФ*** $c\tau^{(2)}=c`\in C(A)$ за один шаг структуры, а именно:

$$\tau^{(2)}: c=.....X_{j-3}X_{j-2}X_{j-1}X_jX_{j+1}X_{j+2}X_{j-3}..... \Rightarrow c`=.....X`_{j-3}X`_{j-2}X`_{j-1}X`_jX`_{j+1}X`_{j+2}X`_{j-3}.....$$

то, как нетрудно убедиться, определенная нами структура ***1-ОСнР*** выполняет аналогичную работу за **2** шага, а именно справедливы преобразования конфигураций вида:

$$c:\quad \ldots\underbrace{|x_{j-4}x_{j-3}|}_{2}\underbrace{x_{j-2}x_{j-1}|}_{2}\underbrace{|x_jx_{j+1}|}_{2}\underbrace{x_{j+2}x_{j+3}|}_{2}x_{j+4}\cdots$$

$$c':\quad \ldots x_{j-4}||x_{j-3}\left\langle\begin{matrix}x'_{j-2}\\x_{j-2}\end{matrix}\right\rangle||x_{j-1}\left\langle\begin{matrix}x'_j\\x_j\end{matrix}\right\rangle||x_{j+1}\left\langle\begin{matrix}x'_{j+2}\\x_{j+2}\end{matrix}\right\rangle||x_{j+3}x_{j+4}||\cdots$$

$$c'':\quad \ldots\underbrace{|x'_{j-4}x'_{j-3}|}_{2}\underbrace{x'_{j-2}x'_{j-1}|}_{2}\underbrace{|x'_jx'_{j+1}|}_{2}\underbrace{x'_{j+2}x'_{j+3}|}_{2}x'_{j+4}\cdots$$

Таким образом, с учетом сказанного можно сформулировать следующий результат.

Произвольная классическая 1-ОС с индексом соседства $X=\{0,1,2,3,...,n-1\}$ моделируется структурой 1-ОСнР = $<Z^1, A^*, 2, \Psi^{(2)}, \Xi>$ с $2*(n-1)$-замедлением.

Данный результат обобщается и на общий ***d***-мерный случай. Задача взаимного моделирования классических структур ***d-ОС*** и ***d-ОСнР*** предполагает исследование и вопросов оптимизации по различным параметрам (*размеру* ***ШС***, ***m***-*размеру блочного разбиения*, *времени моделирования и мощности* ***А****-*алфавита*) моделирующей структуры, которые представляются достаточно интересными. Таким образом, многие вопросы динамики ***ОСнР-***

моделей можно весьма эффективно рассматривать в рамках развитой теории классических ***ОС***-моделей с учетом специфики первых [5,88,90,536].

Класс ***ОСнР***-моделей вызывает интерес не только в качестве самостоятельного формального объекта параллельной обработки информации, но, в первую очередь, в качестве среды физического моделирования и исследования вычислений, наделенных важным свойством обратимости. При этом следует отметить, что теория такого типа ***ОС***-моделей практически не разработана *(в отличие, скажем, от классических* ***ОС****)* и подавляющее число результатов по ним носит эмпирический характер. Это обусловлено использованием ***ОСнР***-подхода, в основном, для задач физического моделирования на упоминавшихся уже ***CAM***-машинах, аппаратно-программно поддерживающих ***ОСнР***-модели [536].

В частности, структуры ***2-ОСнР*** используются для моделирования различного рода физических процессов и явлений, с некоторыми из которых в популярном изложении можно ознакомиться в превосходной книге [150]. В книге можно найти интересные физические модели такие как: диффузии и равновесия, динамики жидкостей, решетчатых газов, а также модели ряда других коллективных явлений, включая хорошо известные системы ***Айзинга*** [387], которые были первоначально введены с целью изучения магнитных материалов, а впоследствии нашли значительно более широкое применение. Учитывая прикладную значимость ***ОСнР***-моделей, в ***CAM***-машинах средства их реализации имеют аппаратно-программную поддержку, существенно упрощая процесс программирования конкретных процессов и явлений на их основе [150,165]. В ***CAM***-машинах реализован изоморфизм общей ***ОС***-концепции и аппаратно-программной ее поддержки, что обеспечивает простоту и эффективность программирования ***ОС***-моделей как классических, так и ***ОСнР***, допускающих конструктивное определение свойства обратимости. В работах [150,160,273,318,536] можно найти весьма интересное обсуждение свойства *обратимости* динамики ***ОСнР***-моделей различных физических процессов и явлений на микроскопическом уровне, а также физической интерпретации данного свойства.

Наряду с представленными типами ***классических ОС***-моделей для специальных целей *(как теоретических, так и прикладных)* используется ряд других классов структур, целый ряд из которых рассматриваются в работах [1,3,5,8,9,54,90,135,146,147,150,160,161,166,175-179,187,201,214,252,285,308,360,366,381]. Специальные классы структур позволяют вполне успешно решать целый ряд важных вопросов *динамики* ***ОС***-моделей, а также весьма интересные и разнообразные прикладные задачи моделирования в их среде. Вкратце рассмотрим лишь некоторые из наиболее интереных [536].

6. *Однородные структуры со входами и выходами* ***(ОСВВ)***. Данный тип структур был определен и исследован ***В. Кудрявцевым, А. Подколзиным*** и ***А. Болотовым*** [158] и представляет интерес как в качестве самостоятельного формального объекта исследований, так и в прикладном аспекте. Структура данного типа определяется как кортеж $\langle Z^d, W, V\rangle$, где Z^d – множество d-мерных целочисленных векторов, координаты которых определяют местоположения копий конечного W-автомата с a состояниями, $n+p$ входными и $m+p$ выходными каналами наряду с определяющей системой уравнений, а именно:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi_1(x(t), b(t), s(t)) \\ a(t) = \varphi_2(s(t)) \\ s(t+1) = \varphi(x(t), b(t), s(t)) \end{cases} ; \quad E = \{0,1\};\ \varphi_1 : E^n \times E^p \times S \to E^m,\ \varphi : E^n \times E^p S \to S,\ \varphi_2 : S \to E^p$$

где S – множество состояний W-автомата, а $x=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $b=\{b_1,b_2,...,b_p\}$, $a=\{a_1,a_2,...,a_p\}$, $y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ и s – обозначают основной вход, боковой вход, боковой выход, основной выход и состояние W-автомата соответственно; тогда как $V=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p\}$ $(\alpha_k \in Z^d;\ k=1..p)$ определяет шаблон соседства структуры; каждый вектор с координатами $\alpha_k \in V$ для еди-

ничного автомата с координатами α определяет автомат с координатами $\alpha+\alpha_k$, с k-м боковым выходным каналом которого соединен k-й боковой вход α-автомата ($k=1..p$). Автомат W называется *порождающим* ***ОСВВ***, φ_1 – *локальной выходной фунцией*, φ_2 – *функцией взаимодействия* и φ – *локальной функцией переходов*. ***ОСВВ*** функционирует в дискретные моменты времени $t=1,2,...$ Детальнее с определением ***ОСВВ*** можно ознакомиться в [158].

Наряду с исследованиями ***ОСВВ*** в качестве некоторого специального класса бесконечных автоматов (*свойства реализуемых ими отображений, сводимость структур к более простым, вопросы композиции структур*) были рассмотрены также и их прикладные аспекты для решения задач математического характера. Среди прикладных задач следует отметить такие, как реализация отображений булевых матриц и распознавание классов такого типа матриц посредством ***ОСВВ***, временная оценка вычисления в ***ОСВВ*** значений отображений булевых матриц, решение систем линейных уравнений и др. [158].

7. *Связанные картографические решетки* (***СКР***) подобны ***ОС***-моделям тем, что они функционируют в дискретное время и на дискретных решетках. Однако каждая ячейка поддерживает некоторую непрерывную переменную. ***СКР*** впервые были введены ***К. Кейнко***, который достаточно детально исследовал их свойства. Целый ряд приложений ***СКР*** в физике можно найти в физических журналах. Интересен сравнительный анализ ***ОС***-моделей, ***СКР*** и ***LGCA*** в решении задач моделирования сложных химических реакций. При этом, *клеточные нейронные сети* (***КНС***) фактически являются подклассом ***ОС***-моделей с тем отличием, что используют непрерывные состояния, которые могут быть дискретны или непрерывны по времени. *Непрерывный пространственный автомат* (***НПА***) походит на ***ОС***-модель, за исключением того, что его клетки формируют континуум также, как и допустимые их состояния. На основе ***НПА***, в частности, предложен непрерывный аналог игры «***Жизнь***» и показано, как такой автомат может быть реализован, используя основные операции вычислений на местности. В различных контекстах представляют интерес и т.н. *неоднородные* ***ОС***-модели, в которых элементарные автоматы могут иметь различные локальные функции перехода. Так, модель ***Кауфмана*** стохастических булевых сетей допускает различные правила ***AND***-связей с интересными приложениями в теоретической биологии. Неоднородные ***ОС***-модели могут использовать не только различные локальные функции перехода, но и различные индексы соседства. ***Демарис Д.*** провел довольно интересный анализ взаимосвязи нейронных сетей, нелинейной динамики, ***КНС***, ***СКР*** и ***ОС***-моделей. С детальным описанием вышеуказанных моделей и их прикладными аспектами можно ознакомиться в работах, представленных в [536].

А. Хеммерлинг определил т.н. *системы автоматов Тьюринга* (***САТ***), которые характеризуются как клеточные структуры, чьи клетки имеют только целочисленные координаты. Между клетками определена некоторая локальная связь (*например, каждая клетка структуры «видит» состояния только своих соседей*) и то, что клетка может быть разбита на две либо исчезнуть [468]. ***САТ*** симулируют ***ОС***-модели в реальное время и наоборот. Определенное преимущество ***САТ*** состоит в том, что имеется возможность исследовать «*аппаратную сложность*» вычислений, т.е. определять максимальное количество клеток, которые одновременно участвуют в вычислении. В данном направлении можно также определять и иерархии классов сложности вычислений [536].

Введя основные определения, понятия и обозначения ***ТОС***, остальные будем вводить по мере надобности. В последующих главах монографии рассматриваются наиболее фундаментальные проблемы математической теории, главным образом, классических ***1-ОС***; при этом, большинство представленных результатов обобщаются и на случай высших размерностей. Более полное обсуждение данной проблематики может быть найдено и в наших книгах [1,3,5,8,9,88,90], а также в других приведенных в библиографии работах.

1.3. Архитектура теории однородных структур и ее приложений

В настоящее время ***ТОС*** представляет собой достаточно хорошо развитую самостоятельную ветвь теории абстрактных бесконечных автоматов, которая имеет широкую сферу приложений в различных областях науки и техники. ***ОС-***модели хорошо отражают специфические особенности систем, базирующихся исключительно на локальном взаимодействии и обеспечивающих вычислительную универсальность**.** При этом**,** прикладные аспекты моделирования были широко исследованы с теоретической точки зрения**.** Приложения ***ОС-***моделей весьма обширны**,** охватывая такие разделы современного естествознания как моделирование динамики жидкостей, физических, химических, биологических и геологических процессов, вычислительные науки, обработка образов, моделирование климактических процессов, социальных процессов и т.д.

Поэтому, нами предпринята попытка определить ***архитектуру ТОС*** и ее приложений с сегодняшней точки зрения. Предложенная архитектура в значительной степени носит субъективный характер и не претендует на исчерпывающую полноту охвата ***ТОС-***проблематики. Вместе с тем, в ней учтен ряд замечаний и предложений, полученных после обсуждения данного вопроса по материалам ряда наших предыдущих работ [5,39,54,90]. Мы надеемся, что этот важный в методическом и методологическом планах вопрос будет в дальнейшем более конкретизирован и уточнен в требуемых пределах**,** ибо его анализ может оказаться довольно полезным для выбора дальнейших путей исследования в данной области и будет способствовать лучшему архитектурному оформлению ***ТОС*** и ее приложений. Ряд вопросов архитектуры ***ТОС*** и ее приложений**,** представляющих определенный гносеологический интерес, рассматриваются в наших книгах [3,5,8,9,54,90]. Здесь же мы только кратко резюмируем основы концепции предлагаемой архитектуры ***ТОС-***проблематики в целом.

Зарождение ***ТОС-***проблематики восходит к пятидесятым годам прошлого века и к настоящему времени в этом направлении накопилось достаточно много работ теоретического и прикладного характера. Наряду с работами, формирующими ключевые направления развития ***ТОС*** и ее приложений, существенно большее число работ относится к так называемым *специальным* направлениям, имеющим те или иные степени общности и влияния на дальнейшее развитие области. При этом вполне возможно, что из некоторых работ такого на сегодня сугубо специального характера в последующем смогут вырасти свои достаточно развитые направления ***ТОС-***проблематики**.** Между тем, при анализе большинства публикаций только отдельные специальные работы были использованы нами для формирования архитектуры ***ТОС*** и ее многочисленных приложений. В этом контексте предполагается, что вопросы, рассмотренные в этих работах, в ближайшее время должны получить свое дальнейшее развитие. Общая принципиальная архитектура ***ТОС*** и ее основных приложений представлена на нижеследующем рис. ***13.***

На уровне ***А однородные структуры*** подразделяются на *бесконечные* и *конечные*. ***Конечные ОС-***модели представляют собой обычные конечные автоматы, наделенные специфической ***клеточной*** структурой, характеризующейся набором конечного числа взаимосвязанных идентичных единичных автоматов, функционирующих синхронно либо асинхронно согласно заданной локальной функции перехода и индексом соседства, а также граничными условиями. Вместе с тем *клеточная* организация таких конечных автоматов и принцип их функционирования способствуют появлению у них качественно новых свойств**,** недоступных конечным автоматам традиционной организации. Прежде всего, это относится к возможности производить ***параллельные*** обработку информации и вычисления**,** а также более *адекватно* моделировать целый ряд важных естественных и

искусственных процессов, систем, объектов, феноменов и явлений, характеризующихся ярко выраженным ***коллективным*** поведением.

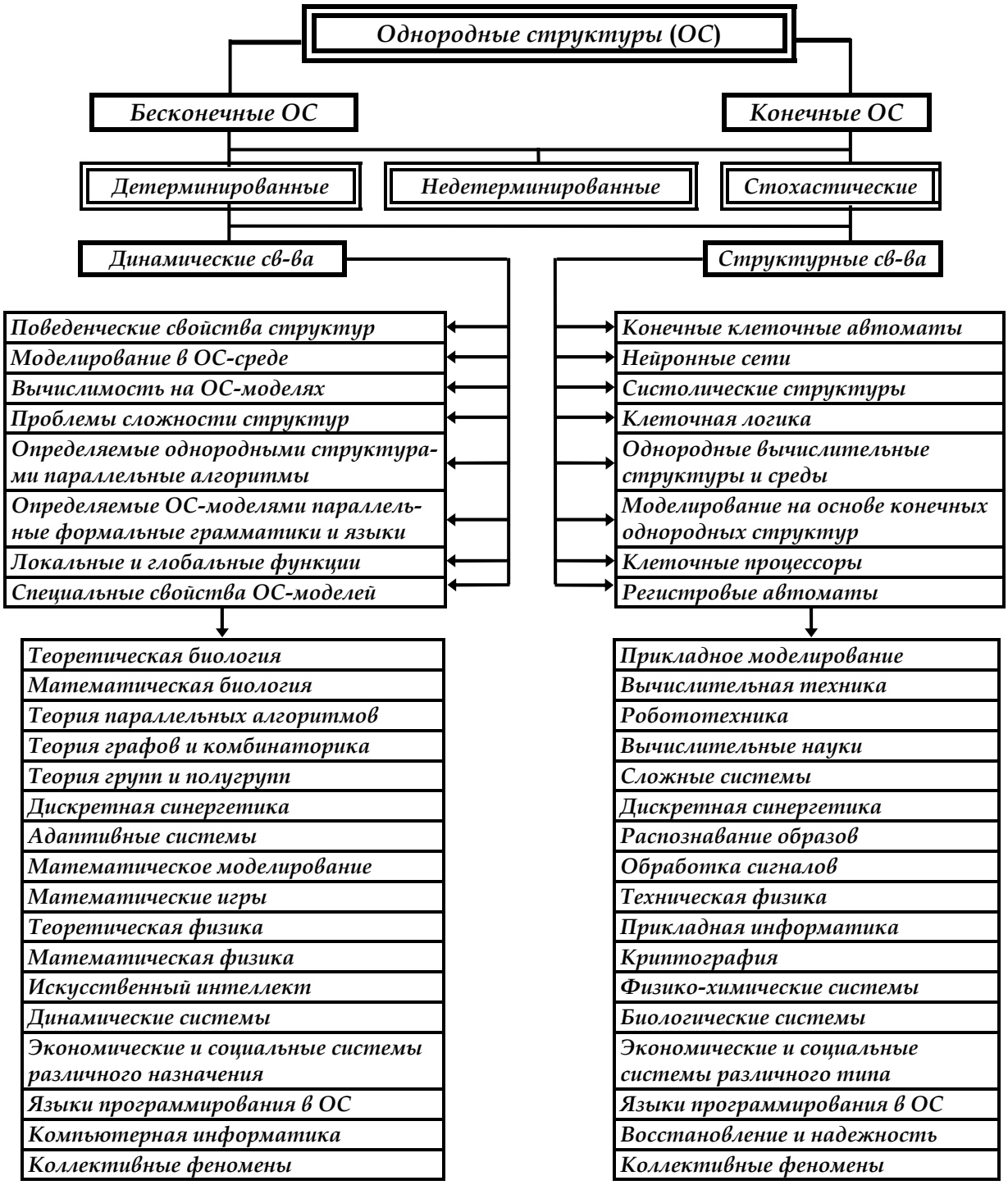


Рис. 13. Архитектура теории классических однородных структур и ее приложений.

В настоящее время теория ***конечных ОС-***моделей интенсивно развивается целым рядом исследователей [135,145,148-150,158-160,162,164-168,172-178,536]; и в первую очередь, наиболее интенсивные работы проводятся японскими математиками, получившими целый ряд весьма интересных результатов. Однако наибольший интерес *конечные* ***ОС-***модели представляют именно с прикладной точки зрения в связи с исследованиями и проектированием вычислительных систем и устройств высокопараллельного действия. В этом крнтексте конечные ***ОС-***модели составляют теоретическую основу для весьма широко-

го класса электронных устройств высокопараллельного действия *(клеточные и матричные процессоры, однородные вычислительные структуры и среды, систолические процессоры и т.д.).* Вместе с тем, конечные ***ОС*** представляют собой превосходные средства для моделирования целого ряда и других объектов, явлений и процессов, в основу которых может быть положена *(или уже лежит)* концепция клеточной организации *(биология развития, распознавание образов, обработка изображений и т.д.).* И здесь в настоящее время имеется большое количество разноплановых применений конечных ***ОС-***моделей. В настоящей книге конечные ***ОС-***модели практически не рассматриваются, однако отдельные теоретические и прикладные результаты, а также наиболее общие направления ряда их прикладных аспектов будут упоминаться в контексте рассмотрения бесконечных классических ***ОС-***моделей – основного обсуждаемого ниже объекта. Более подробную и актуальную информацию по конечным ***ОС-***моделям, в первую очередь, прикладного характера заинтересованный читатель может найти в работах [108,148-150,155,174-176,349, 370,543,544,536], а также в интернете по ключевой фразе «***finite cellular automata***».

Бесконечные ОС-модели представляют собой бесконечные клеточные автоматы, состоящие из бесконечного количества локально взаимосвязанных между собой единичных идентичных автоматов, глобальное поведение которых определяется локальными взаимодействиями соседних *(согласно индекса соседства)* автоматов. При определенной степени абстрагирования *бесконечные* ***ОС*** можно ассоциировать с некоторыми моделями абстрактных *Вселенных*, динамика которых определяется их внутренними законами развития. Такого типа ***ОС-***модели оказываются весьма удобными в тех случаях, когда требуется исследовать динамику поведения *(историю)* различного рода объектов, процессов, алгоритмов и феноменов, в основе которых лежат принципы *(высокий уровень параллелизма, дискретность, локальность взаимодействий, обратимость, неограниченность ресурсов и т.д.)*, присущие функционированию бесконечных классических ***ОС-***моделей.

Подобные модели могут быть применены в таких различных областях как распознавание образов, машинное самовоспроизведение, морфогенез, теория эволюции и развития, адаптивные и динамические системы, искусственный интеллект и робототехника, вычислительная техника и информатика, математика, кибернетика, синергетика, физика, социология, космология и др. С логической точки зрения ***ОС*** являются бесконечными абстрактными автоматами со специфической внутренней структурой, определяющей целый ряд важных черт и допускающей использование их в качестве новой перспективной среды моделирования различных дискретных процессов, допускающих режим максимального распараллеливания, обратимости динамики и адекватно отражающих важнейшие черты коллективного поведения. В целом, ***ТОС-***проблематика может рассматриваться как ***структурная*** и ***динамическая*** теория *бесконечных* абстрактных автоматов, наделенных *специфической* внутренней организацией, носящей качественный характер и представляющей собой самостоятельный раздел современной кибернетики.

В настоящее время ***ТОС-***проблематика действительно может рассматриваться в качестве вполне самостоятельного раздела современной математической кибернетики со своими методами, проблематикой и приложениями, тогда как сами ***однородные структуры*** служат формальной средой для моделирования многих дискретных процессов и явлений в различных областях современного естествознания. Вообще говоря, *бесконечные* ***ОС-***модели наилучшим образом отвечают, прежде всего, именно теоретическим аспектам исследуемых посредством их проблем, тогда как *конечные* ориентированы, в первую очередь, на прикладные аспекты. Точнее говоря, если конечные ***ОС*** используются в качестве ***моделей*** некоторого объекта, то бесконечные структуры представляют собой собственно саму ***среду*** моделирования, в которую погружается та либо иная исследуемая модель. Как самостоятельный объект теоретических исследований бесконечные ***ОС-***модели более естественны и своей потенциальной *бесконечностью*, обеспечивающей их це-

лым рядом чрезвычайно важных универсальных категорий (*вычислимость, самовоспроизводимость, моделируемость, обратимость и т.д.*). Именно классу бесконечных ***ОС***-моделей и посвящена основная часть настоящей монографии.

ОС-модели являются наглядным примером получения достаточно сложных объектов и их динамики на основе весьма простых исходных элементов и предпосылок (*аксиоматики*). В этом смысле они существенно лучше отвечают математическим моделям, используемым в более абстрактных областях теоретической физики, дискретной синергетики, математической биологии, теории хаоса и др., чем более практическим моделям вычислительных наук, базирующимся на современной микроэлектронной технологии. Этим целям наилучшим образом отвечают именно конечные ***ОС***-модели. Однако, несмотря на это, бесконечные ***ОС*** – более чем полезные абстракции, ибо обладают двумя фундаментальными свойствами – высокий параллелизм функционирования и глобальное поведение, определяемое локальными взаимодействиями небольшого количества элементарных конечных автоматов [536].

Обе перечисленные черты (*высокие параллелизм и локальность взаимодействий*) вытекают из того обстоятельства, что *бесконечные* ***ОС*** являются высоко абстрагированными моделями реального физического мира, функционирующими во времени и пространстве. Именно поэтому они лучше, чем многие другие формальные архитектуры могут быть отображены на физические реалии в их современном понимании. Более того, сама ***ОС***-концепция довольно хорошо приспособлена для решения задач моделирования из различных областей таких, как вычислительные науки, биология развития, теоретическая физика, математика, кибернетика, дискретная синергетика, хаос, экология, социология, теория дискретных динамических систем и др. Вместе с тем, по мнению целого ряда исследователей ***ОС***-концепция сможет выйти на серьезный междисциплинарный, значимый для важных физических модельных приложений, уровень при условии возможности обеспечения фундаментального свойства ***обратимости*** динамики ***ОС***-моделей.

В соответствии с нашими современными представлениями свойство ***обратимости*** присуще всем физическим законам. Используя ***ОС***-подход в качестве *концептуальной* основы физического моделирования, необходимо достаточно четко представлять себе, что такие фундаментальные физические характеристики как ***однородность*** и ***локальность*** обеспечиваются уже на уровне самой ***ОС***-аксиоматики. Тогда как свойство обратимости непосредственно ею не обеспечивается и его необходимо запрограммировать в каждом конкретном случае определения ***ОС***-модели. На сегодня существует целый ряд весьма интересных работ, исследующих как само понятие обратимости в контексте ***ОС***-концепции, так и подходы к программированию *обратимых* ***ОС***-моделей, позволяющих симулировать на микроскопическом уровне важные физические и иные объекты, процессы, и явления [4,5,12,88,90,108,139,141,146,155,176,198,207,257,262,307,375-377,536].

Сказанное и имеющиеся на сегодня многочисленные примеры приводят нас к вполне однозначному заключению о том, что *бесконечные* ***ОС*** могут представить значительный интерес как относительно новая перспективная среда моделирования и исследования многих дискретных процессов и феноменов, допускающих высокую степень распараллеливания, свойства однородности, локальности и обратимости, так и в качестве весьма интересного самостоятельного математического объекта исследований.

На ***B***-уровне ***однородные структуры*** подразделяются на три основных класса, а именно: ***детерминированные, недетерминированные*** и ***стохастические***, определения которых даны в предыдущем разделе. Исследования данных классов ***ОС***-моделей ведутся, в основном, в двух направлениях – динамические (*поведенческие*) и *структурные* свойства (*уровень* ***C***; *рис.* ***13***). Изучение структурных свойств, особенно конечных ***ОС***, играет чрезвычайно важную роль, в первую очередь, в связи с исследованием архитектур перспективной высокопараллельной ***BT*** на базе современной микроэлектроники и нанотехно-

логий, робототехники, распознавания образов, обработки сигналов, модельного исследования ряда проблем биологии развития и др. Все подобные работы могут быть классифицированы как *макроклеточные* исследования, так как во главу угла ставится исследование свойств ***ОС-***моделей в зависимости от структуры их единичного *клеточного* автомата. Как правило, структурно такие автоматы-клетки являются существенно более сложными, чем единичные автоматы ***ОС-***моделей, изучаемых с точки зрения их динамических свойств.Число их внутренних состояний велико, а их локальное функционирование описывается, как правило, достаточно сложной функцией перехода.

Прикладные аспекты ***ТОС*** в большинстве случаев требуют, как правило, четкой спецификации структуры единичных автоматов и их взаимосвязей. Мотивировками для подобных работ являются вопросы, связанные с параллельной обработкой информации, клеточной логикой, итеративными и нейроподобными сетями, систолическими структурами, робототехникой, распознаванием образов, обработкой сигналов, адаптацией и др. Математическая теория конечных ***ОС-***моделей интенсивно разрабатывается целым рядом исследователей [28,127,135,138,145,148-150,155,158-160,162,164,165-168,544,545,536], тогда как ее структурными аспектами занимается достаточно широкий круг исследователей во многих странах**,** использующих данные модели в качестве аналогов или прототипов разнообразных исследуемых объектов.

Структурные аспекты ***бесконечных ОС,*** как правило, рассматриваются во взаимосвязи с их динамическими свойствами**,** когда требуется установить либо связать динамику ***ОС-***модели со структурой ее единичных автоматов. Данные проблемы зачастую возникают при моделировании в ***ОС-***среде клеточных развивающихся систем и исследованиях ряда важных биологических феноменов развития ***(****регенерация****,*** *регуляция****,*** *дифференцировка клеток****,*** *рост****,*** *морфогенез****,*** *самовоспроизведение и др****.)*** [1,3,4,5,12,41,44,45,51,64,108,113,114,117, 155,174-177,87,224,536]. Наконец, структурный подход в виде структуризации множества внутренних состояний единичного ***z-***автомата бесконечной ***ОС*** позволяет в ряде случаев весьма существенно упрощать исследование целого ряда проблем их динамического поведения, включая вопросы погружения в них различных моделей и алгоритмов.

Динамические свойства в отличие от структурных предполагают исследования ***ОС,*** как правило *бесконечных***,** в основном, с точки зрения историй конфигураций ***(****как конечных****,*** *так и бесконечных****)*** с течением времени. При таком подходе абстрагируются от внутренней структуры единичного автомата ***ОС-***модели, а внимание акцентируется только на основных параметрах модели**:** размерность, ее локальная и глобальная функции перехода, алфавит внутренних состояний единичного автомата, индекс соседства, наряду с типами множеств исследуемых конфигураций, определяющих ***динамику*** структуры в виде историй ее начальных конфигураций. Исследования динамики бесконечных ***ОС-***моделей представляет большой интерес, в первую очередь, с теоретической точки зрения, когда изучаются *фундаментальные* или *глобальные* свойства тех или иных процессов и явлений в структурах. Исследуемой переменной при таком подходе является ***конфигурация (****конечная или бесконечная****)*** структуры**,** а однородное пространство структуры используется для погружения в него самих историй конфигураций. Тогда как сама ***история*** конфигурации представляет собой динамику некоторой модели**,** определяемой начальным условием ***(****конфигурацией****)*** и локальными правилами ***(****функцией переходов* в ***ОС-****среде****)*** развития. В настоящее время имеется не так уж и много работ, посвященных анализу динамических свойств бесконечных ***ОС-***моделей во всей их полноте и использующих формальные средства. В основном, для подобных целей используется компьютерное симулирование. Основной причиной этого являются весьма существенные затруднения, встречающиеся при общем исследовании данной проблемы. С другой стороны, в целом ряде случаев бывает довольно сложно разграничивать *динамические* и *структурные* свойства ***ОС-***моделей, что естественно не уменьшает сложности их исследования.

Наконец, следует отметить, что имеют место принципиальные различия между конечными и бесконечными ***ОС-***моделями**,** говорящие в пользу рассмотрения их в качестве отдельных разделов общей ***ТОС-***проблематики. Если конечные структуры **(***являющиеся конечными автоматами***)** предназначены, прежде всего, для моделирования конкретных объектов и исследования на их основе ***(1)*** алгоритмов**,** лежащих в основе их функционирования, и ***(2)*** для получения более эффективного их функционирования за счет использования специфической внутренней клеточной организации, допускающей высокий уровень параллелизма, то бесконечные структуры представляют собой *среду* моделирования в широком смысле слова и позволяют исследовать объекты, феномены и процессы самого общего характера в различных областях, являясь высоко абстрагированными моделями реального физического мира, функционирующими во времени и пространстве. По этой причине они лучше, чем многие другие формальные архитектуры могут быть отображены на физические реалии в их современном понимании**.** Более того, бесконечные ***ОС-***модели представляют большой интерес также в качестве самостоятельного формального объекта исследований**.** Наряду с этим**,** до сих пор не известно достаточно глубоких результатов из теории *бесконечных* ***ОС*****,** представляющих существенный интерес для *конечных* структур и их приложений, исключая достаточно тривиальные случаи. Однако при последующем использовании *конечных* ***ОС-***моделей, содержащих достаточно большое количество единичных автоматов **(***в частности**,** использование сверхбольших однородных вычислительных структур и сред**,** появление которых связывается с дальнейшим прогрессом микроэлектроники**,** биотехнологий и нанотехнологий***)***, картина может весьма существенно измениться в лучшую сторону и, при этом, достаточно быстро.

Интенсивность исследований в области ***ТОС-***проблематики довольно неравномерна и может быть в определенной мере отражена табл. ***1*****,** носящей в некоторой степени субъективный характер. Вместе с тем, несмотря на определенную субъективность представленного анализа, он по ряду оценок отражает основное распределение усилий исследователей по ***ТОС-***проблематике в настоящее время [32,108,110,111,149,150,155,201,349,536].

Таблица 1

Класс однородных структур	***С в о й с т в а***			
	Динамические		***Структурные***	
	Бесконечные	***Конечные***	***Бесконечные***	***Конечные***
Детерминированные	***И***	***И***	***Сл***	***И***
Недетерминированные	***Ср***	***Ср***	***Сл***	***Сл***
Стохастические	***Ср***	***Ср***	***Сл***	***Сл***

Примечание: И, Ср и ***Сл*** обозначают соответственно *интенсивные*, *средней* и *слабой* интенсивности исследования в том или ином направлении ***ТОС-***проблематики.

На ***D-***уровне (рис. ***13)*** представлены основные разделы *динамического* и *структурного* аспектов ***ТОС-***проблематики. В качестве основных разделов *структурного* аспекта можно отметить**:** однородные вычислительные структуры и среды, систолические структуры, клеточная логика, нейронные сети, робототехника, клеточные процессоры, моделирование и конечные клеточные автоматы. Ввиду четкой направленности настоящей книги наполнение этих разделов рассматриваться здесь не будет, а заинтересованный читатель отсылается к многочисленным источникам, приведенным в списке литературы и в [536], содержащим богатую библиографию по данной проблематике.

В последние два десятилетия весьма интенсивно исследуются различного типа динамические системы, прежде всего, в качестве моделей физических систем. На самом общем уровне динамическая система представляет собой некоторое ***A-***множество величин, называемых *состояниями системы*, и правила *перехода* ***F*****,** определяющие с течением времени переход из одного состояния в другое. Правила перехода **(***функция***)** ***F*** по состоянию

$a^t \in A$ системы в ***t-***момент времени определяет ее следующее состояние $a^{t+1} \in A$ в момент ***(t+1),*** т.е. $F(a^t) = a^{t+1}$ ***(t=0,1,2,..).*** Из данного определения и определения ***ОС-***модели следует, что вторая является *подклассом* класса всех динамических систем, имеющих специфическую клеточную организацию ***(****структурный аспект****)*** и функционирующих сугубо параллельным образом ***(****динамический аспект****)*** при переходе из одного состояния ***(****конфигурации****)*** под действием ***ГФП*** в другое. Сказанное стимулирует не только сугубо теоретитический интерес к ***ОС-***моделям, но и их весьма многоаспектные приложения [536].

Основными разделами *динамического* аспекта ***ОС-***проблематики можно полагать следующие**:** поведенческие возможности**,** конструируемость**,** моделирование и вычислимость в ***ОС,*** определяемые ***ОС-***моделями формальные параллельные алгоритмы и языки, глобальные и локальные функции перехода, проблемы сложности, а также специальные свойства структур, не входящие в перечисленные выше разделы теории. В данной книге именно динамическому аспекту ***ТОС-***проблематики будет уделено основное внимание, поэтому вкратце охарактеризуем основное содержание вышеперечисленных разделов динамической теории однородных структур.

В рамках *поведенческих возможностей* и *конструируемости* в первую очередь предполагается исследование динамических аспектов структур, определяющих их экстремальные возможности по генерации ***КФ-***последовательностей в среде ***ОС-***моделей. К данной тематике относятся такие вопросы, как неконструируемость, универсальная воспроизводимость конечных конфигураций, условия генерации специальных типов конфигураций, различные критерии конструкционных возможностей структур и т.д. Стержневой проблемой данного раздела является исследование глобальных поведенческих свойств ***ОС-***моделей в терминах локальных взаимодействий составляющих их единичных автоматов. Важными подразделами здесь являются такие**,** как характеристика динамики последовательностей конфигураций и их аналитические свойства, влияние на динамику конфигураций основных параметров ***ОС-***модели, идентификация ***ОС-***модели по генерируемым ею ***КФ-***последовательностям**,** обратимость динамики конфигураций и определяющие ее критерии, и др. Результаты исследований по данному направлению играют фундаментальную роль при изучении глобальных динамических свойств ***ОС-***моделей как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Наряду с этим, они составляют достаточно существенную часть собственного аппарата исследований по ***ТОС-***проблематике в целом, а также в целом ряде ее приложений [536].

Так как ***ОС*** представляют собой превосходную среду моделирования различного рода дискретных параллельных процессов, алгоритмов, явлений, динамических систем клеточной природы, а также целого ряда физических объектов в их динамике, то теоретические аспекты *моделирования* в структурах представляют особый интерес. Не взирая на широкомасштабность данного раздела, здесь можно выделить целый ряд довольно интересных подразделов общего назначения таких, как моделирование одной ***ОС*** другой при заданных условиях ***(****в реальное время**, при подавлении тех или иных свойств моделируемой структуры**, с обратимой динамикой**, при уменьшении размера шаблона соседства и/или мощности алфавита моделирующей структуры и т.д.)***,** моделирование структурами известных алгоритмов и формальных систем, оптимизационные вопросы моделирования, вопросы надежности и восстановления и целый ряд других. При этом, в стороне остается весьма обширная область погружения в ***ОС-***модели конкретных объектов, явлений, процессов и алгоритмов. В этом направлении получено достаточно много интересных результатов [88,90,536], часть из которых рассматривается и в настоящей монографии.

Возрастающий рост интереса к параллельным обработке информации и вычислениям определяет важность исследования параллельных алгоритмов, определяемых ***ОС-***моделями. Действительно, любую ***ОС-***модель можно рассматривать как формальный ***параллельный*** алгоритм, определенный на множестве всех ее конечных конфигураций. Как

следует из определения ***ОС*-**модели**,** такой алгоритм допускает максимальную степень распараллеливания и на формальном уровне описывает функционирование целого ряда параллельных клеточных динамических систем**.** В данном направлении уже получен ряд интересных результатов, среди которых следует отметить работы по определению классов параллельных алгоритмов, наиболее эффективно погружаемых в ***ОС*-**модели. Установленная связь между модифицированными алгебрами ***Поста*** и классическими ***ОС*-**моделями позволяет использовать полученные в данном направлении результаты и в прикладной теории алгоритмов, имеющей многочисленные приложения в теории вычислений и теоретическом программировании [536].

К параллельным алгоритмам, определяемым классическими ***ОС*-**моделями, непосредственно примыкают и вопросы ***вычислимости*** в однородных структурах. А так как классические ***ОС*** могут служить формальной моделью параллельных вычислений, подобно тому, как машины Тьюринга являются абстрактной моделью современного подхода к понятию вычислимости, то сфера деятельности исследователей в данном направлении представляется чрезвычайно обширной как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. К настоящему времени в этом направлении получен целый ряд весьма интересных и важных результатов как теоретического, так и прикладного характера [5,88,90,536].

Сложность является одним из наиболее интригующих и интуитивных понятий современного естествознания. В свете классического определения ***ОС*-**модели понятие ***сложности*** вполне естественно предполагает два относительно *независимых* аспекта, а именно**:** *сложность* конечных конфигураций, как основного объекта исследования в динамике структур**,** и *сложность* глобальных функций перехода**,** определяющих собственно динамику исследуемого в ***ОС*-**модели объекта, явления либо процесса. Грубо говоря, если в первом случае исследуется изменение сложности *моментных* снимков динамики структуры, то во втором **–** сложность функций, управляющих этой динамикой. Оба данные аспекта весьма неплохо отвечают параллельной динамике функционирования ***ОС*-**модели и позволяют вводить определенные ***иерархии*** сложности для основных составляющих однородных структур, а именно **–** множества их конечных конфигураций и глобальных функций перехода.

Теория формальных грамматик (ТФГ) составляет часть общей теории абстрактных автоматов и в качестве одного из основных практических выходов имеет теорию языков программирования. Следовательно, изучение формальных параллельных грамматик и языков, определяемых ***ОС*-**моделями, языков допускаемыми и распознаваемыми ими, представляет несомненный интерес. С познавательной точки зрения чрезвычайно интересно определить *лингвистические* аспекты динамических клеточных систем в рамках общей ***ТФГ*.** Более того, имеются успешные попытки использования ***ТФГ*** для создания теории развития биологических форм **(***морфогенеза***)** и в этом плане параллельные грамматики, в частности, определяемые ***ОС*-**моделями, могут сыграть весьма существенную роль при формальном исследовании *лингвистических* аспектов развивающихся клеточных систем, а также вычислительных высокопараллельных ***ОС*-**моделей. Основные работы в данном направления исследуют параллельные грамматики **(***и порождаемые ими параллельные языки***),** определяемые ***ОС*-**моделями, допускаемые и распознаваемые ими формальные языки, в рамках традиционной проблематики ***ТФГ*,** а также и с более широких позиций формальных грамматик [5,88,90,536]**.**

Так как ***глобальная*** динамика ***ОС*-**модели полностью определяется локальными взаимодействиями единичных автоматов структуры на основе локальной функции перехода **(*ЛФП*),** то вопросу исследования этих функций уделяется достаточно много внимания. Здесь наряду с задачами *локального* характера исследуются и вопросы влияния того или иного типа ***ЛФП*** на *глобальную* динамику ***ОС*-**модели**.** В свою очередь глобальные функции перехода широко исследуются теоретико-множественными и групповыми метода-

ми как параллельные отображения, индуцируемые на множестве всех конфигураций структуры. Наряду с перечисленными существует целый ряд других интересных тем и методов исследования как локальных, так и глобальных свойств ***ОС***-моделей, многие из которых будут рассмотрены в настоящей книге в том или ином аспекте.

Помимо названных разделов поведенческой теории ***ОС***, имеющих достаточно хорошо устоявшиеся тематику, предмет и методы исследования, а также достаточно существенное наполнение результатами, существует целый ряд и относительно самостоятельных задач, представляющих определенный интерес для развития ***ТОС***-проблематики. К ним можно отнести, например, такие темы, как проблемы синхронизации сети автоматов и французского флага, специальные типы ***ОС***-моделей, выращивание различного типа конфигураций и др. С достаточной степенью субъективизма их можно относить либо к специальным вопросам ***ОС***-проблематики, или рассматривать их сугубо в качестве конкретных ***ОС***-моделей того или иного типа. Не исключено, что в дальнейшем некоторые вопросы динамической теории ***ОС***, считающиеся ныне специальными, со временем вырастут в отдельные ее направления со своими проблематикой, предметом и методами исследования, а также приложениями. В качестве конкретного примера можно привести задачу самовоспроизводящихся конечных конфигураций, во многом определившую развитие проблемы конструктивных возможностей классических ***ОС***-моделей.

Наконец, ***Е***-уровень отражает прикладные аспекты как динамической, так и структурной составляющих общей теории ***ОС***-моделей. Ввиду обилия и разноплановости полученных в данных направлениях прикладных результатов не представляется возможным дать здесь им сколько-нибудь детальный обзор, хотя в свете довольно значительной разобщенности исследователей по ***ТОС***-проблематике такая работа была бы весьма своевременной, интересной и полезной. При этом, следует иметь в виду, что многие прикладные разделы имеют место как для *динамических*, так и для *структурных* аспектов ***ТОС***-проблематики, а также для *бесконечных* и *конечных* ***ОС***-моделей с акцентом на соответствующие определяющие их характеристики. В частности, биологические модели роста рассматриваются в оптимизационном аспекте в среде *бесконечных* ***ОС***, но могут рассматриваться и в рамках *конечных* структур при исследовании процессов выращивания конкретных объектов [5,536]. Вопросы разработки языков программирования для ***ОС***-моделей также имеют специфику относительно *бесконечных* и *конечных* ***ОС***-моделей [33,108, 139,163,536]. Наряду со многими относительно естественными для ***ОС***-моделей предпринимаются попытки использования их в качестве основы для криптографии [208,536] и даже решения проблем урбанизации, социологии, экономики и целого ряда других достаточно экзотических областей [205,206,374,536]. Идея использования ***ОС***-концепции для сжатия/восстановления информации, включая информацию в виде сложных многомерных объектов, была предложена нами в монографии [4]. Заинтересованный прикладными вопросами читатель может обратиться к приведенным в перечне литературы источникам, содержащим в свою очередь достаточно полную библиографию по прикладному аспекту ***ТОС***-проблематики, много по данной теме можно найти и в [536]. Некоторые прикладные вопросы ***ТОС***-проблематики рассматриваются и в нашей книге.

Завершая раздел, нам хотелось бы сделать несколько замечаний общего характера. Во-первых, представленная здесь архитектура ***ТОС*** и ее приложений носит в значительной мере субъективный характер, хотя и отражает основные тенденции развития ***ОС***-проблематики в целом. При этом, она базируется, прежде всего, на исследованиях именно в области *классических* ***ОС***-моделей. Предполагается, что с течением времени предложенная архитектура будет уточняться в необходимых пределах и может послужить вполне удовлетворительной отправной точкой для дальнейшей работы по систематизации ныне бурно развивающейся ***ОС***-проблематики. Наряду с этим предложенная архитектура позволяет в определенной мере сформулировать некоторые перспективные направле-

ния для дальнейших исследований по ***TOC*-проблематике в целом. При этом, если представленная нами архитектура *TOC*-проблематики и носит субъективный характер, то с не меньшим основанием это можно сказать и о предложенной в [110] предметной классификации по данной проблематике. Вместе с тем еще раз следует особо подчеркнуть, что работа в обоих данных направлениях чрезвычайно важна и весьма актуальна в свете большого объема и обширной разноплановости полученных на сегодня результатов по *TOC*-проблематике, весьма часто находящихся на стыке различных предметных областей (*теория автоматов, математика, информатика, теория алгоритмов, физика, биология, урбанистика, экология, социология и др.*). Этого требует и относительно высокий уровень разобщенности исследователей по *TOC*-проблематике, не совсем понятный при современном уровне развития инфотехнологий, особенно в научной сфере.

Во-вторых, представляя в настоящей книге, в основном, собственные результаты, мы не будем строго придерживаться самой архитектуры *TOC* и ее приложений. Связано это с тем, что широкий охват *TOC*-проблематики и круг интересов не позволили нам полностью покрыть полученными результатами тот либо иной раздел архитектуры, хотя некоторые их подразделы разработаны достаточно детально. Поэтому изложение книги будет базироваться, скорее, на описании подразделов или групп достаточно тесно связанных проблем. Вместе с тем, уже из самого изложения будет несложно усмотреть достаточно адекватные соответствия между предложенной *TOC*-архитектурой и содержанием глав книги. Последующие шесть глав книги посвящены непосредственно фундаментальным вопросам *теоретического* аспекта *TOC*-проблематики, тогда как целый ряд интересных прикладных аспектов обсуждаются в заключительной главе монографии.

Наконец, представляя данную *архитектуру TOC* и ее приложений, следует сделать одно существенное замечание. Если составляющие ее *A*-уровень бесконечные и конечные *OC* исчерпывают данный уровень дифференциации структур, то уже на *B*-уровне, включающим три группы структур: *детерминированные*, *недетерминированные* и *стохастические*, полностью не покрывается все разнообразие существующих на сегодня видов *OC*-моделей (*для тех объектов, которые к ним сегодня относят*). Вместе с тем, именно эти три группы структур составляют основу современной *TOC*-проблематики и относительно их получена львиная доля результатов как теоретического, так и прикладного характера. Поэтому, беря за основу предложенную архитектуру, можно ее как содержательно расширять, так и детализировать отдельные ее составляющие. Однако мы, в первую очередь, хотели представить легко обозримую архитектуру, отражающую некий *базис* современной *TOC* и ее приложений, не отвлекаясь на более специфические ее аспекты.

1.4. Аппарат исследований в теории однородных структур

В настоящее время *математическая теория OC (TOC)* представляет собой достаточно хорошо развитый раздел теории абстрактных автоматов со своими проблематикой, методами исследования и многочисленными приложениями. В данном разделе мы представляем краткий набросок тех основных методов и подходов, которые составляют ***основу*** аппарата исследования различных аспектов *TOC*-проблематики, при этом основной акцент делается на именно ***классических OC*-моделях**, как объекте исследования. Настоящий раздел преследует следующие две основные цели, а именно.

Во-первых, нам хотелось бы показать, что *TOC* является весьма благодатной почвой для применения в ней результатов и методов из многих как *классических*, так и *современных* разделов чистой математики, кибернетики и вычислительных наук. Во-вторых, *TOC* в

настоящее время является еще не до конца сформировавшейся областью со своими общепринятыми, устоявшимися методами, подходами и собственным развитым аппаратом исследования. Большинство активно работающих по ***TOC-***проблематике исследователей используют свои излюбленные методы изучения тех либо иных проблем, которые определяются, как правило, их предыдущими опытом, интересами и вкусом. Поэтому предлагаемый обзор современного аппарата исследований по ***TOC-***проблематике поможет в определенной мере распространению некоторых сильных и хорошо зарекомендовавших себя методов, а также становлению самого аппарата исследования, привлечет к ***TOC-***проблематике и ученых из соответствующих областей математики, кибернетики, теории систем, математической и теоретической биологий, физики, информатики, вычислительных наук и др. Особую актуальность предлагаемому обзору придает весьма разобщенный характер исследований по ***TOC-***проблематике. Возможно, представленный обзор методов исследования вызовет полезные дискуссии и будет способствовать более широкому внедрению указанных методов в практику исследования и применения ***OC-***концепции достаточно широкими кругами исследователей из различных областей современных естествознания, и техники и технологий.

Сразу же здесь вполне уместно подчеркнуть, что многие из рассматриваемых ниже методов, составляющих современный аппарат исследований по ***TOC-***проблематике, использовались для получения результатов, обсуждаемых в рамках настоящей книги, однако ввиду ***(****во многом обзорного****)*** характера изложения мы посчитали целесообразным в соответствующих местах указывать лишь ссылки на оригинальные работы, где обсуждаемые вопросы изложены более детально и с требуемой долей формализма. Это позволяет заинтересованному читателю прояснять все необходимые детали применения того или иного метода исследований по ***TOC-***проблематике.

Таблица 2

Уровень	***Используемые методы исследований в TOC-проблематике***
15	***Компьютерные методы исследования OC-моделей, включая генетическои алгоритмы и программирование***
14	***Подходы на основе моделирования***
13	***Симуляционный подход***
12	***Структурный подход***
11	***Подходы и методы на основе общей теории систем***
10	***Статистико-стохастический подход***
9	***Подходы на основе теории сложности***
8	***Методы теории формальных грамматик***
7	***Методы теории рекурсивных функций и алгоритмов***
6	***Методы классической теории чисел***
5	***Методы смещающихся динамических систем***
4	***Методы на основе графо-топологического подхода***
3	***Методы групп, полугрупп и алгебр***
2	***Аппарат булевой алгебры и a-значных логик (a ≥ 3)***
1	***Базовый уровень аппарата исследований по TOC-проблематике***

Для решения хорошо известной проблемы декомпозиции ***ГФП*** в классических ***OC-***моделях были использованы результаты по неконструируемости **–** *аппарат неконструируемых конфигураций***.** Несомненно, среди наиболее значительных результатов по теории ***OC-***моделей наибольшую известность получили методы доказательства существования конфигураций**,** ранее именуемых таким экзотическим названием как «*Сад Эдема*»**,** и связанные с ними проблемы существования и разрешимости. Однако нами для подобного типа конфигураций был определен более естественный и научно-приемлемый термин

«*неконструируемые*», ныне широко используемый в русскоязычной терминологии по однородным структурам (*клеточным автоматам*). Данный аппарат сформировался следующим образом. В самом начале своего становления ***ТОС*** состояла из ряда относительно самостоятельных проблем, решение каждой из которых потребовало создания собственных подходов. Для решения данных проблем был использован и классический аппарат дискретной математики с учетом специфики исследуемого объекта – *однородных структур*. Следует отметить, что именно специфика исследуемых свойств ***ОС***-моделей была здесь определяющей, тогда как использование методов и результатов дискретной математики носило в значительной мере подчиненный характер. При этом, использование традиционной дискретной математики, и в первую очередь комбинаторики, настолько пронизывает большинство используемых приемов, методов и подходов при исследованиях по ***ОС***-проблематике, что данные разделы совершенно уместно отнести к ***базовому*** уровню аппарата теории однородных структур [1,3-5,8,9,22,53-56,88,90,536].

В результате решения довольно широкого круга проблем возник своеобразный ***первый*** уровень аппарата исследований по ***ТОС***-проблематике, ориентированного, прежде всего, на решение сугубо специфических вопросов динамики конфигураций в классических ***ОС***-моделях. Первый уровень аппарата исследований составили методы изучения и полученные результаты по таким фундаментальным проблемам, как неконструируемость конфигураций, моделирование одной ***ОС*** другой, сложность конечных конфигураций, декомпозиция ***ГФП*** и целый ряд других. Таким образом, выросший из потребностей самой ***ТОС***-проблематики, *первый* (***базовый***) уровень аппарата исследований изначально был ориентирован на изучение специфических свойств динамики ***ОС***-моделей. В процессе развития математической ***ТОС*** и ее многочисленных приложений постоянно расширяется и сам арсенал средств и методов ***базового аппарата*** исследований по ***ТОС***-проблематике (табл. **2**), на сегодня ставшего достаточно внушительным.

Так как каждая ***ГФП*** в ***А***-алфавите внутренних состояний единичных автоматов ***ОС*** взаимно однозначно определяется ***ЛФП*** в том жесамом алфавите, а ***ЛФП***, в свою очередь, представима соответствующей функцией ***а***-*значной логики*, то для исследования свойств ***ГФП*** (***ЛФП***) аналитическими методами можно вполне успешно использовать и хорошо разработанный аппарат ***а***-значных логик (***а*** ***≥ 3***). Именно его использование и позволило во многих деталях прояснить проблему ***декомпозиции ГФП*** в классических ***ОС***-моделях, а также продвинуть решение ряда других важных задач, связанных с их динамикой [12,23,28,32,55,72-74]. В случае бинарных ***ОС***-моделей весьма эффективно используется развитый аппарат булевой алгебры.

В частности, для решения вышеупомянутой проблемы декомпозиции ***ГФП*** для классических бинарных ***ОС***-моделей был использован подход, базирующийся на функции ***К. Шеннона***, введенной для оценки сложности реализации функций алгебры логики [28]. Зачатки использования аппарата алгебры логики для исследования проблемы декомпозиции ***ГФП*** в бинарных ***1-ОС*** можно найти уже у ***Дж. Батлера*** [130]. На основе алгебры логики можно исследовать специфические черты передачи информации в вычислительной среде клеточных и систолических процессоров, являющихся одним из практических выходов вычислительной ***ОС***-модели [536].

С другой стороны, использование ***а***-значных логик при составном ***а***-числе для исследования свойств ***ОС***-моделей встречает ряд затруднений, что уже в случае исследования проблемы декомпозиции ***ГФП*** потребовало определения одного нового типа алгебраической системы (***АС***) с полиномиальной арифметикой [12,73,55,102]. Такой подход позволил использовать алгебраические методы для исследования ***ГФП*** (***ЛФП***) наряду с рядом других вопросов ***ТОС***-проблематики, ибо функции ***а***-значной логики могут быть представлены в такой ***АС*** в виде соответствующих полиномов по (***mod a***). Следует однако отметить, что несмотря на такую весьма очевидную связь между ***ЛФП*** и функциями

***a*-**значной логики, только сейчас они начинают интенсивно использоваться в исследованиях как *динамической*, так и *структурной* теорий классических ***ОС*-**моделей, а также целого ряда их прикладных аспектов [5,88,90,536].

В рамках исследования ***ЛФП (ГФП) ОС*-**моделей алгебраическими методами нам представляется также перспективным использование теории ***R*-*функций*** [215], которые в некотором смысле подобны функциям ***a*-**значной логики. Тем более, что данный подход может оказаться весьма перспективным при переходе к новому классу *непрерывных* ***ОС*-**моделей, предполагающих весьма интересные теоретические и прикладные выходы.

С исследованиями проблемы декомпозиции ***ГФП*** и целого ряда других вопросов динамики в классических ***ОС*-**моделях связано и применение аппарата групп, полугрупп и алгебр. Данная возможность обусловлена тем фактом, что глобальные параллельные отображения, индуцируемые ***ГФП***, образуют полугруппу ***(****а при некоторых дополнительных условиях и группу****)*** относительно операции композиции. Данный подход вполне успешно использовали ***Г. Цейтлин*** для исследования ряда свойств ***ПО*-**преобразований ***(****эквивалентных классическим* ***ОС*-*моделям*****)*** и ассоциированных с ними *модифицированных* алгебр ***Э. Поста*** [216] и мы для исследования структуры разложения полугруппы всех глобальных параллельных отображений, индуцируемых ***ГФП*** в классических ***ОС*-**моделях [72-74]**.** Интересно**,** что полученные в данном направлении результаты обусловлены комбинированным применением методов как теории полугрупп, так и базового аппарата исследований ***ТОС*-**проблематики. Данный алгебраический подход представляется довольно перспективным при исследованиях целого ряда фундаментальных свойств классических ***ОС*-**моделей наряду с подходом на основе полиномиальной алгебры [90].

На основе методов линейной алгебры ***С.Л. Блюмин*** [129] получил ряд интересных критериев наличия некоторых феноменов в линейных классических ***2-ОС*** специально введенного типа. Это позволяет говорить о возможности успешного использования классических алгебраических методов для качественного описания и исследования некоторых типов линейных ***ОС*-**моделей. Исследуя взаимодействие единичных автоматов в клеточных пространствах, ***Э. Вагнер*** [217] показал, что наиболее широко используемые в ***ОС*** индексы соседства ***(Неймана, Мура, Кодда, Холланда*** *и др.****)*** могут быть описаны графо-групповыми методами на основе абелевых групп с конечным числом образующих.

Исследования свойств локальных и глобальных отображений, определяемых классическими ***ОС*-**моделями**,** является одной из ключевых проблем ***ТОС*.** Наибольшее число результатов в данном направлении получено для класса ***1-ОС*** [1,4,72,100,536]. Именно для данных целей использовалась весьма разнообразная техника исследований, из которой следует особо выделить методы изучения ***эндоморфизмов*** смещающихся динамических систем [116]. Данный подход является весьма естественным, учитывая вышесказанное о том, что классические ***ОС*-**модели представляют собой собственный *подкласс* класса всех динамических систем. При таком подходе основная техника исследования *классических* ***1-ОС*** опирается на свойства смещающихся динамических систем**,** которые оказались хорошо приспособленными для анализа их методами теории графов [536].

Используя данную возможность, ***М. Насу*** [124] получил ряд весьма интересных свойств динамики ***ОС*-**моделей на основе графо-топологического подхода. Он, в частности, показал, что многие важные свойства глобальных параллельных отображений**,** индуцируемых ***ГФП*** классических ***1-ОС*,** вполне можно рассматривать и как специальные случаи свойств отображений, индуцируемых гомоморфизмами графов**.** Целый ряд достаточно интересных свойств классических ***ОС*-**моделей с использованием теории графов был получен и ***В.Б. Кудрявцевым, А.С. Подколзиным и А.А. Болотовым*** [158]. В последнее время для исследования классических ***ОС*-**моделей все чаще используются методы алгебраической теории графов и динамических смещающихся систем [219,220,536]. На данном пути прослеживается тесная связь между методами теории графов и ***ТОС*.** Так, группа

французских математиков показала, что ***ОС***-модели можно использовать для решения ряда проблем теории графов, а именно: декомпозиция блоков, минимизация деревьев, гамильтоновы циклы и целый ряд других, что дает еще один хороший пример обратного влияние ***ОС***-концепции на развитие других областей, в частности, математики.

Из классической теории конечных автоматов ***(КА)*** хорошо известен широко используемый для их определения и исследования подход, базирующийся на представлении ***КА*** посредством размеченного графа, определяемого следующим естественным путем. На содержательном уровне функционирование ***КА*** можно представить себе следующим образом. Если в ***t***-момент времени ***КА*** находится в одном из $s_t \in S=\{s_0, s_1, ..., s_n\}$ внутренних состояний и на его вход поступает v_t-сигнал из алфавита $V=\{v_1, v_2, ..., v_m\}$, то в следующий $(t+1)$-момент ***КА*** переходит в новое состояние $s_{t+1} \in S$, т.е. ***КА*** функционирует согласно программе, состоящей из конечного числа команд вида: $v_t s_t \Rightarrow s_{t+1}$. Переходы ***КА*** из одного внутреннего состояния в другое могут описываться не командами, а матрицей переходов или размеченным графом. Однако первый способ определения ***КА*** является малообозримым при большом числе состояний и более удобным является именно графический способ его определения. В таком случае каждому внутреннему состоянию автомата сопоставляется вершина графа, а каждой команде $v_t s_t \Rightarrow s_{t+1}$ – ребро, ведущее из s_t-вершины в s_{t+1}-вершину и помеченное v_t-символом. Тогда классическую ***ОС***-модель можно рассматривать как ***бесконечный*** автомат, определяемый командами вида $c_t \tau^{(n)}=c_{t+1}$, где $c_t, c_{t+1} \in C(A,d)$ – внутренние состояния автомата (*глобальные конфигурации*) и $\tau^{(n)}$ – вход (*глобальная функция перехода*), который постоянен и на графе состояний не отмечается. Поэтому для исследования динамических свойств *классических* ***ОС***-моделей вполне приемлем и подход на основе ***графов состояний***, используемый достаточно эффективно [72,88,90,145,147,158,160,166-169,217,219,244,303,307,385,536].

Динамические свойства всех бесконечных *периодических* конфигураций в классических ***1-ОС*** интенсивно исследовались японскими математиками школы ***Хисао Ямада*** [219] и ими в данном направлении получен целый ряд весьма интересных результатов. Для исследования данной проблематики все интенсивнее начинают использоваться и методы классической теории чисел. В этом направлении интересные теоретико-числовые трактовки генерируемых одномерными ***ОС***-моделями конфигураций и их связью с проблемой неконструируемости можно найти в [221] и в некоторых других работах [536].

Рассматривая глобальные параллельные отображения, индуцируемые классическими ***ОС***-моделями на множестве всех конечных ***КФ***, можно показать, что любая ***ГФП*** является *словарной* примитивно-рекурсивной функцией [72-74]. Поэтому некоторые динамические свойства ***ОС***-моделей могут описываться и исследоваться и на основе теории рекурсивных функций [4]. Использование данного подхода позволяет получать довольно изящные доказательства динамических свойств ***ОС***-моделей. При этом рассматриваются только соответствующие *словарные* функции и области их значений. Данный подход оказался весьма эффективным при исследованиях алгоритмической разрешимости некоторых проблем динамики ***ОС***-моделей [4,5,72-74]. К его недостаткам (*даже не взирая на возможность применения довольно хорошо разработанного аппарата рекурсивных функций при решении ряда проблем алгоритмического характера*) следует отнести неконструктивность доказательств, тогда как в силу специфики концепции ***ОС*** и их приложений во многих случаях на первый план выдвигается именно ***конструктивность*** получаемых результатов и прозрачность их интерпретации в той или иной прикладной области.

Теория формальных грамматик ***(ТФГ)*** в настоящее время достаточно хорошо развита и тесно примыкает к общей теории абстрактных автоматов. Следовательно, изучение динамики ***ОС***-моделей с точки зрения определяемых ими параллельных грамматик и ге-

нерируемых параллельных языков представляет несомненный интерес. Впервые исследование классических ***ОС-***моделей в контексте ***ТФГ*** было начато нами в ***1974*** и впоследствии данной темой занимался ряд исследователей [50,77,78,222,536]. Методы на основе ***ТФГ*** позволили не только исследовать *параллельные* грамматики и языки, определяемые ***ОС-***моделями, но и привнесли немало нового в саму проблематику однородных структур как классических**,** так и недетерминированных**.** Однако наши результаты относятся в основном к одномерному случаю. В настоящее время возрастает интерес к изучению параллельных грамматик, чьи языки являются не множествами строк ***(****слов****)***, а множествами областей в ***d-***мерном ***(d>1)*** пространстве. Это позволяет перенести методы и проблематику многомерных параллельных грамматик на общий случай ***ОС-***моделей, и наоборот. При этом, исследованиям подвергаются формальные языки, определяемые как детерминированными**,** так и недетерминированными ***ОС-***моделями**.** Подобный подход представляет определенный интерес не только с точки зрения собственно ***ТОС,*** но также в плане лингвистического описания ***ОС-****подобных* моделей клеточных динамических систем различной природы. Определенную значимость данная проблематика представляет и для теории параллельных языков программирования, а также теории алгоритмов и вычислений. Подобно случаю традиционных формальных грамматик ***ОС-***модели можно исследовать и в рамках класса комбинаторных систем со специальными сугубо параллельными продукциями [379]. Целый ряд весьма интересных работ посвящен вопросам языков, допустимых ***ОС-***моделями и распознаваемых ими [536].

Вопросам сложности алгоритмов и вычислений уделяется в вычислительных науках ***(****да и не только в них****)*** достаточно много внимания. При этом, *теория сложности* в значительной мере зависит от положенных в ее основу вычислительных моделей и мер сложности. С целью сопоставления результатов по *иерархии сложности* относительно различных вычислительных моделей можно использовать метод моделирования одного алгоритма другим, но это далеко не всегда дает желаемые результаты. Так, например, ряд сравнительных вычислений на машинах Тьюринга и классических ***1-ОС*** показывает**,** что могут иметь место определенные *смещения* в иерархии сложностей ***(****вплоть до ее частичного нарушения****)*****,*** возникающие при переходе от одного типа вычислительных моделей к другому [12,72,87,536]. Поэтому, несмотря на развиваемую ***М. Блюмом*** и его последователями идею *аксиоматического* построения теории сложности, не зависящей от конкретной концепции вычислительной модели, значительный интерес представляют теории сложности на основе специальных концепций алгоритмов и мер сложности**.** Это особенно важно с точки зрения прикладных аспектов ***ТОС-***проблематики и теории вычислений. Так в случае первой **–** это параллельная обработка информации**,** моделирование в биологии развития, физическое моделирование и целый ряд других прикладных аспектов [536].

Существует ряд работ по применению методов синергетики и теории хаоса к исследованию динамики ***ОС-***моделей [536]**.** В частности**,** в [541] проиллюстрировано применение двух различных определений хаоса**,** введенных для общих дискретных временных динамических систем ***(DTDS)*****,** к случаю ***1-***мерных ***ОС-***моделей. Имеются работы [541], описывающие поведение, наблюдаемое в классе т.н. «*диссипативных*» ***ОС-***моделей, т.е. моделей, для которых внешняя среда может так или иначе вводить «*энергию*» для динамического влияния на историю развития ***ОС-***моделей.

Исследование стохастических ***ОС-***моделей естественно предполагает использование и статистических, и стохастических методов. Так, например, при исследовании асимптотики некоторых классов стохастических ***ОС-***моделей нами использовались хорошо известные результаты по стохастическим матрицам и цепям ***Маркова*** [4,39]. Ряд исследователей также использовали статистико-стохастические подходы при исследовании того либо иного типа стохастических ***ОС-***моделей [136,142,150,171,536]. Наиболее активно в этом направлении работают ***С. Вольфрам*** и его сотрудники [132-134,136,138,155]. Ста-

тистические методы могут быть использованы и для детерминированных ***ОС-***моделей. Например, локальная структурная теория [142] базируется на использовании статистических методов для исследования детерминированных клеточных систем и представляет некую аналитическую альтернативу методу Монте-Карло при исследованиях ***ЛФП*** в ***ОС-***моделях. Ряд методов исследования ***ОС-***моделей можно найти и в разделе ***8.4.***

Для исследования ***ОС-***моделей используются и традиционные средства статистической физики. Например, расширения ***Чепмена-Энскога*** используются для исследования динамики ***ОС-***моделей. Для характеристики динамики ***ОС-***моделей использовались и методы *перенормировки***.** Используются также символическая динамика наряду с экспонентами ***Ляпунова,*** вычислениями энтропии и фрактальной размерностью. Хорошие обзоры данных подходов можно найти у ***R. Badii*** и ***A. Politi*** [536], а также у ***А. Ильяшинского*** [542]. Ряд работ, использующих эти подходы, можно найти и в других ссылках [536].

Наряду с исследованием ***ОС-***моделей методами и средствами собственно самой ***ТОС (****ее* ***базовый*** *аппарат)* и рассмотренных выше разделов математики и кибернетики достаточно перспективным представляется исследование динамики ***ОС-***моделей средствами и методами общей теории систем. Показано [63], что классические ***ОС-***модели естественным образом вписываются в определенный класс динамических систем ***(****стационарных однородных динамических систем)* и их можно исследовать новыми достаточно мощными средствами. Ряд свойств отдельных классов ***ОС-***моделей можно исследовать и в рамках алгебраических методов пространства состояний. Так, в работах ***Г. Вунша*** [126] методами теории систем исследуются линейные дискретные клеточные системы. Теория клеточных систем основывается на теории функций и многочленов от нескольких действительных или комплексных переменных и представляет собой *цифровую* реализацию теории многомерных систем. Клеточная система может быть получена из соответствующей многомерной системы посредством дискретизации по пространственным и временным переменным. Тогда квантование алфавитов многомерной системы и приводит непосредственно к понятию ***ОС-***модели в ее общем понимании. ***Г. Вунш*** и его последователи предложили ряд подходов к исследованию таких систем. Подобные результаты могут оказаться весьма полезными при исследованиях как детерминированных, так и стохастических ***ОС-***моделей, являющихся собственными ***подклассами*** класса всех клеточных динамических систем.

Действительно, отказ от линейности граничных условий и ограничение числа состояний клеток системы приводит нас к понятию *классических* ***ОС-***моделей, тогда как отказ от детерминированности функций переходов **–** к *стохастическим* ***ОС-***моделям. Естественно, что исследование ***ОС-***моделей в рамках клеточных систем накладывает свои ограничения на использование собственных методов таких систем, однако здесь появляется возможность получения аппарата исследования и неклассических ***ОС-***моделей. С другой стороны, результаты и методы собственно ***ТОС*** могут оказаться весьма плодотворными и для самой теории клеточных систем. Таким образом, исследование ***ОС-***моделей средствами такой междисциплинарной теории, как общая теория систем, позволит значительно легче устанавливать аналогии между целым рядом процессов, объектов, явлений и феноменов, моделируемых в среде однородных структур [536].

Более того, в настоящее время имеется целый ряд веских доводов в пользу того, что существенное продвижение в деле построения абстрактной теории систем возможно на основе использования модулей над кольцом полиномов. Такой подход, возможно, позволит на существенно более общем уровне охватить ряд классов динамических систем, включая и параллельные дискретные динамические системы, собственным подклассом которых являются и рассматриваемые нами вычислительные ***ОС-***модели.

Как уже отмечалось, ***ОС*** представляют собой не только прекрасную среду моделирования, но и самостоятельный класс математических объектов**,** которые могут быть ***(****и долж-*

ны) исследоваться соответствующими математическими методами**,** разработанными для иных целей**.** Так, некоторые из средств, используемых для описания и классификации дискретно-временных отображений могут быть распространены и на ***ОС-***модели, например, для систематического изучения рекуррентных конфигураций, ибо они хорошо характеризуют временную асимптотику такого типа моделей. При этом, исследование необратимые ***ОС-***моделей представляют особый интерес для изучения сложных динамических систем. Формальное математическое исследование ***ОС-***моделей, базирующееся на различных подходах и средствах из разичных разделов современной математики, представляет собой обширное поле деятельности, все еще полное открытых вопросов, чьи результаты уже достаточно значмтельны**.** Но усилия в данном направлении вполне оправданы**,** ибо только в дискретной математике ***ОС-***модели играют роль**,** аналогичную той, которую играют дифференциальные уравнения в непрерывной математике [536].

Целый ряд интересных методов исследования был предложен при решении отдельных задач ***ТОС-***проблематики. Так, например, ***К. Кобаяши*** для решения хорошо известной проблемы синхронизации сети автоматов [124] использовал следующую модификацию ***ОС-***модели. Каждый единичный автомат имеет конечные регистры, определяющие пути движения специального «***путешествующего***» автомата ***(ПАВ)***, являющегося единственным в структуре. Такой ***ПАВ*** может двигаться в структуре вдоль линий связи от одного единичного автомата к другому, производя необходимые действия. Подобная ***ОС-***модель позволяет сводить решение данной и целого ряда других проблем к разработке соответствующих алгоритмов движения ***ПАВ*** в структуре**.** До определенной степени подобный метод был предложен нами [54,58] для исследования операционных систем на предмет возможности распараллеливания выполняемых ими управляющих функций, которые в общем случае можно классифицировать как функции *поиска* нужных вычислительных ресурсов. Между тем, наш подход имеет и существенные отличия. Так, например, каждый единичный автомат ***ОС-***модели снабжен регистром, имеющим специальную структуру **–** одна часть регистра служит для организации связи между соседними автоматами в структуре для избирательной передачи информации, тогда как другая часть предназначена для управления работой функциональной части единичного ***z-***автомата. Какие-либо движущиеся автоматы в нашей ***ОС-***модели отсутствуют, упрощая вопросы ее конкретной реализации средствами современной микроэлектроники. В рамках предложенной нами ***ОС-***модели можно сформулировать многие задачи теоретического и прикладного характера в терминах проблемы о нахождении кратчайших путей между единичными автоматами в ***ОС-***модели.

Так, например, было показано [4], что в специальным образом структурированной ***ОС-***модели существует параллельный алгоритм, позволяющий идентифицировать минимальный путь от произвольного единичного автомата до любого заданного за время не большее, чем ***2*L,*** где ***L –*** кратчайшее расстояние между искомыми автоматами ***ОС-***модели. Несколько иного типа структуры единичных автоматов ***ОС-***модели предлагались нами и рядом других авторов для моделирования ряда процессов и феноменов в биологии развития, а также для реализации ряда алгоритмов параллельной обработки информации в однородных вычислительных системах, структурах и средах [1,3,4,12,26-28,41, 44,45,54,58,65,75,88,90,135,146,155,168,173-177,182,183,186,190,202,224,229,235,244,339,536].

Описанный выше подход можно определить как ***структурный,*** когда для упрощения исследования проблемы и интерпретации получаемых результатов единичный ***z-***автомат ***ОС-***модели наделяется определенной структурой **(***детализируется его функционирование***),** ориентированной на те или иные цели исследования**.** Подобный подход используется и при погружении в среду ***ОС-***моделей параллельных алгоритмов**.** Следует отметить, что ***структурный*** подход на сегодня является одним из наиболее эффективных при исследованиях в ***ОС-***моделях проблем *оптимизационного* характера. Формирование

структурного подхода представляет не только чисто методологический и теоретический интерес, но позволяет достаточно эффективно исследовать и сугубо прикладные вопросы, связанные с задачами моделирования на основе общей ***ОС-***концепции.

К структурному в определенной тепени примыкает и так называемый ***симуляционный*** подход, суть которого сводится к следующему. Для удобства и простоты исследования того или иного класса проблем, а также интерпретации полученных результатов один тип ***ОС-***модели заменяется *эквивалентным* ему другим типом. Так, например, для исследования в классических ***ОС-***моделях ряда проблем было определено понятие структуры ***ОС**** (раздел ***1.2***), *эквивалентной* соответствующей классической ***ОС-***модели. Во многих отношениях структуры ***ОС**** представляют собой значительно более удобное средство описания и исследования конкретных параллельных процессов, объектов, явлений и феноменов, погружаемых в среду классических ***ОС-***моделей. Практическое использование понятия ***ОС**** для задач моделирования различных дискретных процессов однозначно показало, что определенные таким образом структуры могут служить достаточно удобной формальной основой для разработки высокопараллельных языков программирования для вычислительных ***ОС-***моделей, наряду с удобным промежуточным средством решения целого ряда проблем для классических ***ОС-***моделей [4,12,72,75,83,108,536].

К симуляционному (*а также в связи с прикладными аспектами*) примыкает и метод ***моделирования.*** Суть данного метода состоит в моделировании одной ***ОС*** другой с удовлетворением определенных условий или в моделировании структурой известных алгоритмов (*как последовательных, так и параллельных*) переработки слов в конечных алфавитах, и наоборот. Такое моделирование может ставить перед собой самые разнообразные задачи [1,4,12,26-28,32,52,54-56,71-74,108,113-115,120-122,135,139,145-150,156,161,173-177,179-188,192-196,202-208,229,244,536]. Метод моделирования по своей сути является конструктивным и может успешно сочетаться и с другими методами, включая и неконструктивные. Так, например, моделируя ***SS-***машины посредством классических ***1-ОС*** и используя неконструктивные методы теории рекурсивных функций, было доказано [1] существование *креативных* множеств ***исчезающих*** конечных ***КФ*** в классических ***ОС-***моделях. Метод моделирования во многих случаях позволяет навести своего рода ***мосты*** между чисто теоретическими результатами и прикладными аспектами ***ТОС-***проблематики, в которых он до сих пор является одним из основных методов исследования.

Работая классическими методами посредством карандаша и бумаги, исследователь старается оперировать небольшим числом символьных объектов, обладающих значительной концептуальной глубиной (*векторы, матрицы, различного рода операторы и др.*), что обусловливается спецификой и возможностями человеческого мозга. Именно это обстоятельство, быть может, объясняет тот факт, что задачи как комбинаторного, так и оптимизационного характера считаются одними из наиболее сложных для исследования. И только с появлением современных ЭВМ и, в первую очередь класса ***ПК,*** весьма существенно расширилось исследование дискретных систем и систем с большим числом распределенных переменных. Типичным примером такой тенденции является чрезвычайно широкое компьютерное исследование ***ОС-***моделей, представляющих собой один из классов дискретных параллельных динамических систем, изучение которых формальными математическими методами (*в свете вышесказанного*) в целом ряде случаев встречает серьезные затруднения. Поэтому в последнее время существенно увеличилось количество различного рода результатов по динамическим свойствам ***ОС-***моделей сугубо ***эмпирического*** характера [108,138,139,149,155,156,258,268,269,349,355,536].

Действительно, в последнее время все более существенную роль в исследованиях по ***ОС-***проблематике начинает играть компьютерный подход. Учитывая сложность как исследуемых в ***ОС-***моделях процессов, объектов и явлений, так и сложность самой динамики структур, которые, порой, весьма существенно возрастают при определении новых ти-

пов структур (*полигенные, недетерминированные, стохастические и др.*), мы вынуждены обращаться к помощи современных типов ЭВМ, обеспеченных развитыми средствами диалога и отображения информации. В значительной степени этому способствует и массовое распространение класса *персональных* компьютеров ***(ПК)***, не уступающих по многим важным показателям мини-ЭВМ и даже ЭВМ более старших классов [17,33]. Использование ЭВМ для исследований по ***ТОС***-проблематике восходит к началу ***70-х*** годов, когда стали появляться первые программные средства для моделирования однородных структур с целью изучения тех или иных их аспектов и к настоящему времени таких средств имеется достаточно много, реализованных с различной степенью охвата задач моделирования и ориентированных на различные компьютерные платформы [1,3,4,6-11,13,17-19,22,26-28,32,108,155,156,163,174-176,229,232,239,242,244,269,536]. Данные локальные программные средства позволили прояснить целый ряд интересных вопросов по ***ТОС***-проблематике. Так, например, компьютерное моделирование позволило в значительной степени исследовать ряд аспектов проблемы неконструируемости в классических ***1-ОС*** и динамики ***2-ОС*** с рефрактерностью [1,4,5,7-10,269]. В рамках последующего развития данного подхода был разработан ряд достаточно развитых программных человеко-машинных систем, специально ориентированных на многоплановые исследования по ***ТОС***-проблематике [96,103,108,155,536]. Ряд таких средств рассматривается ниже.

Для многоцелевого исследования теоретических и прикладных аспектов ***ОС***-моделей, как одного из подклассов класса всех дискретных параллельных динамических систем ***(ДПДС)***, разработана система ***A-SVEGAL***, представляющая собой интегрированный интерактивный пакет для IBM-совместимых ***ПК*** [103]. Базовой частью пакета является система, позволяющая исследователю достаточно легко контролировать процесс вычисления динамики симулируемой ***ОС***-модели и управлять всем ходом вычислений так, что он может посвятить большинство своей интеллектуальной энергии собственно самому изучению интересующих его проблем: принятию решений, мониторингу и регистрации исследуемых феноменов, проверке и выдвижению гипотез и так далее.

Разработка и эксплуатация пакета ***A-SVEGAL*** и целого ряда более узкого назначения из программных средств, предназначенных для *компьютерного* симулирования ***ОС***, позволили в значительной мере уяснить ряд важных вопросов, связанных с моделированием ***ДПДС*** на ЭВМ классической последовательной фон-неймановской архитектуры и рассмотреть ряд проблем разработки параллельного программного обеспечения. В частности, подтвердилась значительная сложность моделирования целого ряда динамических аспектов ***ТОС***-проблематики на вычислительной технике, исповедующей *чуждую* ей последовательную модель вычислений. Именно поэтому ряд исследователей для создания эффективных экспериментальных средств исследования ***ОС***-моделей отказались от использования традиционных вычислительных средств, разработав ряд систем, базирующихся непосредственно на вычислительных ***ОС***-моделях [33,138-141,149,154,164,167,223,231,238,349,355,365,536]. Из средств данного типа наибольшую известность получили так называемые машины клеточных автоматов – ***C****ellular* ***A****utomata* ***M****achines* ***(CAM)*** [139,154], разработанные в ***МТИ (США)*** под руководством ***Т. Тоффоли*** и ***Н. Марголуса***. Эти ***CAM***-машины предназначены для организации разнообразных экспериментальных исследований по ***ТОС***-проблематике и эффективной демонстрации функционирования ***ОС***-моделей в режиме реального времени. В настоящее время ***CAM***-машины производятся в коммерческих целях и используются в целом ряде научно-исследовательских центров для решения разнообразных задач [154,155,536].

Вместе с тем, задачи моделирования ***d-ОС*** на ЭВМ традиционной архитектуры относятся к классу задач так называемой ***NP***-сложности, ибо время их моделирования определяется соотношением $T(m) \approx \alpha \times m^d$, где m – размер ребра d-мерного куба, содержащего активную область моделируемой структуры, и α – числовая функция, не убывающая с

ростом сложности ***ЛФП*** структуры. Именно поэтому активизировались работы по созданию ***ОС***-подобных вычислительных систем для задач моделирования **ОС** [355,536].

Одним из довольно перспективных путей программного исследования ***ОС***-моделей являются подходы на основе генетического программирования. Генетические алгоритмы, используемые для исследования ***ОС***-моделей, позволяют, в частности, выявлять локальные функции перехода, соответствующие которым глобальные функции перехода ***ОС*** определяют требуемую динамику [536]. Генетические алгоритмы в применении к ***ОС***-моделям можно представить,например, следующим образом. Для ***ЛФП*** модели добавляется механизм случайного изменения правил перехода (*мутации*). В частности, такой подход позволяет отыскивать кратчайший путь на графе. Структура графа кодируется некоторым образом в хромосомах единичного автомата ***ОС***-модели. При этом, предполагается, что алгоритмы, приобретенные вследствие мутаций и наследования, будут соответствовать решениям поставленной задачи и не только отмеченной. На наш взгляд, генетические алгоритмы могут способствовать обнаружению интересных типов ***ОС***-моделей. Так как ***ОС***, вообще говоря, можно рассматривать не только как модели *распределенных* динамических систем, но также в качестве парадигмы распределенных вычислений, то их вполне можно исследовать и средствами теории вычислений. Это тем более актуально, что ***обратимые ОС***-модели, сохраняющие информацию о своей временной истории, обеспечивают *обратимые* вычисления, представляющие особый интерес с точки зрения создания перспективных параллельных архитектур вычислительных средств.

На этом завершается краткий обзор основных методов, подходов и средств, используемых в исследованиях по ***ТОС***-проблематике, итоговая совокупность которых представлена в табл. **2.** При этом, следует отметить ряд существенных моментов. Во-первых, основное внимание было нами уделено динамическим аспектам теории *классических* ***ОС***-моделей. Между тем, *структурные* аспекты ***ОС***-моделей носят существенно более прикладной характер и требуют привлечения иных методов, имеющих сугубо конструктивные черты, хотя и здесь применимы некоторые из перечисленных подходов и методов. Во-вторых, лишь вскользь отмечался *обратный* эффект применения перечисленных методов и их влияние на стимулирование дальнейшего развития самих этих методов. Так, например, использование алгебраического подхода повлекло за собой определение новой алгебраической системы [102], исследование стохастических ***ОС***-моделей способствовало получению ряда результатов по стохастическим регулярным матрицам [39], исследования по динамике конечных ***КФ*** и проблеме декомпозиции ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях способствовали дальнейшему развитию подходов к понятию сложности [5, 72-74,82,88,90,108,536] и так далее.

Наконец предполагается, что представленный здесь краткий обзор методов и подходов к исследованиям по ***ТОС***-проблематике вызовет полезные дискуссии и будет способствовать более широкому внедрению указанных методов (*составляющих* ***аппарат*** *исследования*) в практику изучения и применения ***ОС***-концепции во всей ее полноте довольно широкими кругами исследователей и, в первую очередь, специалистами из соответствующих областей. Традиционным отечественным исследователям по ***ТОС***-проблематике данный обзор позволит расширить кругозор по возможному аппарату исследования и даст определенные подсказки по методам решения собственных проблем. По нашему мнению, все это позволит довольно существенно активизировать исследования по ***ТОС***-проблематике и будет способствовать скорейшему становлению собственного развитого аппарата исследований, наиболее приспособленного именно к специфике однородных структур и их многочисленных приложений. Естественно, будучи одним из типов динамических систем, а также формальных систем переработки слов, ***ОС***-модели допускают для своего исследования и более широкий спектр средств из областей, не упомянутых выше, с которыми заинтересованный читатель сможет ознакомиться в [536].

Глава 2. Проблема неконструируемости в классических однородных структурах

2.1. Предварительные сведения по проблематике

Вопросы ***неконструируемости*** являются фундаментальными в математической теории ***ОС*** и целом ряде ее приложений, особенно при использовании ***d-ОС*** в качестве концептуальных и прикладных моделей пространственно-распределенных дискретных динамических систем, из которых реальные физические системы являются наиболее предпочтительными прототипами. Именно поэтому данная проблематика открывает вопросы рассмотрения теоретических аспектов ***ОС***-моделей. Весьма серьезный гносеологический интерес проблема неконструируемости представляет в случае погружения в ***ОС***-модели космологических феноменов и объектов. Здесь она может ассоциироваться с различными аспектами проблемы достижимости тех или иных состояний или образований при формировании определенных космологических объектов. Аналогом отсутствия ряда типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях может служить, например, обратимость основных физических процессов и феноменов [1,3,5,53-56,90,150-152,157,268,273]. Данная проблематика становится все более актуальной как ввидуформирования современных пространственно-временных физических теорий, так и в связи с рядом попыток объяснения различных явлений и феноменов аномального с традиционной точки зрения характера. Центральной проблемой ***ТОС*** является задача характеризации глобальной динамики ***d-ОС*** как функции ее ***ЛФП***. Так как изучение историй ***КФ*** в ***ОС***-моделях играет основную роль при исследовании их динамики, то весьма важно получить условия существования так называемых ***неконструируемых КФ (НКФ)***. Проблема неконструируемости имеет место как для моногенных, так и для полигенных ***d-ОС***, а также и в определенной мере для конечных структур [1,3,5,8,9,30,43,53-57,61-64,66,68-74,80,90,128, 131,135,138,150,239,244,248,255,269,307,314]. Наряду с перечисленным проблема неконструируемости может рассматриваться и как важная составляющая собственного аппарата исследований по динамике классических ***ОС***-моделей.

Некоторым особенностям данной проблематики для класса конечных ***ОС***-моделей посвящен последний раздел главы и ей уделялось много внимания, прежде всего японской школой [135,185,230]. Тогда как для *полигенных* ***d-ОС*** данная проблема известна как проблема ***полноты: может ли произвольная конечная КФ быть сгенерирована из заданной начальной примитивной КФ посредством конечной последовательности ГФП полигенной ОС-модели?*** Изучением проблемы ***полноты*** занимался целый ряд исследователей, получивших много весьма интересных результатов в данном направлении [5,90,184-187, 240,248,256,294,304]. Для решения данной проблемы была использовалась техника, впервые предложенная ***Ямада-Аморозо*** [256], а также теория графов, использованная ***Насу-Хонда*** [248]. Прежде всего, ***Х. Ямада*** и ***С. Аморозо*** было доказано [256], что ***существует бинарная конечная ненулевая конфигурация, которая не может быть сгенерирована из примитивной КФ c_p посредством некоторой последовательности глобальных функций перехода бинарных полигенных 1-ОС с шаблоном соседства n=2.*** Опуская ряд промежуточных результатов, окончательное решение проблемы было получено ***А. Маруо***ка и ***М. Кимура*** [244,245,526], доказавшими следующий весьма важный результат.

<u>Теорема 1</u>. Любая конечная КФ $c \in C(d,A,\phi)$ может быть сгенерирована из примитивной КФ $c_p \in C(d,A,\phi)$ посредством некоторой конечной последовательности ГФП полигенной d-ОС, заданной в том же самом конечном A-алфавите.

Теорема ***1*** дает полное решение проблемы ***полноты*** в полигенных ***ОС-***моделях. Между тем, наряду с данной проблемой рассматривают также проблему полноты при условии ***монотонной*** генерации конечных конфигураций [248,256,536].

Проблема ***полноты*** в определенной мере характеризует конструктивные возможности *полигенных* ***ОС-***моделей и ее положительное решение доказывает широкие возможности данного класса однородных структур по генерации ими конечных ***КФ.*** Действительно, на основе результата теоремы ***1*** было показано, что: ***из любой ненулевой КФ $c_o \in C(d,A,\phi)$ посредством конечной последовательности ГФП полигенной ОС-модели можно сгенерировать любую наперед заданную КФ $c \in C(d,A,\phi)$*** [3]. Доказательство данного утверждения весьма просто. Здесь мы представим лишь набросок доказательства. Не теряя общности, рассмотрим класс полигенных ***1-ОС.*** Пусть $c_o \in C(1,A,\phi)$ – произвольная ***КФ*** $c_o = \square x_1 x_2 \ldots x_h \square$ ($x_j \in A$; $j=1..h$, $\square$ - *нулевая* ***КФ***) длины h и $\tau_1^{(2)}$ – глобальная функция перехода, определенная локальной функцией перехода $\sigma_1^{(2)}$ следующим образом, а именно:

$$\sigma_1^{(2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}0, & if \quad x_1x_2=00\\ 1, & otherwise\end{cases} \qquad \sigma_2^{(2)}(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & if \quad x_1x_2=01\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

и $\tau_2^{(2)}$ – глобальная функция перехода, определяемая локальной функцией перехода $\sigma_2^{(2)}$. Но тогда легко заметить, что имеет место соотношение $c_o \tau_1^{(2)t} \tau_2^{(2)} = c_p$. Таким образом, наше утверждение о *полной* конструируемости для случая полигенных ***ОС-***моделей легко следует из этого соотношения и теоремы ***1.*** Несмотря на прямую связь проблемы полноты с другими вопросами динамики ***ОС-***моделей, подробнее она рассматриваться не будет, однако ниже отдельные результаты по ней будут обсуждаться в контексте других вопросов ***ОС-***проблематики. Заинтересованный же читатель отсылается за более детальной информацией к цитированной выше литературе и к списку [536].

Совершенно иная картина имеет место для случая классических ***ОС-***моделей. В рамках данной проблематики исследуются также и вопросы суръективности и инъективности глобальных отображений, индуцируемых ***ГФП*** классических ***ОС-***моделей. Детальный анализ результатов в данном направлении представлен в работах [1,3,5,54,90,138,156,184-187,270-282]; некоторые из них приводятся ниже. Первые исследования по проблеме неконструируемости (*в нашей, но уже хорошо устоявшейся терминологии*) восходят к работам ***Э. Мура*** и ***Дж. Майхилла*** [123,128,230,274,275], породившим целый ряд весьма интересных исследований в данном направлении. При этом в определенном смысле можно сказать, что собственно математическая ***ТОС*** выросла из данной проблематики, до сих пор сохраняющей свои актуальность и привлекательность. В предлагаемой главе представлены наиболее важные результаты и современное состояние проблемы неконструируемости в классических ***ОС-***моделях наряду с обсуждением дальнейших путей исследований в данном фундаментальном направлении ***ТОС-***проблематики.

Прежде всего, с целью охвата всех типов ***неконструируемости*** вводится четыре класса ***НКФ*** и устанавливаются соотношения между ними, расширяя полученные на сегодня результаты в этом направлении. Устанавливается ряд критериев существования в классических ***1-ОС*** того или иного типа ***НКФ.*** При этом одни из них более удобны для теоретических качественных исследований, другие позволяют получать более приемлемые оценки для основных числовых характеристик ***ОС-***моделей. Особое внимание уделяется *алгоритмическому* аспекту проблемы неконструируемости и взаимосвязи его с другими вопросами *динамики* классических ***ОС-***моделей. В дальнейшем изложении вопросов ***НКФ-***проблематики, если не оговорено противного, основное рассмотрение будет проводиться для случая ***1-ОС,*** хотя большинство результатов обобщаются и на случай классических структур высших ***d-***размерностей ***(d > 1).*** Приводимые в главе результаты решают проблему неконструируемости в целом, тогда как рассматриваемые в данном на-

правлении более специальные вопросы позволяют исследовать проблему в деталях. Наряду с этим результаты по ***НКФ***-проблематике позволяют сформировать довольно эффективный аппарат исследования динамики классических ***ОС***-моделей.

2.2. Типы неконструируемости в классических ОС-моделях

Представление типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях начнем с понятия, восходящего к ***Э. Муру*** и ***Дж. Майхиллу*** [128,274,275], которые на его основе получили ряд основополагающих результатов по динамике ***ОС***-моделей и в значительной мере стимулировали теоретические исследования по ***ОС***-проблематике в целом.

<u>Определение 1</u>. Конфигурация $c_b \in C(A,d,B)$ конечного d-мерного B-гиперкуба (блока) единичных автоматов в d-ОС называется неконструируемой (НКФ) тогда и только тогда, когда не существует КФ $c \in C(A,d)$ такой, что $c_b \subset c\tau^{(n)}$ $(d \geq 1)$.

Из данного определения следует, что ***КФ*** конечного блока единичных автоматов является в ***ОС***-модели ***НКФ*** только тогда, когда она не может быть подконфигурацией некоторой ***КФ*** модели в момент времени, отличный от нулевого *(начального)*. Такую *неконструируемость* будем называть ***блочной*** *(или **НКФ**-типа)*. Если *блочная* c_b***-КФ*** конструируема, то она будет иметь ***c***-предшественников $(c_b \subset c\tau^{(n)})$ как из $C(d,A,\phi)$-множества, так и из $C(d,A,\infty)$-множества. Это с очевидностью следует из возможности имплантации в любого типа начальную ***КФ ОС***-модели блочной $c`_b$***-КФ*** такой, что $xc`_b y\tau^{(n)} = c_b$ $\{x,y \in C(A,d)\}$.

Данное понятие *неконструируемости* является наиболее сильным *(в определенной мере его можно называть **абсолютным**)*, вместе с тем в свое время породившим целый ряд недоразумений и дискуссий, в результате чего само понятие неконструируемости в классических ***ОС***-моделях было нами детально проанализировано и дифференцировано [1,3,5,30, 43,53-56]. Выбирая в качестве допустимых ***КФ*** некоторое множество $C \subset C(A)$, можно определять ***относительную*** неконструируемость в противовес *абсолютной* неконструируемости *(определения **1,4**)*, что позволяет не только детальнее исследовать саму суть неконструируемости в ***ОС***-моделях, но и получить достаточно мощные средства исследования многих динамических свойств классических ***ОС***-моделей.

<u>Определение 2</u>. Конфигурация B_S конечного d-мерного гиперкуба единичных автоматов в d-ОС называется неконструируемой относительно S-множества ($НКФ_S$) тогда и только тогда, когда не существует КФ $c^* \in S \subseteq C(A,d)$ такой, что $B_S \subset c^*\tau^{(n)}$.

Очевидно, в случае $S \equiv C(A,d)$ понятия ***абсолютной*** и ***относительной*** неконструируемостей совпадают. В противном случае любая ***НКФ*** является в той же ***ОС***-модели $НКФ_S$ относительно любого наперед заданного множества $S \subset C(A,d)$, но не наоборот. Понятие *относительной* неконструируемости в классических ***ОС***-моделях имеет целый ряд интересных интерпретаций теоретического и прикладного характера, что стимулирует его дальнейшее исследование, которое в настоящее время весьма активизируется [536].

Причина дифференцировки понятия неконструируемости в классических ***ОС***-моделях определяется дифференцировкой множества всех ***КФ*** $C(A,d)$ на два непересекающихся подмножества *конечных* $C(A,d,\phi)$ и *бесконечных* $C(A,d,\infty)$ конфигураций $[C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty) = C(A,d)$ и $C(A,d,\phi) \cap C(A,d,\infty) = \varnothing]$, которые относительно параллельного $\tau^{(n)}$-преобразования *(отображения)* неэквивалентны, а также используемыми определениями конфигураций. А именно, если множество $C(A,d,\phi)$ замкнуто относительно $\tau^{(n)}$-преобразования, то множество $C(A,d,\infty)$, в общем случае, незамкнуто. Объясняется это наличием состоя-

ния ***покоя***, удовлетворяющего определяющему соотношению для локальной функции перехода структуры: $\sigma^{(n)}(x,x,...,x)=x$ $\{x\in A\}$. Такие ***ОС***-модели могут служить в качестве некоторого аналога физических реалий и на протяжении дальнейшего изложения мы, если не оговорено противного, будем рассматривать структуры именно такого типа.

Использование множеств ***конечных***, ***блочных*** и ***бесконечных КФ*** позволяет продвинуть дифференцировку и уточнение понятия неконструируемости в классических ***d-ОС*** относительно предыдущего состояния вопроса [1,3,5,7]. Нетрудно убедиться, что понятие неконструируемости ***НКФ***-типа относится, в первую очередь, к блочным конфигурациям, что позволяет рассматривать два неэквивалентных, в общем случае, класса неконструируемости ***блочной*** и ***конфигурационной.*** Действительно, пусть для ***1-ОС*** существует ***блочная КФ*** c_b, являющаяся для нее ***НКФ***. Но тогда согласно определения ***1 КФ*** $\square c_b \square = c\in C(A,d,\phi)$ также будет ***НКФ;*** обратное же в общем случае неверно, о чем свидетельствует следующий простой пример. Рассмотрим классическую ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2\}$, простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$ и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$, определяемой параллельными подстановками следующего весьма простого вида, а именно:

$$00\Rightarrow 0 \quad 01\Rightarrow 1 \quad 02\Rightarrow 1 \quad 10\Rightarrow 1 \quad 11\Rightarrow 2 \quad 12\Rightarrow 1 \quad 20\Rightarrow 2 \quad 21\Rightarrow 1 \quad 22\Rightarrow 1 \qquad (23)$$

Очевидно, при $c_o=\square 11\square$ $c_o\tau^{(2)}=\square 121\square$, т.е. ***блочная КФ*** $c_b=2$ не является в структуре ***НКФ***. С другой стороны, конечная ***КФ*** $c_1=\square 2\square$ является в ней ***НКФ.*** Действительно, предположим, что существует ***КФ*** $c_o\in C(A)$ такая, что выполняется соотношение $c_o\tau^{(2)}=c_1$:

t=0	c_o	=	*...0 0 ----------*
t=1	c_1	=	*...0 2 0 ----------*
автоматы:			*.-1 0 1 2 .....*

Попытаемся выяснить вид такой c_o***-КФ***, исходя из ***ЛФП 1-ОС***, определенной параллельными подстановками (**23**). Легко убедиться, что для получения в ***0***-автомате c_1***-КФ 0***-состояния ***КФ*** c_o на автоматах (***0,1***) должна иметь (***0,0***)-состояния. Тогда ***2***-состояние для ***1***-автомата в ***КФ*** c_1 становится недоступным, ибо не существует в (**23**) подстановки $0x\Rightarrow 2$ $(x\in A)$, что и доказывает наше утверждение. Следовательно, в определенной подстановками (**23**) ***ЛФП*** структуры конечная ***КФ*** $c_1=\square 2\square$ является неконструируемой, тогда как блочная ***КФ*** $c_b=2$ является в ней конструируемой. Таким образом, ***блочная*** неконструируемость ***НКФ***-типа вызывает *конфигурационную* неконструируемость в ***1-ОС***, тогда как обратное в общем случае неверно. С учетом сказанного, можно определить новый тип неконструируемости ***НКФ-3***, возникающий на стыке блочной и конфигурационной неконструируемостей и допускающий ее качественное расширение, а именно.

<u>Определение 3</u>. Конечная КФ $c=\square c_b\square\in C(A,d,\phi)$ ***является неконструируемой НКФ-3 типа только тогда, когда*** c_b***-конфигурация d-мерного гиперкуба единичных автоматов d-ОС является блочно конструируемой при конфигурационно неконструируемой конфигурации c. Такую конечную c-КФ будем также называть НКФ-3; здесь*** $\square$ ***– «обрамление» блочной*** c_b***-конфигурации конечным числом 0-состояний «покоя».***

Обобщая вышеприведенное доказательство, можно показать, что существует не менее $N=(a-2)^{a-1}[(a-1)^{a^n-a}-(a-2)^{a^n-a}]$ ***1-ОС***, обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-3***. Для получения данной оценки используется модель ***1-ОС***, определяемая ***ЛФП*** с параллельными подстановками следующего весьма простого вида, а именно:

$$000\ldots 0\Rightarrow 0; \qquad 000\ldots 0x\Rightarrow x`\in A\setminus\{0,1\};$$
$$x_1x_2x_3\ldots x_n\Rightarrow x`_1\in A\setminus\{0\} \text{ – на остальных кортежах } <x_1x_2x_3\ldots x_n> \text{ и по крайней мере для одного из них имеет место соотношение } x`_1=1. \qquad (24)$$

Нетрудно убедиться, что в определенных таким образом ***1-ОС блочная КФ*** c_b***=1*** конструируема, тогда как конечная ***КФ*** $c = \square 1 \square$ является в структуре неконструируемой типа ***НКФ.*** Несложный подсчет дает вышеуказанную оценку для ***N***-значения. С учетом сделанных замечаний дополнительно к рассмотренным типам ***(НКФ и НКФ-3)*** определяем еще два типа неконструируемости в классических ***ОС***-моделях, а именно.

<u>Определение 4</u>. Конфигурация $c \in C(A,d,\phi)$ ***называется неконструируемой типа НКФ-1 в классической d-ОС только тогда,когда*** $(\exists c` \in C(A,d,\infty))(c`\tau^{(n)}=c)$ ***и*** $(\forall c^* \in C(A,d,\phi))(c^*\tau^{(n)} \neq c)$***. Конфигурация*** $c \in C(A,d,\phi)$ ***называется неконструируемой типа НКФ-2 в классической d-ОС только тогда, когда*** $(\exists c` \in C(A,d,\phi))(c`\tau^{(n)} = c)$ ***и*** $(\forall c^* \in C(A,d,\infty))(c^*\tau^{(n)} \neq c)$***.***

Очевидно, если в ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ существуют ***НКФ-1,*** то $(\exists c \in C(A,d,\infty))(c\tau^{(n)} = \square)$***.*** В целом ряде случаев различие *(на первый взгляд часто едва уловимое)* в определенных нами *четырех* типах *неконструируемости* оказывает весьма существенное качественное влияние на динамику ***классических ОС***-моделей**.** В целях более четкого акцентирования внимания на данных понятиях словами общепонятной терминологии можно сказать, что**:**

(1) блочная *неконстструируемость* ***(НКФ-****типа)* характеризуется невозможностью получения *блочной* c_b***-КФ*** ни из какой начальной ***КФ,*** т.е. $(\forall c \in C(A,d))(c_b \not\subset c\tau^{(n)})$***;*** естественно, любая ***КФ,*** содержащая такую ***блочную КФ,*** сама является ***неконструируемой;***

(2) *неконструируемость* типа ***НКФ-1*** {***НКФ-2***} характеризуется тем, что существуют ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$***,*** имеющие *предшественников* ***(****т.е.* ***КФ*** c^* *таких,* *что имеет место соотношение* $c^*\tau^{(n)}=c$***)*** только из множества $C(A,d,\infty)$ $\{C(A,d,\phi)\}$***;***

(3) *неконструируемость* типа ***НКФ-3*** характеризуется тем**,** что построенная на базе ***блочно конструируемой*** c_b***-КФ*** конечная ***КФ*** $c = \square c_b \square \in C(A,d,\phi)$ является неконструируемой**,** т.е. не имеет предшественников из $C(A,d)$***-***множества**.**

Рассмотрим вопрос существования ***НКФ-1*** для простейших типов ***1-ОС*** с минимальным индексом соседства $X=\{0,1\}$***.*** ***ЛФП*** структуры с бинарным алфавитом $B=\{0,1\}$ определяем следующим соотношением**:** $\sigma^{(2)}(x,y) = x^* = x+y \ (mod\ 2)$**,** т.е. определяется параллельными подстановками вида**:** $00 \rightarrow 0,\ 01 \rightarrow 1,\ 10 \rightarrow 1,\ 11 \rightarrow 0.$ Известно [53], что данная ***1-ОС*** не обладает ***НКФ,*** но обладает ***НКФ-1.*** Следовательно, любые две конечные ***КФ*** c_1***,*** c_2 $(c_1 \neq c_2)$ генерируют различные последовательности ***КФ,*** т.е. $\{c_1\tau^{(2)k}\} \cap \{c_2\tau^{(2)k}\} = \emptyset \ (k=1,2,...)$***.*** При этом, несложно показать, что ***в качестве НКФ-1 могут быть лишь конечные КФ, содержащие нечетное количество символов «1».*** Действительно, рассмотрим простую схему восстановления предшественников для произвольной конечной ***КФ c,*** а именно**:**

t=0	c^{-1}	...	0	0	0	...	...	...	...	...	0	0	1	1	1	...
	c^{-1}	...	1	1	1	...	...	...	...	...	1	1	0	0	0	...
t=1	***c***	...	0	0	1	x_1	...	x_j	...	x_{n-1}	0	1	0	0	...	...
		...	-2	-1	0	1	...	j	...	n-1	n	n+1	n+2	n+3	...	...

Не нарушая общности**,** начнем с правого конца ***КФ c.*** Для получения в момент ***t=1*** автоматом ***(n+2)*** состояния «***0***» в момент ***t=0*** состояния автоматов ***<n+2,n+3>*** должны быть ***(****в соответствии с* ***ЛФП)*** соответственно «***00***» либо «***11***»**.** Тогда для получения в момент ***t=1*** автоматом ***(n+1)*** состояния «***1***»**,** исходя из предыдущего, автомат ***(n+1)*** в момент ***t=0*** должен быть в состоянии «***1***» либо «***0***» соответственно, т.е. имеет место своего рода ротация состояний относительно автомата ***(n+2)*** в тот же момент ***t=0.*** С другой стороны**,** на автоматах в состояниях «***0***» подобной ротации не производится и их состояния в момент ***t=0*** совпадают с допустимыми состояниями следующего за ними автомата в тот же момент времени**,** например**,** для ***n***-автомата**.** Таким образом**,** *ротацию* состояний *предшественников* определяют лишь автоматы, находящиеся в момент ***t=1*** в состояниях «***1***»**.** И если их

количество в ***КФ c*** в момент ***t=1*** будет ***нечетным,*** то, как несложно убедиться, на левом конце предшественников c^{-1}, произойдет ротация состояний относительно их правого конца, т.е. обе возможные конфигурации-*предшественника* будут из множества $C(B,1,\infty)$, что и подтверждает наше предположение о неконструируемости типа ***НКФ-1*** для ***КФ c.*** С другой стороны, если $c \in C(B,1,\phi)$ и является конструируемой, то она будет иметь по одному предшественнику c^{-1} как из множества $C(B,1,\phi)$, так и из множества $C(B,1,\infty)$.

Множество $C(B,1,\phi)$ представляет собой набор конечных ***КФ*** следующего вида:

$$C(B,1,\phi) = \{1,11,1x_1x_2 \ldots x_n1 \mid x_j \in B;\ j = 1..n;\ n = 1..\infty\}$$

Из вышесказанного несложно получить достаточно интересное предложение: ***доля всех НКФ-1 относительно множества $C(B,1,\phi)$ равна 1/2,*** т.е. конфигурации ***НКФ-1*** составляют половину всех конечных конфигураций для простейшей бинарной ***1-ОС.***

Рассмотрим вопрос существования ***НКФ-1*** для класса ***1-ОС*** с общим индексом соседства ***X={0,1, ..., n-1}***, алфавитом ***A={0,1, ..., a-1}*** и ***ЛФП,*** определяемой соотношениями вида:

$$\sigma^{(n)}(x_o, x_1, \ldots, x_{n-1}) = x^*_o = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \pmod a$$

С учетом ***ЛФП*** данного типа структур несложно убедиться, что ***каждая конечная КФ с длины, меньшей n, будет в ней НКФ-1.*** Действительно, в противном случае для нее должна была бы существовать конечная ***КФ c**** длины $t < n$ такая, что $c^*\tau^{(n)} = c$ (*структура генерирует последовательности **КФ** строго возрастающей длины*). Но тогда согласно ее ***ЛФП КФ c*** должна была бы иметь длину $t+n-1$ $(t \geq 1)$, что противоречит нашему условию.

Так как структура этого типа генерирует из каждой конечной ***КФ c*** последовательность строго возрастающих по длине конфигураций, то обращение такой последовательности – последовательность предшественников (*игнорируя бесконечные **КФ***) приводит или к ***КФ*** по длине, меньшей ***n,*** а значит ***НКФ-1,*** либо непосредственно к ***НКФ-1,*** но большей длины, учитывая отсутствие ***НКФ.*** Таким образом, каждая конечная ***КФ c**** является или ***НКФ-1,*** или элементом некоторой последовательности $\{c^{\#}\tau^{(n)k} \mid k=1,2,\ldots\}$, где $c^{\#}$ - ***НКФ-1.*** Ввиду же отсутствия в структуре ***НКФ*** имеет место следующее соотношение, а именно:

$$(\forall c_1, c_2 \in C(A,1,\phi))(c_1 \neq c_2 \rightarrow \{c_1\tau^{(n)k} \mid k = 1,2,\ldots\} \bigcap \{c_2\tau^{(n)k} \mid k = 1,2,\ldots\} = \varnothing)$$

Следовательно, для такого типа ***1-ОС*** имеет место следующее соотношение, а именно:

$$\bigcup_j \{c_j\tau^{(n)k} \mid k = 0,1,2,\ldots\} = C(A,1,\phi); \qquad c_j\tau^{(n)0} \equiv c_j,$$

$$where\ \{c_j\} - a\ set\ of\ all\ finite\ configurations\ NCF\text{-}1$$

Таким образом, в структурах данного типа множество всех конечных ***КФ*** генерируется из множества ***КФ*** типа ***НКФ-1,*** включая и сами ***НКФ-1.*** Иными словами, множество всех ***НКФ-1*** является тем ***базисом,*** из которого генерируется все множество $C(A,1,\phi)$. Данные результаты несложно распространяются и на ***d-ОС*** подобного типа.

Наличие неконструируемости типа ***НКФ-3*** в ***ОС***-моделях определяет в некотором роде неожиданный результат: ***при конструируемом ядре (ненулевой части) конечной КФ сама она является абсолютно неконструируемой.*** При этом, как нетрудно убедиться, наличие для ***ОС***-модели неконструируемости типа ***НКФ-3*** влечет за собой наличие ***НКФ***-неконструируемости для нее; тогда как обратное в общем случае неверно. Например, простая ***ОС***-модель $\langle Z,\{0,1\},\tau^{(2)},\{0,1\}\rangle$ с ***ЛФП,*** определенной соотношением вида:

$$\sigma^{(2)}(x,y) = \begin{cases} 1, & if\ x = y = 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad (25)$$

обладает ***НКФ-***неконструируемостью уже на блочной ***КФ*** c_b***=101,*** тогда как в структуре отсутствует неконструируемость типа ***НКФ-3.*** Действительно, рассмотрим теперь произвольную блочно конструируемую ***КФ*** $c_b = x_1x_2x_3 \dots x_m$ $(x_k \in \{0,1\};\ k=1 \dots m)$ вида:

t :	*c1=*	.....	1	1	1	y_2	.....	y_m	0	0	0	.....
t :	*c2=*	.....	0	0	0	z_2	.....	z_m	1	0	0	.....
t+1:	c_b=	.....	0	0	x_1	x_2	.....	x_m	0	0	.....	.....

Из ее конструируемости следует существование для нее *предшественников* ***–*** *блочных* ***КФ c1*** и ***c2,*** заканчивающихся справа символами ***{0,1}.*** Но тогда из вида ***ЛФП*** (**25**) структуры нетрудно убедиться в наличии для ***КФ*** $c=\square c_b\square$ *предшественников* из ***C(A)-***множества, что доказывает отсутствие для таким образом определенной ***ОС-***модели неконструируемости типа ***НКФ-3.*** Нетрудно убедиться, что при наличии в ***ОС-***модели ***НКФ-3*** множество их бесконечно. Более того, можно показать, что в классе простых однородных структур $OC=<Z,A,\tau^{(2)},X=\{0,1\}>$ существуют модели, имеющие ***НКФ-3*** минимального размера $m = a-1$ [10]. Имеют место и другие достаточно интересные оценки [5,54-56,88,90,536].

Одним из важнейших свойств ***ОС-***моделей, прежде всего, с точки зрения вычислений и симулирования физических процессов является свойство ***обратимости,*** которое весьма тесно связано с наличием для них ***неконструируемости,*** в первую очередь, ***НКФ-***типа. Между тем, проблема обратимости ***ОС-***моделей не столь однозначна. Ввиду определения нами типа неконструируемости ***НКФ-1,*** обусловленного наличием определяющего для классических моделей соотношения $\sigma^{(n)}(0,0,\dots,0)=0$, где ***0 –*** состояние ***«покоя».*** Данное соотношение позволяет естественно дифференцировать множество всех возможных конфигураций на два класса ***– конечных*** $C(d,A,\phi)$ и ***бесконечных*** $C(d,A,\infty)$***;*** при этом, если множество $C(d,A,\phi)$ *замкнуто* относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, т.е. $(\forall c \in C(d,A,\phi))(c\tau^{(n)} \in C(d,A,\phi))$, то множество $C(d,A,\infty)$ может быть и незамкнутым, т.е. $(\forall c^{\infty} \in C(d,A,\infty))(c^{\infty}\tau^{(n)} \in C(d,A,\phi))$, что обусловливает необходимость уточнения трактовки понятия *обратимости* для классических ***ОС-***моделей, удовлетворяющих вышеуказанному определяющему соотношению. Так как при отсутствии даже ***НКФ*** наличие в ***ОС-***модели неконструируемости типа ***НКФ-1*** приводит, вообще говоря, к ***необратимости*** модели. В качестве примера рассмотрим бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$ и локальной функцией перехода, определяемой параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$\begin{array}{llll} 000 \to 0 & 010 \to 1 & 100 \to 0 & 110 \to 1 \\ 001 \to 1 & 011 \to 0 & 101 \to 1 & 111 \to 0 \end{array} \qquad (\Xi)$$

Ввиду вышеупомянутого определяющего соотношения данная ***ОС*** является классической бинарной ***1-***мерной структурой. Покажем, что данная структура не обладает ***НКФ.*** Действительно, для этого вполне достаточно показать, что для структуры отсутствуют пары взаимно-стираемых конфигураций (*определение* **6**), что согласно критерия ***Э. Мура*** и ***Дж. Майхилла*** (*теорема* **7**) и будет обосновывать данное утверждение. Для случая нашей структуры пары $<c_1, c_2>$ минимальных ***ВСКФ*** должны иметь следующий вид:

$$c_1 = ab\,|\,x_1x_2 \dots x_p\,|\,cd \quad \text{и} \quad c_2 = ab\,|\,y_1y_2 \dots y_p\,|\,cd; \qquad x_1 \neq y_1 \quad x_p \neq y_p$$

$$c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)} = a^*b^*\,|\,z_1z_2 \dots z_p\,; \quad a, b, c, d, a^*, b^*, x_j, y_j, z_j \in \{0,1\};\ j=1..p$$

Однако, исходя из параллельных подстановок (Ξ), определяющих ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$, несложно убедиться, что имеет место соотношение $(\forall a,b,c,x_1,y_1)(x_1 \neq y_1 \to \sigma^{(3)}(a,b,x1) \neq \sigma^{(3)}(a,b,y1))$, из которого легко следует отсутствие для ***1-ОС*** пар ***ВСКФ***, а значит, и ***НКФ.***

С другой стороны, можно показать, что для данной структуры существуют ***НКФ-1*** уже такого простого вида, как $c=\square 1\square$, где $\square$ ***–*** бесконечная вправо *(влево)* цепочка из ***0-***состоя-

ний «*покоя*». В этом просто убедиться путем вычисления всех возможных предшественников для данной конфигурации (*опуская, при этом, тупиковые варианты*), а именно:

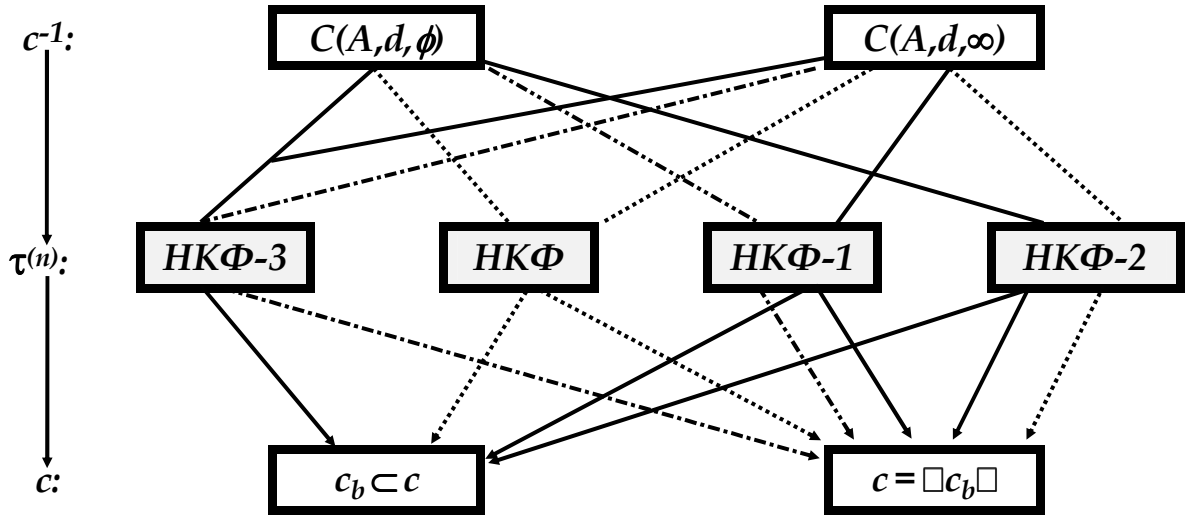
	...	–	–	–	0	1	1	0	0	0	0	0	...
c_1 =	...	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	...
	...	–	–	–	–	1	0	1	1	1	1	1	...
	...	–	–	–	–	0	1	0	0	0	0	0	...
	...	–	–	–	1	0	0	1	1	1	1	1	...
c_2 =	...	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)}$ =	...	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	...

В процессе же вычисления таких предшественников выясняется, что ***КФ*** c=□*1*□ не только является ***НКФ-1***, т.е. не имеет предшественников из множества $C(B,1,\phi)$, но и во множестве $C(d,A,\infty)$ бесконечных ***КФ*** она имеет два различных предшественника, а именно $c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)} = c$ $\{c_1 = ...111\square, c_2 = \square 111...; c_1 \neq c_2\}$, что не позволяет ***однозначно*** восстанавливать для нее предшественника. Следовательно, динамика рассмотренной классической ***1-ОС*** является *необратимой*. Таким образом, можно сформулировать следующий достаточно важный результат относительно обратимости ***ОС-***моделей, а именно: ***Отсутствие для классических ОС-моделей неконструируемости НКФ-типа необходимо, но не достаточно для обеспечения обратимости динамики ее конечных конфигураций.***

Данный результат требует более четкой трактовки понятия обратимости классических ***ОС-***моделей. В нашем понимании *обратимость* динамики классической ***ОС-***модели понимается как возможность ***однозначного*** восстановления ***обратного*** хода истории для любой конечной ***КФ***, например, для случая ***1-ОС*** конфигурации вида c=□$x_1x_2 ... x_p$□; x_1, $x_p \in A\backslash\{0\}$ на основе ее локальной функции перехода. Данное понятие ***обратимости*** совершенно естественно при рассмотрении динамики конечных ***КФ*** в классических ***ОС-***моделях Именно в свете данного понятия отсутствие в классических ***ОС-***моделях ***НКФ*** не обеспечивает ***обратимости*** их динамики, что со всей очевидностью и следует из вышеприведенного примера классической бинарной ***1-ОС***. Несколько ниже данный вопрос будет более детализирован в контексте нашей трактовки понятия ***обратимости***. В случае классических ***ОС-***моделей соотношение □$\tau^{(n)}$=□ на всем протяжении данной монографии ***не будет обусловливать незамкнутость*** $C(d,A,\infty)$ ***относительно ГФП*** $\tau^{(n)}$.

Можно убедиться, что все четыре типа ***(НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3)*** неконструируемости имеют место для классических ***ОС-***моделей и они попарно неэквивалентны между собой. Нижеследующая диаграмма (рис. ***14)*** иллюстрирует взаимосвязь всех четырех типов *неконструируемости* в классических ***ОС-***моделях. На рис. ***14*** схематично представлена сущность определенных выше понятий неконструируемых *блочных* и *конечных* ***с-КФ***, определяемых отсутствием для них конфигураций-*предшественников* из множеств $C(A,d,\phi)$ и/или $C(A,d,\infty)$. Относительно *блочной* и *конфигурационной* конструируемостей для ***КФ*** $\{c_b \mid c\}$ допустимыми являются только следующие три возможности {**-|-**}, {**+|+**} и {**+|-**}, где символ «**+**(**-**)» обозначает *конструируемость* (*неконструируемость*) соответствующего типа ***КФ*** относительно ***ГФП*** в ***1-ОС***. Очевидно, невозможна неконструируемость *блочной* ***КФ*** c_b при конструируемости конечной ***КФ*** c=□c_b□. Следовательно, типы ***НКФ, НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3*** охватывают все наиболее интересные возможности существования *неконструируемых* ***КФ*** в классических ***ОС-***моделях. Декомпозиция схемы (рис. ***14)*** на более детальные составляющие (рис. ***15)*** позволяет сделать существенно прозрачнее картину взаимосвязей между введенными типами неконструируемости. Соотношения между *четырьмя* вышеопределенными типами неконструируемости в классических ***ОС-***моделях выражает следующий основной результат.

***Теорема 2**. Каждая ГФП $\tau^{(n)}$ в классической d-ОС обладает по крайней мере одним типом неконструируемости НКФ,НКФ-1 или НКФ-2 и, возможно, НКФ-3. Непустые множества НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3 в классических ОС-моделях всегда бесконечны. Каждая ГФП $\tau^{(n)}$ в классической d-ОС может одновременно иметь типы неконструируемости согласно нижеследующей таблицы 3.*



$c^{-1}\tau^{(n)} = c$; c^{-1} – предшественник для с-КФ

Рис. 14. Диаграмма, поясняющая сущность основных четырех типов неконструируемости в классических d-мерных ОС-моделях.

==========

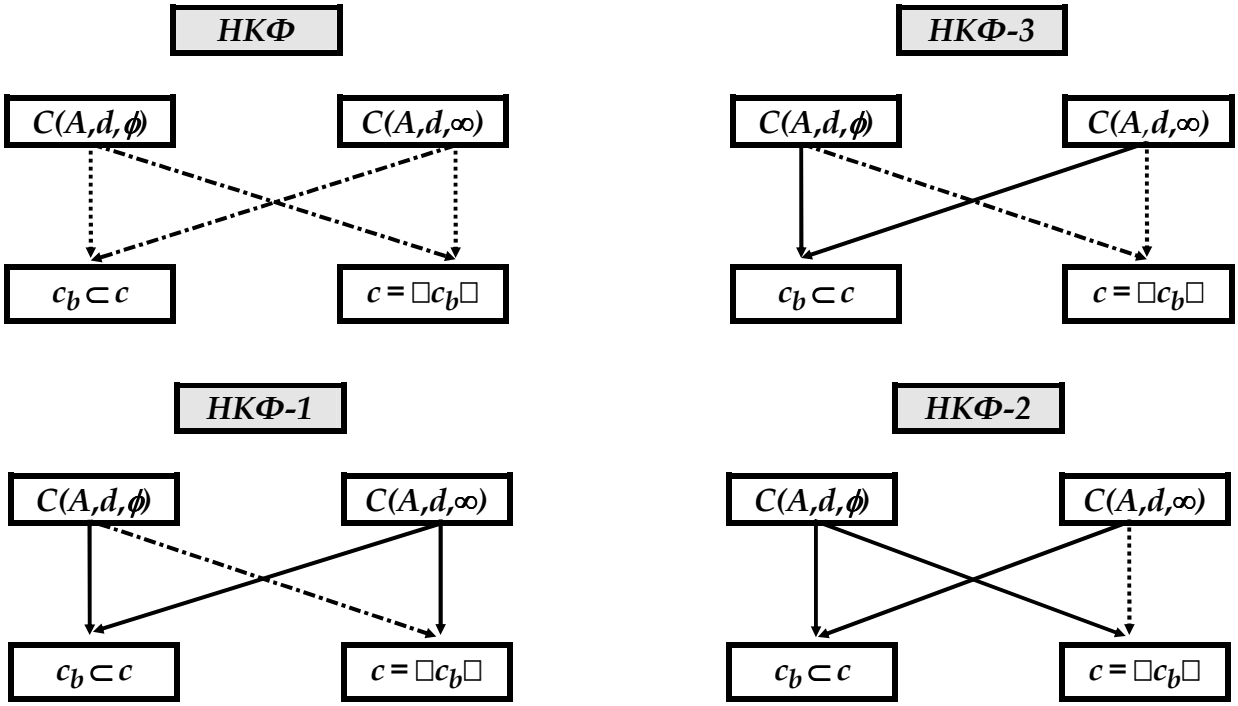


Рис. 15. Диаграммы, представляющие возможности существования предшественников во множествах C(A,d,ϕ) и C(A,d,∞) для конфигураций $\{c_b \mid c=\square c_b\square\}$ относительно четырех типов неконструируемости. На рис. 14, 15 разметка линий сплошная и пунктирная (штрих-пунктирная) обозначают соответственно допустимость и недопустимость той или иной возможности существования конфигураций-предшественников для с-КФ в классических ОС-моделях, т.е. в моделях с соотношением $(\exists x \in A)(\sigma^{(n)}(x,x,\ldots,x)=x)$.

Таблица 3

п/п	Допустимые типы неконструируемости				Возможности сочетания
	НКФ	НКФ-1	НКФ-2	НКФ-3	
1	+	+	+	+	Да
2	+	+	+	-	Да
3	+	+	-	+	Да
4	+	+	-	-	Да
5	+	-	+	+	Да
6	+	-	+	-	Да
7	+	-	-	+	Да
8	+	-	-	-	Да
9	-	+	-	+	Нет
10	-	+	-	-	Да
11	-	-	+	+	Нет
12	-	-	+	-	Да
13	-	+	+	+	Нет
14	-	+	+	-	Нет
15	-	-	-	+	Нет
16	-	-	-	-	Нет

В табл. *3* символ «**+** (**-**)» идентифицирует наличие *(отсутствие)* соответствующего типа неконструируемости в классической ***d-OC,*** определяя допустимые сочетания типов**.**

Доказательства первой части теоремы *2* можно найти в работах [3,5,53-56]. Пусть ***КФ c =*** $\square c_b \square$ является в классической ***1-OC НКФ-3,*** но тогда согласно определения *4* она не является ни ***НКФ-1,*** ни ***НКФ-2.*** Поэтому попарные пересечения множеств ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3*** пусты. Предположим теперь, что ***КФ*** $c` = \square c_b 0^k c_b \square$ имеет предшественника $c^{-1}$ из множества ***C(A,d)***, т.е. $c^{-1}\tau^{(n)} = c`$**.** Но тогда нетрудно убедиться**,** что при достаточно большом значении ***κ*** ***(****т.е. при достаточно длинном блоке единичных автоматов в* ***0-****состоянии****,*** *разделяющем в* ***c`-КФ*** c_b***-****подконфигурации)* ***КФ c=***$\square c_b \square$ так же будет иметь предшественника, что противоречит условию о том, что она является неконструируемой типа ***НКФ-3.*** Поэтому, если в классической ***d-OC*** существуют ***НКФ-3,*** то она обязательно обладает неконструируемостью ***НКФ-***типа. Таким образом**,** необходимым ***(****но не достаточным****,*** *как уже отмечалось выше)* условием неконструируемости типа ***НКФ-3*** является наличие неконструируемости ***НКФ-***типа в структуре. Наличие всех четырех типов неконструируемости характерно для каждого класса ***OC-***моделей, включая и самые простейшие **–** бинарные ***1-OC*** с минимальным индексом соседства $Xn=\{0,1\}\equiv\{-1,0\}$**;** следующая таблица *4* весьма наглядно иллюстрирует вышесказанное, а именно**:**

Таблица 4

№	Локальная функция перехода в бинарной классической 1-OC	Тип неконструируемости в 1-OC	Пример конфигурации
1	$\sigma^{(2)}(x,y) = x*y$	НКФ без НКФ-3	c_b=101
2	$\sigma^{(2)}(x,y) = x+y \ (mod\ 2)$	НКФ-1	$c=\square 1\square$
3	$\sigma^{(2)}(x,y) = x$	НКФ-2	$\forall c \in C(A,\phi)$
4	$\sigma^{(2)}(x,y) = x+y \ (mod\ 2) + min\ \{x,y\}$	НКФ-3	$c=\square 101\square$

Таким образом, определением четырех типов неконструируемости ***(НКФ,НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3)*** мы охватываем данное фундаментальное понятие в целом. ***Блочная*** неконструируемость ***(НКФ-****тип)* является наиболее сильной и *общей* составляющей понятия не-

конструируемости в целом: ***блочная c_b-КФ неконструируема только тогда, когда отсутствует КФ $c \in C(A,d)$ такая, что $c_b \subset c\tau^{(n)}$.*** Тогда как остальные типы неконструируемости ***(НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3)*** носят относительный характер и определяются различиями между определениями множеств ***блочных, конечных*** и ***бесконечных*** конфигураций относительно глобального $\tau^{(n)}$-отображения ***ОС***-модели. Неконструируемость типа ***НКФ-3*** можно рассматривать как особый случай ***НКФ***-неконструируемости, устанавливающей существование неконструируемых ***КФ*** *специального*, интересного со многих точек зрения вида. Понятие ***НКФ-3*** лежит на стыке *блочной* и *конфигурационной* неконструируемостей, принадлежа им обоим. При этом, если неконструируемость двух типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** обусловлена дифференцировкой ***C(A,d)***-множества на два непересекающихся подмножества ***$C(A,d,\phi)$*** и ***$C(A,d,\infty)$*** *конечных* и *бесконечных* ***КФ***, то выделение во множестве ***НКФ*** подмножества ***НКФ-3*** обусловлено дифференцировкой *абсолютной* неконструируемости по самому виду конфигураций, наиболее естественному для ***ОС***-аксиоматики, определяющей их глобальную динамику.

Понятия неконструируемости ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** рассматриваются относительно множеств ***C(A,d)*** и ***$C(A,d,\phi)$*** соответственно, основываясь на вполне естественной дифференцировке множества всех ***КФ ОС***-модели. Но возможны и другие интересные определения относительной неконструируемости. Например, ***У. Гольце*** [232] ввел понятия множеств *рекурсивных* ***(C^r)*** и *рациональных* ***(C^q)*** конфигураций, для которых ***$C(A,d,\phi) \subset C^q \subset C^r \subset C(A,d)$*** и исследовал неконструируемость относительно множеств ***C^q*** и ***C^r*** для классических ***d-ОС (d=1,2)***. Он показал, что если в ***1-ОС КФ $c \in C(A,\phi)$*** имеет ***c^****-предшественника, то она имеет предшественника и из ***C^q***-множества; существуют ***КФ $c \in C(A,2,\phi)$***, имеющие ***c^****-предшественников только из ***$C(A,2) \setminus C^r$***-множества. Из данных результатов также следует неэквивалентность классических ***1-ОС*** и ***d-ОС (d>1)*** относительно понятия неконструируемости, введенного ***У. Гольце.***

Рассмотрим теперь несколько детальнее вопрос допустимых сочетаний типов неконструируемости для классических ***1-ОС.*** Прежде всего, на основе результата теоремы ***6*** [5] и вышесказанного нижняя половина табл. ***3*** (*сочетания* ***9 .. 16*** *типов неконструируемости)* идентифицирует возможность указанных сочетаний в случае *отсутствия* для ***1-ОС*** неконструируемости ***НКФ***-типа. Доказательство данной части теоремы достаточно прозрачно и особых пояснений не требует. Для исследования возможностей сочетаний ***1 .. 8*** (табл. ***3***) рассматриваются конкретные примеры простых классических ***1-ОС***, в которых устанавливается наличие того или иного типа неконструируемости [10]. Данное доказательство представляет также интерес с точки зрения иллюстрации традиционной методики исследования динамических свойств классических ***ОС***-моделей и легко обобщаемо на общий ***d***-мерный ***($d \geq 2$)*** случай классических однородных структур [88,90,536].

Из теоремы ***2***, в частности, следует, что никакие классические ***d-ОС*** не свободны от того или иного типа неконструируемости, т.е. никакая ***d-ОС*** не обладает свойством абсолютной конструируемости. Ниже под обозначениями вида ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3*** будем понимать как конкретные неконструируемые ***КФ*** соответствующего типа, так и множества всех таких ***КФ*** относительно заданных ***ГФП*** и ***A***-алфавита *классических* ***d-ОС***. С учетом сказанного можно представить своего рода верхнюю границу для существования типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях, выражаемую теоремой ***3***.

<u>Теорема 3</u>. Для каждой ГФП $\tau^{(n)}$ в классической d-ОС имеют место соотношения НКФ-3 $\subset$ НКФ $\subset C(A,d,\phi)$, НКФ-1 $\subset C(A,d,\phi)$ и НКФ$\cup$НКФ-1$\cup$НКФ-2$\cup$НКФ-3 $\subset C(A,d,\phi)$. Пусть $G = C(A,d,\phi) \setminus \{\square\}$; существуют ГФП в d-ОС ($d \geq 1$), для которых допустимо соотношение G = НКФ или G = НКФ-2, но недопустимо соотношение G = НКФ-1. Существуют ГФП $\tau^{(n)}$, обладающие неконструируемостью НКФ-типа при отсутствии для них НКФ-3.

Доказательство первой части теоремы повторяет доказательство теоремы ***7*** [5]**;** для доказательства завершающей части можно использовать вышеприведенные рассуждения наряду с результатами по ***неконструируемости.*** Результат теоремы ***3*** приводит еще один аргумент в подтверждение существенного различия между типами неконструируемости ***НКФ, НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3.*** Относительно проблемы неконструируемости возникает вопрос определения долей классических ***1-ОС,*** обладающих тем либо иным типом неконструируемости. В работе [274] ***Э. Мур*** выдвинул гипотезу о том**,** что доля ***d-ОС,*** обладающих ***НКФ,*** стремится к ***1*** с ростом мощности ***A-***алфавита структуры**.** В наших книгах [1,5] представлены асимптотические оценки долей ***1-***мерных структур**,** обладающих ***НКФ*** и ***НКФ-1*** при отсутствии в них ***НКФ.*** Следующий основной результат представляет дальнейшее развитие данного вопроса для одномерного случая ***ОС-***моделей [5,10].

<u>Теорема 4</u>. Пусть N(a,n) есть число всех классических 1-ОС, а $N_1(a,n)$, $N_2(a,n)$, $N_3(a,n)$ и $N_4(a,n)$ – число таких структур, соответственно не обладающих НКФ, обладающих НКФ-1 при отсутствии НКФ, обладающих НКФ-2 и не обладающих НКФ-3. Тогда имеют место следующие определяющие соотношения, а именно:

$$\frac{N_1(a,n)}{N(a,n)} \approx \frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{2\pi a^{n-1}}\right)^{a-1}}; \qquad \frac{N_2(a,n)}{N(a,n)} \approx 0.6\left(\sqrt{2\pi a/e^a}\right)^a$$

$$N_3(a,n) > (a-1)^{a^n}; \qquad N_4(a,n) > (a-2)^{a^n}$$

Доказательство первых двух асимптотических соотношений соответствует теоремам ***8*** и ***9*** [5]. В монографии [1] и в ряде других работ было положено начало систематическому исследованию этого и связанных с ним вопросов. Так ***Э. Икауниекс*** [276]**,** используя простую стохастическую процедуру, показал, что почти все классические ***d-ОС*** обладают ***НКФ.*** С помощью введенного нами понятия ***γ-КФ*** [37], рассматриваемого в следующем разделе, удалось получить асимптотическую оценку числа классических ***d-ОС,*** не обладающих ***НКФ.*** Основной результат и выражает первое соотношение теоремы ***4,*** справедливое для общего ***d-***мерного случая. Данный результат не только полностью решает проблему ***Э. Мура,*** но и показывает степень общности понятия неконструируемости типа ***НКФ.*** Совершенно иная картина имеет место для случая других типов неконструируемости**.** В частности**,** с ростом мощности ***A-***алфавита доля ***1-ОС,*** обладающих ***НКФ-1,*** очень быстро убывает**.** Следовательно**,** по степени общности ***НКФ-***понятие является**,** повидимому**,** наиболее *представительным* относительно типов неконструируемости ***НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3.*** К сожалению, пока отсутствуют подобные асимптотические оценки для типов неконструируемости ***НКФ-2*** и ***НКФ-3.*** В этом отношении весьма интересным представляется оценить долю ***НКФ-3*** относительно ***НКФ,***учитывая вышеупомянутое соотношение $НКФ\text{-}3 \subset НКФ$ для множеств соответствующих ***НКФ.***

Третье соотношение теоремы ***4*** выводится следующим образом. Из определения ***4*** для ***НКФ-2*** (рис. ***14, 15)*** следует, что в случае замкнутости множества $C(A,\infty)$ относительно глобального $\tau^{(n)}$-преобразования ***ОС-***модель обладает ***НКФ-2.*** Данное условие вполне обеспечивают параллельные подстановки *(определяющие ЛФП в 1-ОС)* следующего вида**:**

$$000\ldots0 \to 0 \qquad b\,|\,x_2x_3\ldots x_n \Rightarrow b^* \in A\setminus\{0\}, \quad b \in A\setminus\{0\} \qquad \textbf{(26)}$$
$$x_2x_3\ldots x_n \Rightarrow x^*_1 \in A \text{ – на остальных } \langle x_1x_2\ldots x_n\rangle\text{-кортежах; } x_j \in A\ (j=2\,..\,n)$$

Непосредственный подсчет числа ***ЛФП,*** определяемых такого типа (**26**) параллельными подстановками, позволяет получить следующую весьма полезную оценку**,** а именно**:**

$$N_3(a,n) \geq (a-1)^{(a-1)a^{n-1}} * a^{a^{n-1}} > (a-1)^{a^{n-1}}$$

Доказательство четвертого соотношения будем проводить исходя из следующих соображений. Фиксируем произвольное состояние $x \in A\backslash\{0\}$ автомата и относительно его задаем ***ЛФП 1-ОС***, определяемую параллельными подстановками следующего вида:

$$000 \ldots 00 \Rightarrow 0 \qquad 00 \ldots 0xy \Rightarrow x^*_1 \in A\backslash\{0,x\} \qquad 00 \ldots 0x \Rightarrow x \qquad (27)$$
$$x_1x_2 \ldots x_n \Rightarrow x^*_1 \in A\backslash\{x\} \text{ – на остальных } \langle x_1x_2 \ldots x_n\rangle\text{-кортежах; } y, x_j \in A;\ j=1 \ldots n$$

На основе параллельных подстановок (**27**), определяющих ***ЛФП 1-ОС***, нетрудно убедиться, что соответствующие им структуры обладают ***НКФ-3*** уже вида $c=\square x\square$:

$c^* = .. 00 \ldots 0x-$	*отсутствие для с-КФ с*-предшественника*
$c = \square x\square \ldots\ldots$	*неконструируемая с-КФ типа НКФ-3*

Непосредственный подсчет числа ***ЛФП***, определяемых паралельными подстановками вида (**27**), позволяет получить следующую оценку для числа ***1-ОС***, обладающих ***НКФ-3:***

$$N_4(a,n) \geq (a-2)^{(2a-2)} * (a-1)^{a^n-2a+2} > (a-2)^{a^n}$$

При получении оценок для $N_3(a,n)$ и $N_4(a,n)$ не ставилась задача их оптимизации *(которая сама по себе представляет определенный интерес для дальнейших исследований)*, а преследовалась цель показать, что количества ***1-ОС*** с указанными типами неконструируемости достаточно велики. Весьма интересным представляется также вопрос установления аналогичных оценок для количества ***1-ОС***, соответствующих возможностям сочетания типов неконструируемости согласно теоремы **2.** Несмотря на отсутствие *точных* оценок числа структур, обладающих тем либо иным типом неконструируемости, полученные оценки позволяют делать вполне определенные выводы о степени *общности* указанных типов неконструируемости в классических ***1***-мерных ***ОС***-моделях.

В качестве примера распределения классических ***ОС***-моделей относительно представленных выше типов неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1*** рассмотрим группу бинарных ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$ и алфавитом $B=\{0,1\}$. ***ЛФП*** такого типа структур определяется параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$000 \to x_1=0$	$010 \to x_3$	$100 \to x_5$	$110 \to x_7$
$001 \to x_2$	$011 \to x_4$	$101 \to x_6$	$111 \to x_8$

Очевидно, количество всех таких структур равно $2^7=128$. Ради простоты пронумеруем данные структуры целыми числами, соответствующими их бинарным представлениям $\langle x_1x_2 \ldots x_8\rangle$, т.е. от ***0*** до ***127.*** Например, структура, определяемая ***ЛФП*** следующего вида:

$$\sigma^{(3)}(x_o, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{2} x_j \pmod 2; \quad x_j \in B = \{0,1\}$$

при сделанном предположении будет иметь номер ***105.*** При этом, множество $C(B,1,\phi)$ в десятичном представлении есть не что иное, как множество всех положительных нечетных чисел, т.е. $C(B,1,\phi) = \{2k+1 \mid k \geq 0\}$. Точнее, все ***КФ*** вида $\langle 1x_1x_2 \ldots x_n\rangle$ представляются нечетными числами в диапазоне $[2^{n+1}+1 \ldots 2^{n+2}-1]$, где $x_j \in B$ $(j=1..n;\ n \geq 0)$.

Согласно критерия ***неконструируемости*** на основе ***γ-КФ*** *(теорема **13**)* несложно убедиться, что каждая ***1-ОС*** из рассматриваемой группы, ***ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками указанного выше вида, для которых кортеж $\langle x_1x_1x_2 \ldots x_8\rangle$ содержит неравные количества вхождений «***0***» и «***1***», обладает ***НКФ*** и, возможно, ***НКФ-1*** *(выяснение этого оставляем читателю)*. Таких структур насчитывается ***93,*** вот их номера:

0..14, 16..22, 24..26, 28, 31..38, 40..42, 44, 47..50, 52, 55, 56, 59, 61..70, 72..74, 76, 79..82, 84, 87, 88, 91, 93..98, 100, 103, 104, 107, 109..112, 115, 117..119, 121..127

Структуры данной подгруппы могут поддерживать достаточно сложную динамику, на особенностях которой нами внимание здесь не акцентируется. К своего рода *критическим* структурам данной подгруппы можно отнести структуры с номерами ***0*** и ***127***. Так, для первой *все* конечные конфигурации являются ***НКФ***, тогда как для второй, как легко убедиться, конструируемыми являются только конфигурации вида $\{1^k \mid k=3,4,5, ...\}$.

Следующую подгруппу составляют структуры с номерами ***23, 27, 29, 39, 46, 54, 71, 77*** и ***83***. Эти ***9*** структур характеризуются тем, что существование в них ***НКФ*** обусловлено наличием ***γ-КФ*** уже на конфигурационных блоках размера ***2***. При этом, некоторые из структур данной подгруппы могут обладать и ***НКФ-1***, но данный вопрос не рассматривался.

Следующую подгруппу составляют структуры, обладающие парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. Вот номера этих структур с их дополнительными характеристиками:

43 – имеет пару ***ВСКФ <11|0|01>*** и ***<11|1|01>***

53 – имеет пару ***ВСКФ <01|11|00>*** и ***<01|00|00>***; не обладает ***НКФ-1***, ибо для нее не существует ***КФ*** $c^* \in C(B,1,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(3)}=\square$, где $\square$ – нулевая ***КФ*** структуры

57 – имеет пару ***ВСКФ <01|00|01>*** и ***<01|11|01>***

58 – имеет пару ***ВСКФ <01|0|01>*** и ***<01|1|01>***

78 – имеет пару ***ВСКФ <10|0|01>*** и ***<10|1|01>***

92 – имеет пару ***ВСКФ <10|0|01>*** и ***<10|1|01>***; обладает ***НКФ-1*** уже вида $c=\square 11\square$

99 – имеет пару ***ВСКФ <10|01|10>*** и ***<10|10|10>***; не обладает ***НКФ-1***, ибо для нее не существует ***КФ*** $c^* \in C(B,1,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(3)}=\square$, где $\square$ – нулевая ***КФ*** структуры

108 – имеет пару ***ВСКФ <10|01|01>*** и ***<10|10|01>***; обладает ***НКФ-1*** уже вида $c=\square 1\square$

113 – имеет пару ***ВСКФ <01|0|00>*** и ***<01|1|00>***; не обладает ***НКФ-1***, ибо для нее не существует ***КФ*** $c^* \in C(B,1,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(3)}=\square$, где $\square$ – нулевая ***КФ*** структуры

114 – имеет пару ***ВСКФ <01|0|10>*** и ***<01|1|10>***; обладает ***НКФ-1*** уже вида $c=\square 1\square$

116 – имеет пару ***ВСКФ <01|0|00>*** и ***<01|1|00>***; любая ***КФ***, содержащая подконфигурацию, в частности, ***<010>***, является в структуре ***НКФ***.

Три структуры с номерами ***15, 51*** и ***85*** не обладают ни ***НКФ***, ни ***НКФ-1***, генерируя ***идентичные*** (*с точностью до сдвига*) последовательности конфигураций ***НКФ-2*** и формируя вторую подгруппу, с точки зрения динамики особого интереса не представляющую.

К последней подгруппе относятся структуры, не обладающие ***НКФ*** по причине отсутствия для них ***ВСКФ***. Номера таких структур с краткими комментариями представлены ниже, а именно:

30 – любая ***КФ*** вида $\{\square(1110)^k 11\square \mid k=0,1,2, ...\}$ является в структуре ***НКФ-1***. Это следует из результата вычисления для них предшественников

45 – не обладает ***НКФ-1***, ибо для нее не существует ***КФ*** $c^* \in C(B,1,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(3)} = \square$, где $\square$ – *полностью нулевая* ***КФ*** структуры; каждая конечная ***КФ*** в структуре ***НКФ-2***

60 – любая ***КФ*** вида $\{\square 1^{2k+1}\square \mid k=0,1,2, ...\}$ является в структуре ***НКФ-1***. Это следует из результата вычисления для них предшественников

75 – обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида $c=\square 1\square$

86 – обладает ***НКФ-1*** уже простого вида $c=\square 11\square$

89 – обладает ***НКФ-1*** уже простого вида $c=\square 11\square$. Это следует из результатов вычисления для нее предшественников

90 – обладает ***НКФ-1*** уже простого вида $c=\square 11\square$

101 – не обладает ***НКФ-1***, ибо для нее не существует ***КФ*** $c^* \in C(B,1,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(3)}=\square$, где $\square$ – *полностью нулевая* ***КФ*** структуры; каждая конечная ***КФ*** в структуре ***НКФ-2***

102 – обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида $c = \square 1\square$

105 – обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида $c = \square 1\square$

106 – обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c* = □*1*□**

120 – обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c* = □*1*□**

Таким образом, из общего числа ***128*** бинарных структур рассмотренной группы**:**

– ***113*** обладают ***НКФ*** и, возможно, ***НКФ-1;***

– ***3*** с номерами ***15, 51*** и ***85*** не обладают ни ***НКФ,*** ни ***НКФ-1*** при наличии для них ***НКФ-2,*** однако особого интереса не представляют с точки зрения динамики структур**;**

– ***12*** не обладают ***НКФ;*** при этом, только две из них с номерами ***45*** и ***101*** дополнительно не обладают и ***НКФ-1,*** т.е. каждая конечная ***КФ*** для структур является ***НКФ-2***.

Следовательно, доля структур, обладающих ***НКФ*** и**,** возможно**,** ***НКФ-1*** составляет ***≈0.88,*** тогда как лишь две структуры с номерами ***45*** и ***101*** **(***не считая с примитивной динамикой с номерами* ***15,51,85)*** не обладают обоими основными типами неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1.*** Каждая последовательность, генерируемая в структуре ***45*** из конечной ***КФ*** c_0**,** периодична. В этом несложно убедиться, исходя из вида ***ЛФП*** структуры. Действительно, из ее вида следует, что *правый* конец любой конечной ***КФ*** $c=1x_1x_2 \ldots x_n1$ имеет постоянное местоположение в Z^1 для любой генерируемой из нее ***КФ*** $\{c\tau^{(3)t} \mid t>0\}$**.** Тогда как ***левый*** конец в такой последовательности может увеличивать длину генерируемых ***КФ*** **(***относительно длины исходной* ***КФ c)*** не более, чем на ***1,*** в чем также несложно убедиться из вида ***ЛФП*** структуры. Отсюда уже естественно вытекает заключение о ***периодичности*** каждой последовательности, генерируемой структурой ***45*** из ***КФ*** $c \in C(A,1,\phi)$**.** Длина ***p*** периода определяется как видом исходной ***КФ c,*** так и ее длиной**;** например**,** для конфигураций ***c(k)*** длина периода определяется следующей формулой, а именно**:**

$$c(k) = 1^k \equiv \underset{\leftarrow k \rightarrow}{11 \ldots 11} \quad (k \geq 1); \qquad p = 2^{[\log_2 (k+1)]}; \quad \textit{decimal representation } 1^k \equiv 2^{\kappa} - 1$$

$$\textit{where } [x] - \textit{an integer is no more than } x$$

Подобные **(***с вполне очевидными изменениями***)** рассуждения приводят к аналогичным результатам и для структуры с номером ***101 –*** она также генерирует только ***периодические*** последовательности для конечных конфигураций. Более того, можно показать [54], что обе структуры ***45*** и ***101*** для каждой бинарной ***КФ*** $c=1x_1x_2 \ldots x_n1$ генерируют последовательности $\{c\tau^{(3)t} \mid t>0\}$ одного и того же периода**.** При этом**,** для этих структур имеет место следующее полезное определяющее соотношение, а именно**:**

$$(\forall c \equiv 1^k \mid k \geq 1)(\forall t \geq 1)(c\tau_{45}^{(3)t} \equiv (c\tau_{101}^{(3)t})^R), \quad \textit{where } x^R - \textit{inversion of } x$$

```
> T:= table(["000"="0","001"="0","010"="1","011"="0","100"="1","101"="1","110"="0","111"="1"]):
> Kr := proc(Co::string, T::table) local Art, n, C, r;
   Art, C, n := (proc(S::string)   local k;
        for k from length(S) by -1 to 1 do if S[k] <> "0" then break end if end do;  S[1 .. k]
      end proc), Co, 0;
   do   C := convert(parse(Art(psubs(cat("00", C, "00"), T, 'r'))), 'string');  n := n + 1;
        if Co = C then break end if  end do;  length(C), n
end proc:  Kr("00", T);
```

1, 2
2, 2
3, 4
4, 4
5, 4
6, 4
7, 8
8, 8

```
                                    =====
                                    126, 64
                                    127, 128
                                    128, 128
Art_Kr := proc(Co::string, T::table, n::posint)
local a, Kr, C, t, k, d;
  a := cat(seq("0", k = 1 .. length(indices(T)[1][1]) - 1));
  Kr, C, t, k := proc(S::string)
    local k;
      for k from length(S) by -1 to 1 do if S[k] <> "0" then break end if end do; S[1 .. k]
    end proc, Co, {}, 0;
  do
    k := k + 1;   d := nops(Search2(C, {Co}));  t := {d, op(t)};
    C := convert(parse(Kr(psubs(cat(a, C, a), T, 'r'))), 'string');
    if n <= d then break end if
  end do;
  Co, k, `if`(nargs = 4, assign(args[4] = t), NULL)
end proc:
> T:= table(["000"="0","001"="1","010"="1","011"="0","100"="1","101"="0","110"="0","111"="1"]):
> Art_Kr("1011001", T, 66, 'r'), r;
                "1011001", 505, {0, 1, 3, 5, 9, 11, 15, 21, 25, 27, 33, 43, 45, 55, 63, 85}
```

Для эмпирической проверки периодов конфигурационных последовательностей, генерируемых структурами с номерами ***45*** и ***101***, можно воспользоваться довольно простой ***Maple***-процедурой ***Kr(Co,T)***, чьи аргументы ***Co*** и ***T*** определяют соответственно *исходную* ***КФ Co*** в строчном формате и таблицу ***T*** параллельных правил подстановок структуры. Процедура ***Art_Kr(Co,T,p)*** обеспечивает тестирование последовательностей конфигураций с начальной конфигурацией ***Co*** на предмет выявления ее быть самовоспроизводящейся по Муру конфигурацией; второй аргумент ***T*** определяет таблицу параллельных правил подстановок вышеупомянутых ***1-OC*** с индексом соседства ***X={0,1,2, ...,n-1}***, тогда как третий аргумент ***p*** определяет желаемое количество копий конфигурации ***Co***, если же при вызове процедуры ***Art_Kr(Co,T,p,Z)*** четвертый дополнительный аргумент ***Z*** был определен, через него возвращается множество количеств копий ***Co***, полученных в процессе генерации. Вышеприведенный фрагмент представляет *исходные* тексты процедур и примеры их применения. Для понимания процедур достаточно знакомства с ***Maple***, например, в рамках книги [118] и нашей библиотекой программных средств для ***Maple***.

Таким образом, только ***5*** структур из ***128*** с номерами ***15, 41, 45, 85*** и ***101*** обладают ***полной обратимостью*** генерируемых ими конечных конфигураций, под которой понимается возможность вычисления всей цепочки конечных *предшественников* для каждой конфигурации $c \in C(A,1,\phi)$, т.е. полностью определить ее ***предисторию*** в структуре. Учитывая же их генерационные возможности, особого интереса с точки зрения модельных приложений они не представляют. Следовательно, наибольший интерес с этой точки зрения могут представить только бинарные ***1-OC*** с индексом соседства ***X={0,1,2}***, обладающие неконструируемостью типов ***НКФ*** и/или ***НКФ-1***. Сказанное в значительной мере обобщаемо и на более общие случаи классических ***OC***-моделей. Таким образом, для получения достаточно сложной динамики мы должны обратить свое внимание на ***OC***-модели, обладающие типами неконструируемости ***НКФ*** и/или ***НКФ-1***. Следовательно, отсутствие для классической ***OC***-модели неконструируемости ***НКФ***-типа (*тем паче в совокупности с* ***НКФ-1***) может служить своего рода «***фильтром***» при отборе структур с достаточно сложной динамикой конечных конфигураций, представляющей интерес [5,536].

Более того, можно показать [54], что для обеспечения самовоспроизводимости по Муру всех ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$, т.н. «*универсальной воспроизводимости*», необходимо наличие в ***d-ОС НКФ-1*** при отсутствии в ней ***НКФ***, тогда как обратное в общем случае неверно. Имеем своего рода «*фильтр*» для отбора структур – кандидатов на предмет обладания структурой свойством универсальной воспроизводимости по Муру. Именно среди таких структур находятся структуры как со свойством универсальной воспроизводимости, так и со свойством высокой степени воспроизводимости конечных конфигураций по Муру.

В частности, среди рассмотренных выше бинарных ***1-ОС*** только структуры с номерами ***30, 60, 75, 86, 89, 90, 102, 105, 106*** и ***120*** обладают ***НКФ-1*** без ***НКФ*** и к уже хорошо известной линейной структуре ***105***, обладающей свойством универсальной воспроизводимости, в полной мере можно отнести и структуры с номерами ***90*** и ***102***. При этом, для этих структур обнаружена интересная закономерность, а именно: ***для «почти всех» конфигураций*** $c_0 \in C(A,1,\phi)$, ***если n копий*** c_0 ***генерируются структурой 90 за t шагов, то то же количество этой же КФ*** c_0 ***генерируется структурой 102 за 2*t - 1 шагов; исключение составляют конфигурации из множества*** $\{1^{2k-1} \mid k=1,2,3, \ldots\}$.

Тогда как ***1-ОС*** с номерами ***30, 60, 75, 86, 89, 106*** и ***120*** также обладают в той или иной степени свойством хоть и не универсальной, но (*вплоть до существенной*) воспроизводимости конечных ***КФ***. Таким образом, вполне естественно предположить, что именно среди ***ОС***-моделей, обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-1*** при отсутствии ***НКФ***, находятся структуры со свойством *универсальной воспроизводимости* конечных конфигураций по Муру. Это предположение и подтверждает следующий достаточно интересный результат, а именно: ***Необходимым условием обладания свойством универсальной воспроизводимости конечных КФ по Муру классической ОС-моделью является наличие в ней неконструируемости типа НКФ-1 при отсутствии НКФ*** [54].

Понятие неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-1*** весьма тесно связано с типами графов динамики классических ***d-ОС***. В частности, имеет место следующий результат [54], а именно: ***Если классическая d-ОС*** $(d \geq 1)$ ***обладает неконструируемостью типа НКФ-1 при отсутствии НКФ, то для каждой КФ*** $c_j \in C(A,d,\phi)$ ***она генерирует только последовательности конфигураций (графы состояний) одного из следующих двух типов:***

(a) $c_j \to c_{j+1} \to \ldots \to c_{j+p} \to \ldots \qquad \bigcup_j \{c_j \tau^{(n)k} \mid k \geq 0\} = C(A,d,\phi); \quad c_j$ ***– NCF-1*** $(j=1..\infty)$

(b) ***имеет последовательности*** $\{c_j \tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ ***типа (a) наряду с периодичными***

Действительно, нетрудно убедиться, что для того, чтобы в классической ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ каждая ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ генерировала периодическую последовательность конфигураций, т. е. $(\forall c \in C(A,d,\phi))(\exists k \geq 1)(c = c\tau^{(n)k})$, необходимо отсутствие для структуры неконструируемости как типа ***НКФ***, так и ***НКФ-1***. С другой стороны, несложно убедиться, что для такого типа структур допустимы лишь графы состояний вышеуказанного вида. Так, для случая вышерассмотренного класса бинарных ***1-ОС*** среди всех структур, обладающих ***НКФ-1*** без ***НКФ***, к типу ***(a)*** относятся структуры с номерами ***75, 89, 90, 102, 105*** и ***106***, тогда как к типу ***(b)*** относятся только три однородные структуры с номерами ***30, 60*** и ***86***.

Если же классическая d-ОС $(d \geq 1)$ ***не обладает неконструируемостью типов НКФ-1 и НКФ, то для каждой КФ*** $c_j \in C(A,d,\phi)$ ***она генерирует последовательности конфигураций только одного из следующих трех типов, а именно:***

(a) ***все последовательности*** $\{c_j \tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ ***в структуре периодичны***

(b) $\ldots \to c_{j-k} \to \ldots \to c_{j-2} \to c_{j-1} \to c_j \to c_{j+1} \to c_{j+2} \to \ldots \to c_{j+k} \to \ldots$

(c) ***имеет последовательности*** $\{c_j \tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ ***конфигураций типов (a) и (b)***

Так, например, для случая вышерассмотренного класса бинарных ***1-OC*** тип ***(a)*** обеспечивают структуры с номерами ***45*** и ***101***. В качестве примера, иллюстрирующего тип ***(b)***, представим бинарную ***1-OC*** с индексом соседства $X=\{0,1,2,3\}$ и локальной функцией перехода, определяемой следующей простой формулой, а именно:

$$\sigma^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{cases} x_1+1 \pmod 2, & \text{if } \langle x_1x_2x_3x_4\rangle \in \{\langle 0010\rangle,\langle 0101\rangle,\langle 1010\rangle,\langle 1101\rangle\} \\ x_1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

В качестве примера, иллюстрирующего тип ***(c)***, представим бинарную ***1-OC*** с индексом соседства $X=\{0,1,2,3\}$ и локальной функцией перехода, определяемой формулой:

$$\sigma^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{cases} x_1+1 \pmod 2, & \text{if } \langle x_1x_2x_3x_4\rangle \in \{\langle 0101\rangle,\langle 1101\rangle\} \\ x_1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего результата [54]: ***Для существования неконструируемости типа НКФ-1 в d-OC ($d\geq 1$) необходимо (но не достаточно) наличие для структуры конфигураций $c^{\infty}\in C(A,d,\infty)$ таких, что $c^{\infty}\tau^{(n)}=c\in C(A,d,\phi)$. Более того, для существования в d-OC ($d\geq 1$) без НКФ неконструируемости типа НКФ-1 необходимо и достаточно наличие для структуры конфигураций $c^{\infty}\in C(A,d,\infty)$ таких, что $c^{\infty}\tau^{(n)}=c\in C(A,d,\phi)$. Проблема существования неконструируемости типа НКФ-1 в классических d-OC, не обладающих неконструируемостью НКФ-типа, алгоритмически неразрешима при $d\geq 2$ и разрешима при $d=1$.*** При этом, доказательство последнего утверждения базируется на алгоритмической неразрешимости проблемы «***домино***» [260], рассматриваемой и в настоящей книге в достаточно близком контексте.

Существование двух основных типов неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1*** определяет и два типа *обратимости* динамики ***OC***-моделей. Если *первый* тип определяет обратимость динамики относительно множества конфигураций $C(A,d,\infty)$, то второй – относительно множества $C(A,d,\phi)$ всех конечных конфигураций. При этом, если ***OC***-модель обладает свойством обратимости *первого* типа, то для нее обратимость *второго* типа может отсутствовать. Более того, при наличии необратимости *второго* типа у конечной конфигурации может быть более одного предшественника из множества $C(A,d,\infty)$. Например, для структуры с номером ***60*** при отсутствии в ней ***НКФ***, т.е. наличии обратимой динамики первого типа, каждая конфигурация вида $\{1^{2k+1} \mid k=0,1,\ldots\}$ является в структуре ***НКФ-1***; при этом, в качестве предшественников для нее выступает пара *различных* бесконечных конфигураций. С точки зрения здравого смысла *второй* тип неконструируемости представляется нам заслуживающим большего внимания, т.к. весьма затруднительно удовлетворительно интерпретировать как переход бесконечной ***КФ*** в конечную, так и наоборот. Естественно, можно найти, например, некоторые аналоги в математике, когда $\sqrt{2}$ – иррациональное число, представляемое бесконечной непериодической десятичной дробью, а $(\sqrt{2})^2$ – уже целое число. Однако, в случае с ***OC***-моделью мы имеем дело с бесконечными периодическими конфигурациями. Можно пытаться применять и другие оригинальные умопостроения, мало что имеющие общего с реальностью.

Между тем, если рассматривать ***OC***-модели с обратимостью обоих типов (*т.е. полной обратимостью*) то, как уже отмечалось выше, особого интереса с точки зрения модельных приложений они не представляют. Следовательно, наибольший интерес с этой точки зрения могут представить лишь ***OC***-модели, обладающие неконструируемостью типов ***НКФ*** (*прежде всего*) и/или ***НКФ-1***. При этом, ***OC***-модели с необратимостью лишь второго типа обладают динамикой достаточно ограниченной сложности. Так, рассмотренные выше бинарные ***1-OC***, обладающие полной обратимостью, имеют достаточно простую динамику конечных ***КФ***.

Как уже отмечалось, для наличия в ***d-OC*** неконструируемости типа ***НКФ-1*** необходимо наличие для нее конфигураций $c\in C(A,d,\infty)$ таких, что $c\tau^{(n)}=\square$. Однако, здесь необходи-

мо иметь в виду следующий достаточно существенный аспект. Среди всех бесконечных конфигураций для класса ***1-ОС*** целесообразно различать ***КФ*** двух типов**:** бесконечные в обе стороны (c^{∞}) и бесконечные только влево (c_{-}^{∞}) или вправо (c_{+}^{∞})**.** Пусть в ***1-ОС*** существуют ***КФ*** вида $c_{+}^{\infty}=\square x_1 x_2 \ldots x_n \ldots x_j \infty\,(x_1, x_j \in A\setminus\{0\})$ такие, что $c_{+}^{\infty}\tau^{(n)}=\square$**.** Но тогда несложно доказать существование по меньшей мере двух конечных ***КФ*** $c_j=\square x_1 x_2 \ldots x_n \ldots x_j \square$ и $c_k=\square x_1 x_2 \ldots x_k \square\,(j\neq k; c_j \neq c_k; x_1, x_j, x_k \in A\setminus\{0\})$ таких, что $c_j\tau^{(n)}=c_k\tau^{(n)}=c^{*}\in C(A,1,\phi)$ *(в частном случае может иметь место соотношение* $c_j\tau^{(n)}=\square$*)*, где $\square$ **–** также относится к конечным конфигурациям**.** Значит**,** структура будет обладать ***ВСКФ*** и**,** следовательно**,** неконструируемостью ***НКФ-***типа**.** В противном случае, указанного типа бесконечные ***КФ*** в ***1-ОС*** существовать не будут. Аналогичным образом обстоит дело и для бесконечных конфигураций c_{-}^{∞}**-**типа**.** Следовательно**,** в классических ***1-ОС*** в отсутствие неконструируемости ***НКФ*** могут существовать только бесконечные ***КФ*** c^{∞} такие, что $c^{\infty}\tau^{(n)}=\square$**.**

На основе анализа основных типов неконструируемости и компьютерного симулирования можно констатировать, что *динамика* конфигураций $c_o\in C(A,d,\phi)$ в классических ***ОС*** характеризуется графами переходов состояний следующего типа, а именно**:**

1. ***<u>Бесконечная непериодическая последовательность</u>*** конфигураций из $C(A,d,\phi)$

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \ldots\ldots c_j \to \ldots\ldots$$

для которой имеются две возможности, а именно**:**

(a) определить алгоритм структурной организации составляющих ее конфигураций в зависимости от начальной ***КФ*** $c_o\in C(A,d,\phi)$ и момента времени ***t;*** примерами могут служить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** с номерами ***105*** и ***111.***

(b) такой алгоритм отсутствует либо достаточно сложен для определения**.**

2. ***<u>Последовательность чистого цикла</u>;*** при этом, под данное определение подпадают и ***пассивные КФ*** $c_o\in C(A,d,\phi)$**,** определяемые соотношениями $c_o\tau^{(n)} = c_o$ *(с точностью до сдвига)***.**

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \ldots\ldots c_j$$

Существуют ***ОС-***модели, в которых каждая ***КФ*** c_o генерирует чистый цикл, период которого ≥ 2 и зависит как от вида ***КФ*** $c_o\in C(A,d,\phi)$**,** так и от ее размера. Примерами могут служить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** с номерами ***45*** и ***101.***

3. ***<u>Последовательность смешанного цикла</u>;*** характеризуется наличием в ней некоторой ***КФ*** c_j**,** генерирующей чистый цикл, а именно**:**

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \ldots\ldots c_j \to \ldots\ldots \to c_{j+p} \to$$

Примерами могут послужить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** с номерами ***44 (КФ 101, 10101)*** и ***66 (КФ 1011).*** При этом**,** несложно убедиться, что ***ОС-***модели, динамика которых включает графы типа ***(3),*** обладают неконструируемостью типа ***НКФ.***

Графами другого типа динамика классических ***ОС-***моделей не обладает; при этом, динамика может отвечать как совокупностям указанных графов, так и исключительно одному из них. Например, динамика ***1-ОС*** с номером ***105*** описывается графами исключительно только типа ***(1.a),*** тогда как ***1-ОС*** с номерами ***45*** и ***101*** графами только типа ***(2).***

Приведенные соображения были рассмотрены нами [29,30] в качестве одного из подходов к классификации динамики классических ***ОС-***моделей в связи с обсуждением работы ***А. Беркса*** [314]. Впоследствие, систематизируя ***ОС-***модели по их поведению, ***С. Воль-***

фрам выделил в них четыре класса подобно нашему подходу. Приведенная классификация носит чисто ***феноменологический*** характер и не дает рекомендаций для конструирования требуемых правил поведения ***ОС-***моделей**,** а лишь в целом характеризует возможные типы динамики. Имеются и другие феноменологические критерии классификации правил поведения классических ***ОС-***моделей, на которых мы здесь не останавливаемся по ряду соображений, а отсылаем читателя к [536]. Тогда как графы *предисторий* (*предшественников*) ***КФ*** c_o из множества $C(A,d,\phi)$ относятся к следующим типам**:**

1. ***<u>Бесконечная непериодическая последовательность</u>*** конфигураций из $C(A,d,\phi)$***:***

$$.... \leftarrow c_{-j} \leftarrow .... \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

Примером может служить рассмотренная выше ***1-ОС*** с номером ***39*** ($КФ\ 1^k \mid k=1..n$)

2. ***<u>Конечная последовательность</u>*** конфигураций из множества $C(A,d,\phi)$***:***

$$c_{-j} \leftarrow .... \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

Имеет место**,** если ***КФ*** c_{-j} является неконструируемой ***НКФ-***типа**.** Например**,** для упоминаемой ***1-ОС*** с номером ***39*** одна из возможных последовательностей предшественников для ***КФ*** $c_o=1$ имеет вид $c_{-3}=101 \rightarrow 111 \rightarrow 11 \rightarrow 1=c_o$**,** где ***КФ 101*** является ***НКФ.***

3. ***<u>Последовательность чистого цикла;</u>*** при этом**,** под данное определение подпадают и ***пассивные КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ (*с точностью до сдвига*)***:***

$$c_{-j} \leftarrow .... \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

Примерами могут служить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** с номерами ***45*** и ***101.***

4. ***<u>Последовательность смешанного типа</u>;*** характеризуется наличием в ней некоторой ***КФ*** c_{-j}**,** для которой предшественники могут быть из множества $C(A,d,\phi)$**,** из множества $C(A,d,\infty)$ либо из обоих множеств одновременно, а именно**:**

$$\leftarrow .... c_{-j-p} \leftarrow .... \leftarrow c_{-j-1} \quad c_r \in C(A,d,\phi);\ r=0..-j-p$$

$$c_{-j} \leftarrow .... \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

$$\leftarrow .... b_{-j-k} \leftarrow .... \leftarrow b_{-j-1} \quad b_q \in C(A,d,\infty);\ q=-j-1..-j-k$$

Примерами могут служить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** наряду с другими типами ***ОС-***моделей [54]. При этом, можно убедиться, что графы предшественников типа ***(4)***, начиная ***с КФ*** c_{-j}**,** допускают подграфы видов ***(1) - (3). В общем случае проблема классификации d-ОС*** ($d \geq 2$) ***согласно типам их графов состояний неразрешима*** [88,90]**.**

Наша и подобная ей классификация ***С. Вольфрама*** *динамики* классических ***ОС-***моделей носят сугубо *феноменологический* характер и существенной ***классификационной*** роли не играют**.** Обе они получены на основе экспериментирования с довольно простыми типами классических ***ОС-***моделей и сугубо умозрительных экспериментов**.** Между тем, каждая классификация, претендующая называть себя таковой, должна обеспечивать алгоритм прямой или косвенный, позволяющий относить произвольную классическую ***ОС-***модель к тому или иному типу**.** Однако обе вышеупомянутые классификации не позволяют это делать, ибо**,** например**,** ввиду неразрешимости проблемы существования ***НКФ*** в ***ОС-***моделях размерности $d \geq 1$ мы не можем дифференцировать произвольную ***ОС-***модель уже относительно типа ***4.*** Невозможность подобной классификации доказали также ***Culik K.*** и ***Yu S.*** [555], основываясь на одной неразрешимой проблеме, а именно**:** ***отсутствие алгоритма решения для произвольной ОС-модели того, что все конечные КФ в ней являются исчезающими.*** Среди других способов классификации ***ОС-***моделей можно отметить подход ***Langton C.*** на основе λ***-***параметризации, измеряющей долю нену-

левых значений *ЛФП*, а также подходы ***Dubacq J., Goldenfeld H.*** и ***Israeli N.***, предложивших параметризацию *ЛФП* на основе сложности ***А.Н. Колмогорова*** [5,88,90,536].

Введенные выше четыре типа *неконструируемых* ***КФ*** рассматривались *относительно* множеств $C(A,d)$, $C(A,d,\phi)$, $C(A,d,\infty)$ и понятий блочных, конечных и бесконечных конфигураций и характеризуют так называемое *абсолютное* понятие неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. Целый ряд интересных интерпретаций в теоретических и прикладных аспектах ***ОС***-моделей имеет понятие относительной неконструируемости, когда конструируемость рассматривается относительно того либо иного подмножества C множества $C(A,d)$, например, известные случаи $C \equiv C(A,d,\phi)$, $C \equiv C(A,d,\infty)$ либо $C \subset C(A,d)$ – конечное непустое множество ***КФ***. В частности, ***У. Гольце*** [232] исследовал понятие неконструируемости относительно множеств *рекурсивных* и *рациональных* конфигураций. Введем теперь общее понятие ***относительной*** неконструируемости в классических ***ОС***-моделях безотносительно к самому виду базового множества ***КФ***.

Определение 5. Конфигурация $c \in C(A,d)$ является неконструируемой относительно множества КФ $B \subset C(A,d)$ и ГФП $\tau^{(n)}$ классической d-ОС тогда и только тогда, когда имеет место следующее определяющее соотношение: $(\forall c^* \in B)(c^*\tau^{(n)} \neq c)$.

При этом, возможна (*подобно рассмотренному выше*) и дальнейшая детализация понятия ***относительной*** неконструируемости, например, в разрезе *блочном* и *конфигурационном*. Понятие ***относительной*** неконструируемости ***КФ*** в более широком смысле, чем это делалось, в классических ***ОС***-моделях имеет целый ряд интересных интерпретаций в теоретических и прикладных аспектах [54], что стимулирует его дальнейшее исследование. В первую очередь, возникает важный вопрос о взаимосвязи *абсолютной* и *относительной* неконструируемостей в классических ***ОС***-моделях. Следующий результат дает частичный ответ на данный интересный со многих точек зрения вопрос [55].

Теорема 5. Если ГФП в классической 1-ОС не обладает НКФ, то она не будет иметь и НКФ-3; относительно множества $B=C(A)\setminus C$ такая ГФП будет обладать НКФ-1 или/и НКФ-3, может обладать НКФ-2 и/или НКФ-3 и НКФ-3, если C-множество является строгим подмножеством соответственно множеств $C(A,\phi)$, $C(A,\infty)$ и $C \cap C(A,\phi) \neq \varnothing$, $C \cap C(A,\infty) \neq \varnothing$. Если для ГФП в классической 1-ОС отсутствуют НКФ, то относительно множеств $B = C(A)\setminus C(A,\infty)$ и $B = C(A)\setminus C(A,\phi)$ такая ГФП имеет соответственно каждую КФ $c \in C(A,\phi)$ типа НКФ-2 и неконструируемость типов НКФ-1 и/или НКФ-3.

Доказательство теоремы базируется на определениях типов неконструируемости и теореме **2**. Действительно, отсутствие для классической ***1-ОС НКФ*** влечет за собой отсутствие для нее ***НКФ-3***, а также отсутствие неконструируемости ***НКФ***-типа для любого подмножества $B = C(A)\setminus C$, где C – произвольное конечное подмножество ***КФ*** из множества $C(A)$. При этом, если $C \subset C(A,\phi)$, то относительно множества $B=C(A)\setminus C$ глобальная функция перехода обладает ***НКФ-3*** и/или ***НКФ-1***. Тогда как в случае $C \subset C(A,\infty)$ *относительно* ***B***-множества ***ГФП*** может обладать ***НКФ-2*** и/или ***НКФ-3***, а при условии $C \cap C(A,\phi) \neq \varnothing$ и $C \cap C(A,\infty) \neq \varnothing$ ***B***-множество может обладать ***НКФ-3***. Таким образом, отсутствие для классической ***1-ОС НКФ*** влечет за собой возможность наличия для нее ***НКФ-3*** независимо от типа составляющих ***C***-множество ***КФ***. Несложно убедиться, что при отсутствии для ***ГФП НКФ*** в соответствующей ей ***1-ОС*** каждая ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ будет ***НКФ-2*** относительно множества $B=C(A)\setminus C(A,\infty)$; тогда как относительно $B=C(A)\setminus C(A,\phi)$-множества классическая ***1-ОС*** обладает типами неконструируемости ***НКФ-1*** и/или ***НКФ-3***.

Из теоремы **5** следует, что типы абсолютной неконструируемости ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3*** в общем случае ***не эквивалентны*** и на уровне относительной неконструируемости. Весьма интересным представляется более детальное исследование проблемы относительной неконструируемости, включая классы полигенных, недетерминированных

и асинхронных ***ОС-***моделей. Например, совершенно иная картина феномена неконструируемости имеет место в случае недетерминированных ***ОС-***моделей. Согласно определения такого класса структур *(*раздел ***1.2)*** недетерминированная ***ОС-***модель определяется ***G-***множеством допустимых ***ГФП*** и в каждый момент $t > 0$ к текущим ***КФ*** применяются все допустимые функции из множества $G=\{\tau_k^{(n)}\}$ $(2 \le k \le a^{a-1})$**.** При сделанных предположениях имеет место следующий основной результат [5,88,90,55].

<u>Теорема 6</u>. Недетерминированная d-ОС ($d \ge 1$) обладает НКФ тогда и только тогда, когда все ГФП из ее допустимого G-множества обладают непустыми B_j-множествами НКФ и $(\forall k,j)(k \ne j \rightarrow B_k \cap B_j = \emptyset)$. Существуют недетерминированные d-ОС ($d \ge 1$), не обладающие НКФ, для которых каждая допустимая ГФП из G-множества обладает, в свою очередь, НКФ.

Как показывает результат второй части теоремы ***6,*** условие непустоты пересечений B_j-множеств является существенным. Результаты, аналогичные сформулированным в теореме ***6,*** имеют место и для неконструируемости типа ***НКФ-1*** для случая недетерминированных ***1-ОС,*** не обладающих ***НКФ (НКФ-3).*** Однако их обобщение на случай высших размерностей и неконструируемости типа ***НКФ-2*** пока встречает затруднения [5,536].

Весьма интересный класс ***ОС-***моделей представляют собой *асинхронные* структуры**,** для которых в разных областях однородного Z^d**-**пространства в каждый момент времени ***t*** действуют разные ***ГФП*** из некоторого допустимого конечного ***G-***множества функций. Такие структуры представляют определенный интерес как с точки зрения формальных моделей мультиобработки информации, так и некоторых аналогов *космологических* моделей Вселенной. Для данного класса структур естественным образом формулируется проблема *неконструируемости* и целый ряд других проблем, аналогичных случаю классических и недетерминированных ***ОС-***моделей. При этом, если области разбиения Z^d**-**пространства бесконечны**,** то здесь применимы результаты по неконструируемости для классических и недетерминированных ***ОС-***моделей. В противном случае большое влияние оказывает поведение конфигураций на границах разбиения пространства ***(****границы неоднородности****).*** В работах [54-56] обсуждаются только самые общие вопросы, связанные с данной проблематикой. В частности, показано, что *асинхронные* ***ОС-***модели могут обладать неконструируемостью типов ***НКФ*** и/или ***НКФ-1*** даже, если составляющие их ***ГФП*** ими не обладают. В случае класса *асинхронных* ***ОС-***моделей проблема неконструируемости существенно усложняется, если само понятие асинхронности несколько расширить. В этом отношении интересными представляются ***ОСнР-***модели *(*раздел ***1.2).***

Весьма интересной с целого ряда точек зрения представляется модель *асинхронной* ***d-ОС,*** в которой на фоне действия некоторой ***(****фоновой****) ГФП*** выделено конечное или бесконечное множество областей однородного Z^d**-**пространства**,** в которых действуют отличные от фоновой глобальные функции перехода**;** причем, при условии тождественности для всех ***ГФП А-***алфавита внутренних состояний индексы соседства их могут быть различными**.** Посредством такой асинхронной ***ОС-***модели интересно было бы попытаться смоделировать некоторые общие феномены развития ***Вселенной*** в нашем современном ее представлении. Так, если распределение областей в Z^d**-**пространстве таково, что среди них можно выделять области сколь угодно большого размера**,** в которых действует *фоновая* ***ГФП,*** то неконструируемость в такой *асинхронной* ***ОС-***модели полностью определяется свойствами *фона***.** Тогда как в более общем случае она определяется взаимодействием тех глобальных функций, размеры областей действия которых в Z^d**-**пространстве не имеют верхнего предела. Рассмотрев ряд принципиальных вопросов *неконструируемости* и основные характеризующие их результаты, переходим к обсуждению ***критериев*** существования различных типов неконструируемости в такого класса моделях.

2.3. Критерии существования в классических ОС-моделях основных типов неконструируемости

Первый критерий неконструируемости в классических ***ОС-***моделях связан с именами ***Э. Мура*** и ***Дж. Майхилла*** [123,128,274,275] и базируется на понятии *взаимно-стираемых конфигураций* ***(ВСКФ).*** В слегка обобщенном, но эквивалентном первоначальному, виде классическое понятие ***ВСКФ*** вводится следующим образом.

Определение 6*. Две различные КФ* $c_1, c_2 \in C(A,d,\phi)$ $(c_1 \neq c_2)$ *образуют для ГФП* $\tau^{(n)}$ *в классической d-ОС пару ВСКФ тогда и только тогда, когда* $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)}$.

Нетрудно убедиться, что данное определение эквивалентно определению ***ВСКФ Э. Мура,*** но более удобно для теоретических неколичественных исследований *динамики* классических ***ОС-***моделей**.** Используя понятие ***ВСКФ, Э. Мур*** и ***Дж. Майхилл*** получили ***критерий*** существования в классических ***d-ОС*** *неконструируемых* ***КФ НКФ-***типа, обобщенный нами на случай неконструируемости типа ***НКФ-3*** [10], а именно.

Теорема 7*. В классической d-ОС существуют НКФ (и возможно НКФ-3) тогда и только тогда, когда для ее ГФП существуют пары ВСКФ.*

Данный критерий существования ***НКФ*** в классических ***d-ОС*** остается справедливым и для случая ***нестабильных*** классических ***ОС-***моделей, для которых не имеет места условие $\sigma^{(n)}(x,x,\ldots,x)=x$, определяющее в структурах ***x-***состояние покоя**.** Данный критерий предполагает исследование ряда вопросов по свойствам ***ВСКФ,*** некоторые из которых рассматриваются ниже**.** Однако предварительно мы нуждаемся в исходном ***ВСКФ-***понятии строго по ***Муру-Майхиллу*** [1,274,275]. Ради большей наглядности и без нарушения общности определение ***ВСКФ*** по ***Муру-Майхиллу*** приведем для случая ***1-ОС.***

Определение 7*. Пусть W будет некоторый блок из m смежных единичных автоматов 1-ОС и B будет множеством всех соседних им автоматов согласно X-индекса соседства* $X=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$. *Обозначим через КФ(P) произвольную КФ конечного P-блока единичных автоматов структуры; при этом, естественным образом определяется и объединение двух блочных конфигураций. Две блочные конфигурации* $КФ_1(W)\cup КФ(B)$ *и* $КФ_2(W)\cup КФ(B)$ *будем называть парой ВСКФ для ГФП* $\tau^{(n)}$ *в классической 1-ОС тогда и только тогда, когда имеет место* $[КФ_1(W)\cup КФ(B)]\tau^{(n)} = [КФ_2(W)\cup КФ(B)]\tau^{(n)}$ *и* $КФ_1(W) \neq КФ_2(W)$. *При сделанных предположениях W-блок будем называть внутренним блоком (ВБ) пары ВСКФ или сокращенно просто ВБ ВСКФ.*

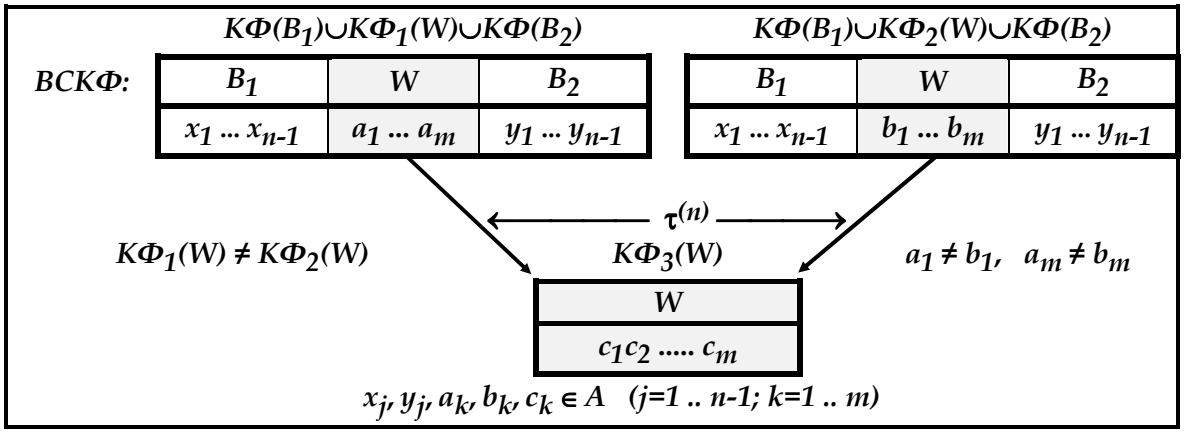


Рис. 16. Иллюстрация отображения пары ВСКФ посредством ГФП $\tau^{(n)}$ ***классической 1-ОС в одну и ту же самую блочную КФ*** $КФ_3(W)$ ***внутреннего блока (ВБ).***

Суть ***ВСКФ*** для случая классических ***1-ОС*** иллюстрирует рис. ***16.*** Из определения **7** нетрудно убедиться, что множество пар ***ВСКФ*** всегда бесконечно и их структура представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Исследование же структуры ***ВСКФ*** для размерностей ***d>1*** встречает существенные затруднения и допустимо только в частных случаях *(по причинам, обсуждаемым в следующем разделе)*, поэтому наиболее интересные на сегодня результаты получены именно для случая ***1-ОС*** [1,20].

Из теоремы **7** и определения **7** следует, что для обладания классическими ***1-ОС*** парами ***ВСКФ*** *(а значит и* ***НКФ****)* необходимо выполнение параллельными подстановками, определяющими ее ***ЛФП***, следующего условия, а именно:

$$(\exists <x_1x_2 \dots x_{n-1}>)(x_1x_2 \dots x_{n-1}a \Rightarrow c \;\&\; x_1x_2 \dots x_{n-1}b \Rightarrow c;\ a \neq b) \quad (a,b,c,x_j \in A;\ j=1 \dots n-1)$$

С другой стороны, данное условие не является достаточным, о чем свидетельствует весьма простой пример классической ***1-ОС***, определяемой ***ЛФП*** с тождественными параллельными подстановками вида: $x_1x_2 \dots x_n \Rightarrow x_1$ $(x_j \in A;\ j=1 \dots n)$. Определенная таким образом классическая структура не обладает как ***ВСКФ***, так и ***НКФ***. Относительно ***ВСКФ*** ***Э. Муром*** был сформулирован целый ряд интересных вопросов, решение которых в ***1***-мерном случае и позволило получить ряд интересных результатов. Следующий результат иллюстрирует многообразие типов ***ВБ*** у ***ВСКФ*** даже в случае довольно простых бинарных классических ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{-1,0,1\}$ Мура-Неймана [1,3,5,10,88].

<u>Теорема 8</u>. Существуют классические бинарные 1-ОС с индексом соседства Мура-Неймана, имеющие пары ВСКФ с простым ВБ только размера L одного из нижеследующих основных типов, а именно:

1) $L = \{p^+ \mid p \geq 1\}$; ***2)*** $L = \{1^+, 2^+, 3^+, p^- \mid p \geq 4\}$; ***3)*** $L = \{1^-, p^+ \mid p \geq 2\}$

4) $L = \{1^+, 2p^-, (2p+1)^+ \mid p \geq 1\}$; ***5)*** $L = \{1^-, 2^+, p^- \mid p \geq 3\}$; ***6)*** $L = \{1^+, p^- \mid p \geq 2\}$

где верхний индекс $\{+ \mid -\}$ ***говорит о*** $\{$***наличии*** $\mid$ ***отсутствии***$\}$ ***для структуры пар ВСКФ с простым (не содержащим других пар ВСКФ) внутренним блоком.***

Целый ряд примеров *(полученных методом компьютерного симулирования)* показывает [78, 79], что с увеличением мощности ***A***-алфавита внутренних состояний и ***X***-индекса соседства классической ***1-ОС*** расширяются допустимые типы ***ВБ ВСКФ***. При этом, структура ***A***-алфавита существенно влияет на само понятие неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. Действительно, проблема неконструируемости в ее общей постановке связана не только с дифференцировкой ***A***-алфавита внутренних состояний единичных автоматов ***ОС***-модели, но и с его мощностью. У классических ***ОС***-моделей алфавит $A = \{0, 1, 2, \dots, a-1\}$, где ***0*** - выделенное *состояние покоя* и ***a*** – фиксированное целое число. Если же в качестве ***A***-алфавита выбрать множество ***N*** всех неотрицательных целых чисел, то уже относительно структуры $1\text{-}OC=<Z^1, A=N, \tau^{(2)}, X>$ общепринятый смысл понятия неконструируемости ***НКФ***-типа теряется [1]. С этой целью рассмотрим простой пример ***1-ОС***, ***ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками следующего простого вида:

$$00 \Rightarrow 0 \quad x_1x_2 \Rightarrow x_2 \quad x_1 \neq 0; \qquad 0x_2 \Rightarrow x_2\text{-}1 \quad x_2 > 0; \quad x_1, x_2 \in N \qquad (28)$$

Нетрудно убедиться, что в определенной таким образом ***1-ОС*** существуют пары ***ВСКФ*** уже вида $<0 \mid 0101 \dots 01 \mid 0>$ и $<0 \mid 1010 \dots 10 \mid 0>$. С другой стороны, такая ***1-ОС*** не обладает ни одним из рассмотренных типов неконструируемости, т.е. обладает свойством ***абсолютной*** конструируемости. Действительно, на основе параллельных подстановок (**28**), определяющих ***ЛФП*** структуры, нетрудно убедиться, что каждая блочная ***КФ*** вида $c_b = x_1x_2 \dots x_m$ имеет не менее одного предшественника вида $c`_b = x`_1x`_2 \dots x`_mx`_{m+1}$ такого, что $c`_b\tau^{(2)} = c_b$ $(x_j, x`_k \in N;\ j=1..m,\ k=1..m+1)$; состояние каждого единичного автомата в структуре в следующий момент времени $t>0$ определяется лишь состоянием его соседа спра-

ва, что позволяет согласно системы параллельных подстановок (**28**) определять для произвольной блочной ***КФ*** c_b предшественника $c`_b$, а именно**:** для произвольного $x_j$-значения в $c_b$-***КФ*** выбирается кортеж $<x`_j x_j+1>$ или $<x`_j x_j>$ в $c`_b$ соответственно при $x`_j=0$ или $x`_j \neq 0$**.** С другой стороны, ***1-ОС, ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками следующего чрезвычайно простого вида, а именно**:**

$$0x_2 \Rightarrow x_2 \qquad x_1x_2 \Rightarrow x_1{}^*x_2 \qquad (x_1 \neq 0;\ x_1, x_2 \in N)$$

не обладает парами ***ВСКФ,*** но имеет ***НКФ*** уже вида $c_b=1nm$ при m/n-$[m/n] \neq 0$ [1]**.** Таким образом, структура ***А***-алфавита классических ***ОС***-моделей весьма существенна для проблемы неконструируемости**;** о других случаях существенности структуры ***А***-алфавита будет идти речь ниже. При этом, если отмена дифференцировки ***А***-алфавита в смысле выделения особого ***0***-состояния покоя сохраняет в силе критерий существования ***НКФ,*** отменяя в общем случае остальные типы ***(НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3)*** неконструируемости, то расширение его на бесконечный случай приводит к нарушению самого понятия неконструируемости в такого рода ***ОС***-моделях [5,10,54-56,88,90,536].

Как уже отмечалось, результаты по проблеме неконструируемости составляют достаточно эффективную часть аппарата исследования динамики ***ОС***-моделей [5,10,90], поэтому различного рода оценки ***ВБ ВСКФ*** и других элементов проблемы представляют особый интерес. В этом плане представляет интерес восходящий к ***Э. Муру*** весьма важный вопрос о *минимальном* размере простого ***ВБ ВСКФ,*** на который один из ответов дает следующая основная теорема, а именно.

<u>Теорема 9</u>. Для любых целых $a \geq 3$ и $n \geq 2$ существует классическая 1-ОС с алфавитом $A=\{0,1,...,a-1\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,...,n-1\}$, обладающая парами ВСКФ с простыми ВБ минимального размера $L = n$.

Доказательство теоремы можно найти в работах [19,20]. В свете теоремы ***9*** вполне естественным является желание получить оценки для минимального размера простого ***ВБ*** у ***ВСКФ.*** В случае классических ***1-ОС*** имеет место следующий результат [1,3,5,88].

<u>Теорема 10</u>. Если классическая 1-ОС обладает парами ВСКФ с простым ВБ минимального размера L, то для L справедлива следующая оценка $n \leq L < a^{n-1}(a^{n-1} - 1) + n - 2$.

К сожалению**,** подобную оценку для случая классических ***d-ОС*** получить не представляется возможным по причине алгоритмической неразрешимости проблемы существования в произвольной классической ***d***-мерной ***ОС***-модели ***(d>1) НКФ.*** Действительно, в противном случае *(как несложно убедиться)* данная проблема была бы на основе теоремы ***7*** алгоритмически разрешимой**.** Тогда как**,** с другой стороны**,** на основе теоремы ***10*** легко устанавливается алгоритмическая разрешимость проблемы существования пар ***ВСКФ (НКФ)*** для общего случая ***1***-мерных классических ***ОС***-моделей [1,3,5].

Используя подход ***Э. Мура*** [274] и результат данной теоремы, можно получить верхнюю оценку для минимального размера ***НКФ*** в классических ***1-ОС*** [1]**.** Однако такая оценка представляется нам весьма грубой и, практически, малопригодной для использования. На основе принципиально другого подхода нам удалось получить существенно более точные оценки для минимальных размеров ***(L1 и L2) НКФ*** и ***НКФ-1*** в случае классических ***1-ОС,*** а именно**:** ***Минимальные размеры L1 и L2 для НКФ и НКФ-1 в классической 1-ОС удовлетворяют соответственно соотношениям $L1 \leq (2^a-1)^{n-1}+1$ и $L2 \leq (2^a-1)^{n-1}$*** [1]**.** Данный результат совершенно не базируется на понятии ***ВСКФ*** и позволяет конструктивно определять в произвольной ***1-ОС*** не только наличие неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-1,*** но во многом и саму их структуру. Подобные результаты по оценке минимальных размеров ***НКФ*** для простых бинарных ***1-ОС*** с рядом интерпретаций понятия неконструируемости были получены ***А. Адаматским*** и ***А. Вунше*** [269,536].

Между тем, следует сделать одно замечание, касающееся упомянутой нашей оценки минимального размера *(N) НКФ* для класса *1-ОС: $N \le (2^a-1)^{n-1}+1$.* В работе [269] отмечена несостоятельность данной оценки для случая бинарных *1-ОС* с *шаблоном соседства (ШС)* размера *n=2.* Данное несоответствие обусловлено тем, что в [269] авторы использовали бинарные *1-ОС* с индексами соседства $X_1=\{-1,1\}$ и $X_2=\{-1,0,1\}$, определяющими соответственно несвязный и связный *ШС* одного и того же размера *n=3.* Тогда как на основе несложного анализа класса бинарных *1-ОС* с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}\equiv\{-1,0\}$, определяющим *ШС* размера *n=2*, можно убедиться, что *ОС*-модели данного простейшего класса обладают *НКФ* минимальных размеров $N\in\{0,1,2,3,4\}$, что полностью согласуется с нашей оценкой: $N \le (2^2-1)^1+1=4$ *(a=n=2).* Таким образом, авторы рассматривают не два *различных* подкласса бинарных *1-ОС* с индексами соседства $X=\{0,1\}$ и $X_2=\{-1,0,1\}$ *(ШС соответственно n=2 и n=3)*, а класс *1-ОС* с индексом соседства $X_2=\{-1,0,1\}$ и его подкласс с индексом соседства $X`_1=\{-1,1\}$, определяющими *ШС* одного и того же размера *n=3.* Именно это отождествление и привело к столь *некорректному* замечанию. В свете вышесказанного интересно было бы установить для класса хотя бы бинарных *1-ОС* с индексом соседства $X=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ распределение величин минимальных блоков *НКФ. Могут ли данные величины составлять подмножество множества натуральных чисел* $N^+=\{0,1,2,\ldots,G\}$ $(G=3^{n-1}+1)$*?* Проведенный нами [90] компьютерный анализ целого ряда интересных структур *d-ОС (d=1,2)* позволил сформироваться мнению о том, что данное предположение достаточно веско. Если это действительно так, то мы будем иметь весьма интересную ситуацию, а именно: неразрешимость проблемы существования в классических *d-ОС (d>1) НКФ*, полученная на основе современной теории вычислимости, не исключает возможности *положительного* решения проблемы существования *НКФ* в классических *ОС*-моделях в каждом конкретном случае, свидетельством чему служит целый ряд положительных результатов для достаточно широкого класса *ОС*-моделей.

Попытаемся теперь оценить *снизу* размер минимальных *НКФ* в *1-ОС.* С этой целью рассмотрим классическую *1-ОС*, *ЛФП* которой определяется параллельными подстановками следующего чрезвычайно простого вида, а именно:

$$000\ldots00 \Rightarrow 0 \quad 000\ldots01 \Rightarrow 0 \quad x_1x_2x_3\ldots x_n \Rightarrow x_n;\ x_j\in A\ (j=1\ldots n) \qquad (29)$$

Попытаемся определить *c`*-предшественника для *блочной* c_b*-КФ* следующего вида:

$$\begin{array}{lll}
c` = 0\ 0\ 0\ldots\ldots\ldots 0 & 0\,|\,0\ldots\ldots 0 & 0\text{-} \\
c` = 0\ 0\ 0\ldots\ldots\ldots 0 & 1\,|\,0\ldots\ldots 0 & 0\text{-} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
c` = y_1y_2y_3\ldots\ldots\ldots y_{n-1} & 0\,|\,0\ldots\ldots 0 & y\text{-} \quad y,\ y_j\in A\ \{j=1\ldots(n-1)\} \\
\quad 1\ 2\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots n\text{-}1\ n & |\,n+1\ldots 2n\text{-}1 & 2n \Leftarrow \text{автоматы структуры} \\
c_b = 0\ 0\ 0\ldots\ldots & \ldots 0 & 0\,|\,1
\end{array}$$

Исходя из параллельных подстановок (**29**), нетрудно убедиться, что для возможности существования *0*-значения для *j*-автоматов *(j=2 .. n)* c_b*-КФ* все ее *c`*-предшественники в позициях *k=(n+1)..(2n-1)* должны также иметь *0*-значения. Следовательно, в исходной блочной c_b*-КФ* для *(n+1)*-го автомата *недостижимым* является *1*-состояние, ибо в подстановках (**29**) не существует подстановки вида $000\ldots0x \Rightarrow 1,\ x\in A$. Таким образом, в определенной *ЛФП* (**29**) классической *1-ОС* существует *блочная НКФ* уже вида $c_b=0^n1$ длины *(n+1)* и содержащая в качестве подконфигурации кортеж *<00...01>*, на котором *ЛФП* структуры имеет *0*-значение. С другой стороны, нетрудно убедиться, что для такой структуры отсутствуют *НКФ* меньшего размера. Вышесказанное резюмирует следующая теорема.

Теорема 11. Минимальный размер (L) НКФ в классической 1-ОС удовлетворяет следующему определяющему соотношению: $(n+1) \le L < 2^{a(n-1)}$.

Компьютерный анализ (*с использованием специальных симуляционных программ в среде пакета* ***Mathematica*** [15,93]) целого ряда классических ***1-ОС*** показывает, что верхняя граница для ***L***-величины в теореме ***11***, вероятно, существенно завышена. В этой связи весьма интересным представляется вопрос получения более точных (*возможно и асимптотических*) оценок. К данному вопросу непосредственно примыкает и проблема существования в классических ***ОС***-моделях ***исчезающих*** конфигураций, играющих определенную роль в исследованиях целого ряда динамических свойств такого класса структур.

Определение 8. Конечная КФ $c \in C(A,d,\phi)$ называется для классической d-ОС исчезающей (ИсКФ) тогда и только тогда, когда $(\exists p>0)(c\tau^{(n)}p=\square)$, где $\square$ и $\tau^{(n)}$ – соответственно полностью нулевая КФ и ГФП однородной структуры.

Ниже будет представлен ряд результатов по ***исчезающим КФ;*** здесь же мы рассмотрим их в связи с понятием ***ВСКФ***. Нетрудно заметить, что пара $\{\square; ИсКФ \mid p=1\}$ ***КФ*** представляет собой пару ***ВСКФ, ВБ*** которой по длине равен длине исчезающей ***КФ;*** очевидно, множество ***ИсКФ*** в классической ***ОС***-модели пусто либо бесконечно. Из вышесказанного очевидно, что наличие в классической ***ОС***-модели ***ИсКФ*** является *достаточным* условием существования в ней ***НКФ***, тогда как обратное, в общем случае, неверно. Действительно, нетрудно убедиться, что в ***1-ОС***, чья ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками вида: $0x_2 \Rightarrow x_2$, $1x_2 \Rightarrow 1$ и $2x_2 \Rightarrow 2$ $(x_2 \in A=\{0,1,2\})$ отсутствуют ***ИсКФ*** при наличии в ней ***НКФ*** уже вида $c_b=012x_4x_5 \ldots x_m$ $(x_k \in A;\ k=4 \ldots m)$.

В классической ***1-ОС*** (*не нарушая общности*) ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками вида $x_1x_2x_3x_4 \ldots x_n \Rightarrow x^*_1$ $(x_j, x^*_1 \in A=\{0,1,2, \ldots, a-1\};\ j=1..n)$. Тогда на основе несложных комбинаторных рассуждений несложно показать, что максимальная длина кортежа $<y_1y_2y_3 \ldots y_m>$, содержащего строго по одному вхождению левой части каждой из параллельных подстановок ***ЛФП*** есть $N=a^n+n-1$. Следовательно, минимальный размер ***(L)*** для ***ИсКФ*** в классической ***1-ОС*** удовлетворяет соотношению $L < a^n+n-1$. При этом, верхнее значение недостижимо, ибо в противном случае имеет место тривиальный случай ***1-ОС***, ***ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками вида $x_1x_2x_3 \ldots x_n \Rightarrow 0$ $(x_j \in A;\ j=1..n)$; для данной структуры каждая ***КФ*** $c \in C(A)$ является ***ИсКФ*** и $L=1$. Более того, полученная выше оценка для *минимального* размера ***ИсКФ*** не только *недостижима*, но и представляется существенно *завышенной*. Действительно, более детальный анализ ***ЛФП*** классических ***1-ОС***, обладающих такого типа ***КФ***, показывает, что *минимальный* размер ***ИсКФ*** в ***1-ОС*** зависит как от мощности ***A***-алфавита, так и от ***X***-индекса соседства структуры. Определив ***ЛФП*** бинарной ***1-ОС*** параллельными подстановками следующего достаточно простого вида, а именно:

$$\begin{array}{l} 0^k1^{n-k} \Rightarrow 0 \qquad (k=0 \ldots n); \qquad 1^p0^{n-p} \Rightarrow 0 \quad (p=1 \ldots n-1) \\ b_1b_2 \ldots b_n \Rightarrow 1 - \text{ на остальных } <b_1b_2 \ldots b_n>\text{-кортежах;} \\ b_j \in A=\{0,1\};\ \ c^k - \text{конкатенация из k c-символов} \end{array} \qquad (30)$$

нетрудно убедиться, что в такой структуре существуют ***ИсКФ*** вида $c=\square 1^{n-1}\square$ минимальной длины $L=n-1$. Следовательно, существуют классические ***1-ОС*** с произвольным ***A***-алфавитом, обладающие ***ИсКФ*** минимальной длины $L=n-1$. Данное утверждение легко доказывается обобщением ***ЛФП*** рассмотренной бинарной ***1-ОС*** на случай *общего* ***A***-алфафавита путем дополнения параллельных подстановок (**30**) подстановками, в частности, следующего чрезвычайно простого вида, а именно:

$$x_1x_2 \ldots x_n \Rightarrow x_1 \qquad (x_j \in A=\{0,1,2, \ldots, a-1\};\ j=1 \ldots n)$$

$<x_1x_2 \dots x_n>$ – кортеж не является чисто бинарным

С другой стороны, величина ***L*** минимальной длины ***ИсКФ*** в классических ***ОС***-моделях зависит и от мощности ***A***-алфавита. Например, определив ***ЛФП*** в классической ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $X_n=\{0,1\}\equiv\{-1,0\}$ параллельными подстановками вида:

$$00 \Rightarrow 0 \qquad x_1x_2 \Rightarrow 0, \quad \text{если } x_2 = x_1+1 \ (mod\ a+1)$$
$$x_1x_2 \Rightarrow A\setminus\{0\} \text{ – на остальных } <x_1x_2>\text{-кортежах; } x_1, x_2 \in A=\{0,1, \dots, a-1\}$$

нетрудно убедиться, что в такой структуре ***ИсКФ*** минимального размера $L=a-1$ является ***КФ*** вида $c=\square 123\dots(a-3)(a-2)(a-1)\square$. Следовательно, в общем случае классической ***1-ОС*** величина $L=L(a,n)$ минимальной длины ***ИсКФ*** является функцией двух аргументов: мощности ***A***-алфавита и ***X***-индекса соседства структуры. Представляется интересным установление точного или асимптотического значений $L(a,n)$ для класса ***1***-мерных ***ОС***-моделей. Вышесказанное позволяет сформулировать следующий полезный результат.

Теорема 12. При наличии для классической d-ОС исчезающих КФ структура обладает НКФ. Минимальная длина L(a,n) ИсКФ в классической 1-ОС удовлетворяет соотношению $n-1 \le L(a,n) < a^n+n-1$. Существуют классические 1-ОС с простейшим индексом соседства $X_n=\{0,1\}\equiv\{-1,0\}$, обладающие ИсКФ минимального размера $L(a,2) = a-1$.

Рассмотрим пример бинарной ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, чья ***ЛФП*** имеет вид

$$\sigma^{(3)}(x_0,x_1,x_2)=\begin{cases}0, & if \ < x_0x_1x_2 >=< 000 > \\ 1, & if \ < x_0x_1x_2 >=< 111 > \\ x_0+x_1+x_2+1 \pmod 2, & otherwise\end{cases} \quad ; \quad x_0,x_1,x_2 \in A=\{0,1\}$$

Исходя из параллельных подстановок, определяемых такой ***ЛФП***, нетрудно убедиться, что имеет место соотношение $c\tau^{(3)}=\square$, где $c=1001$, $\square$ и $\tau^{(3)}$ – соответственно конечная ***КФ***, полностью нулевая ***КФ*** и ***ГФП***, соответствующая вышеопределенной ***ЛФП***. Таким образом, ***КФ*** $c=1001$ является и ***ВСКФ***, и ***ИсКФ***. Более того, легко убедиться, что она же является и ***НКФ***. Действительно, нижеприведенная попытка получить для нее предшественников в предыдущий момент времени $t=0$ доказывает это, а именно:

	-	-	0	0	0	1	1	.....
	-	-	0	0	1	0	1	.....
t=0	-	-	-	-	1	1	0	.....
	-	-	-	-	1	1	1	.....
t=1	.....	1	0	0	1	.....	.....	.....

Естественно, любая ***КФ***, содержащая такую блочную конфигурацию, сама будет ***НКФ***. С учетом сказанного можно показать, что доля таких ***НКФ*** относительно всех конечных ***КФ*** из множества $C(B,1,\phi) = \{1,11,1x_1x_2 \dots x_n1 \mid x_j \in B;\ j=1..n;\ n=1..\infty\}$ будет не менее ***1/8***.

Однако детальные исследования проблемы неконструируемости в *классических* ***ОС***-моделях привели нас не только к мысли о недостаточной эффективности подходов на основе понятия ***ВСКФ***, но и позволили ввести понятие ***γ-конфигураций (γ-КФ)*** [37], оказавшееся весьма плодотворным. Наше понятие ***γ-КФ*** слегка отлично от введенного независимо от нас в ***1976 А. Маруока*** и ***М. Кимура*** [271] понятия ***k-сбалансированных ГФП***, но полностью ему эквивалентно. Оба эти понятия были введены нами с целью исследования проблемы неконструируемости в классических ***ОС***-моделях и ***Маруока-Кимура*** для исследования параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$, определяемых ***ГФП*** в классических ***d-ОС***. Введем теперь понятие ***блочной γ-КФ***.

Определение 9. Дополнительно к предположениям и обозначениям определения 7 и рис. 16 пусть P(W) будет числом единичных автоматов в произвольном W-блоке классической 1-ОС. Будем говорить, что в 1-ОС существуют γ-КФ на W-блоке тогда и только

тогда, когда по крайней мере для одной КФ(W) существует $G(\gamma) \neq a^{n-1}$ ***конфигураций-предшественников таких, что*** $[КФ(W) \cup КФ(B)]\tau^{(n)} = КФ(W)$***, где B – блок автоматов структуры, соседних всем автоматам W-блока согласно индекса соседства.***

На основе понятия ***γ-КФ*** можно получить новый критерий существования ***НКФ*** в классических ***ОС-***моделях [3,5,37,45,53-56]**,** представляющий большой интерес для исследований по ***ТОС-***проблематике в целом, особенно ее динамических аспектов.

<u>Теорема 13</u>. Классическая d-ОС обладает неконструируемостью типа НКФ (возможно и НКФ-3) только тогда, когда для нее существуют γ-КФ.

Доказательство теоремы достаточно прозрачно и сводится к следующему**.** Пусть ***SV(a,n)*** будет множеством всех кортежей вида $<x_1x_2 \ldots x_n>$ $(x_j \in A=\{0,1,2, \ldots, a-1\}; j=1..n)$**.** Нетрудно убедиться, что в качестве различных вхождений в элементы множества ***SV(a,n)*** существует ровно $N(a,n,k)=(n-k+1)a^{n-k}$ каждого из подкортежей вида $<y_1y_2 \ldots y_k>$ $(y_p \in A; p=1..k; 1 \leq k \leq n)$**.** Например, каждый бинарный кортеж вида $<x_1x_2>$ $(x_1, x_2 \in A=\{0,1\})$ имеет ровно $N(2,4,2)=(4-2+1)2^{4-2}=12$ вхождений во все элементы ***SV(2,4)-***множества**;** при этом, $N(a,n,1)=na^{n-1}$ и $N(a,n,n)=1$**.** Таким образом, набор числовых величин $N(a,n,k)$ $(1 \leq k \leq n)$ характеризует полноту представления множества всевозможных $<x_1x_2 \ldots x_n>$**-**кортежей в произвольном конечном ***A-***алфавите**;** в случае существования целого $1 \leq k \leq n$ такого**,** что $N(a,n,k) \neq (n-k+1)a^{n-k}$ имеет место неполнота ***SV(a,n)-***множества, т.е. в нем отсутствует по крайней мере один обязательный кортеж $<x_1x_2 \ldots x_n>$ $(x_j \in A; j=1 \ldots n)$**.** Завершение доказательства теоремы можно найти в нашей работе [37]**,** которое**,** однако**,** не является единственно возможным, но достаточно хорошо иллюстрирующим элементы исследований по проблематике ***ТОС.***

Теорема ***13*** дает другой критерий существования ***НКФ*** в классических ***ОС-***моделях, который в целом ряде случаев более удобен для теоретических исследований и позволяет получать более приемлемые оценки ряда количественных характеристик структур**.** Следует отметить, что несмотря на эквивалентность обоих критериев существования ***НКФ*** в классических ***ОС-***моделях ***(Мура-Майхилла и Аладьева-Маруока-Кимура)***, в их использовании имеются существенные различия [3,5,37,53-56]. В частности, оценки минимального размера ***НКФ*** в классических ***1-ОС*** на основе понятия ***ВСКФ*** являются довольно грубыми, тогда как подход на основе ***γ-КФ*** позволяет получить целый ряд интересных количественных результатов для основных характеристик классических ***ОС-***моделей. Приведем оценку минимального размера ***НКФ*** в классических ***d-ОС (d=1,2)***, используя критерий неконструируемости конфигураций на основе ***γ-КФ*** [3,5,37,88,90].

<u>Теорема 14</u>. Если в классической 2-ОС с индексом соседства Мура существуют γ-КФ с размером BxB, то для нее существуют и НКФ размера LxL, а именно:

$$L = 2(B+2)\left\lceil \frac{2\ln a}{4(B+1)*\ln a - \ln G(\gamma)} * \left(B+3+\sqrt{B^2+\frac{\ln G(\gamma)}{\ln a}} \right) \right\rceil - 2$$

Для случая классической 1-ОС аналогичная оценка принимает следующий вид:

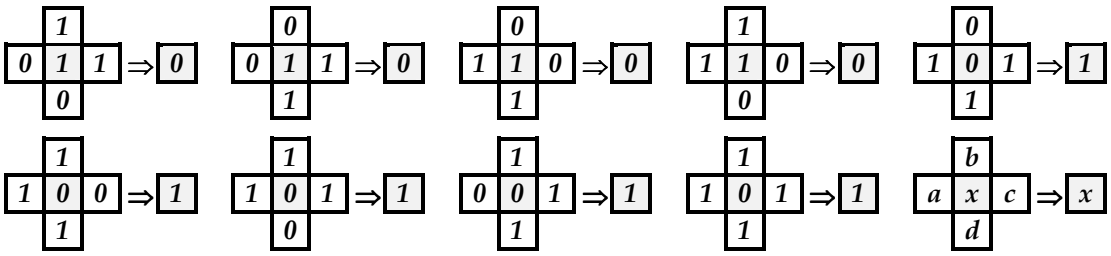
$$L = \left\lceil \frac{(n-1)*\ln a}{(n-1)*\ln a - \ln G(\gamma)} \right\rceil * (B+n-1) - n + 1$$

где: n – размер шаблона соседства структуры, G(γ) – соответствует определению 9 и a – мощность алфавита A, тогда как]M[обозначает целое число, не меньшее, чем M.

Используя теорему ***14,*** можно получать весьма существенный контраст результатов по применению понятий ***ВСКФ*** и ***γ-КФ.*** Интересный пример применения данного подхода для оценки минимальных размеров ***НКФ*** проиллюстрируем на введенной ***Дж. Кону-***

эем известной игре «***Жизнь***» [172,239]. Целью этой игры была попытка смоделировать на формальном уровне некоторые основные аспекты развития некоего биологического сообщества (*зарождение организмов, их гибель, выживание и т.п.*). Нетрудно убедиться, что игра легко погружаема в соответствующую бинарную классическую ***2-ОС*** с индексом соседства Мура [3,5,37]. Исследования данной игры проводятся многими математиками, программистами и любителями, как правило, с использованием метода компьютерного моделирования. Здесь получено весьма много интересных и просто занимательных результатов, опубликованных в различных изданиях, включая основанный специально для этих целей в США журнал [536]; синонимом игры «***Жизнь***» является «***Экология***».

А.Р. Смит в рамках исследования соответствующей игре «***Жизнь***» бинарной ***2-ОС*** показал, что она обладает ***НКФ*** минимального размера L^*L ($L=10^{10}$). Им для получения данной оценки был использован подход на основе понятия ***ВСКФ***, тогда как на основе понятия ***γ-КФ*** нам удалось принципиально улучшить данную оценку, доведя ее до вполне обозримой величины L^*L ($L=49$). Это делает весьма реальным получение уже самого вида ***НКФ*** в такого типа бинарных ***2-ОС***, используя возможности современных персональных компьютеров [114]. Аналогичным образом можно исследовать и минимальную по сложности на сегодня универсальную бинарную класссическую ***2-ОС Э. Бэнкса*** [132], имеющую индекс соседства Неймана и ***ЛФП***, определяемую подстановками вида:



a,b,c,d,x ∈ {0,1}; в остальных случаях

Можно показать, что данная классическая бинарная ***2-ОС*** вполне пригодна в качестве среды реализации вычислительных схем произвольной сложности. С другой стороны, из определения ее ***ЛФП*** нетрудно убедиться, что в ней существуют ***γ-КФ*** уже на *шаблоне соседства* (***ШС***), а значит и ***НКФ*** (теорема ***13***). Действительно, если число конфигураций ***ШС***, отображаемых ***ЛФП*** в ***1***-состояние центрального автомата шаблона равно $2^4 + 1=17$, то отображаемых в ***0***-состояние – только $2^4-1=15$. Тогда на основе теоремы ***14*** легко получаем и оценку размера ***14x14*** таких ***НКФ***, т.е. в универсальной ***ОС***-модели ***Э. Бэнкса*** существуют ***НКФ*** уже на квадратных блоках (***14x14***)-размера. В этой связи возникает следующая интересная гипотеза: ***минимальные по сложности (в смысле величины произведения размерности, размера ШС и мощности А-алфавита) универсальные классические ОС-модели обладают неконструируемостью типов НКФ и/или НКФ-1***. Все до сих пор полученные минимальные универсальные ***ОС***-модели согласуются с данной интересной гипотезой [5,8,9,54,88,90,131,132,158,536].

Таким образом, понятие ***γ-КФ*** и базирующийся на нем критерий неконструируемости ***Аладьева-Кимура-Маруока*** позволяют довольно эффективно исследовать ряд количественных аспектов динамики классических ***ОС***-моделей, тогда как понятие ***ВСКФ*** в ряде случаев более приемлемо для ее качественных исследований. При этом, во многом оба понятия хорошо дополняют друг друга. В целом ряде случаев вместо оптимальных или асимптотических оценок размеров ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях оказываются вполне достаточными простые формулы, как функции основных параметров структуры. В таком контексте эти формулы неоднократно использовались при исследованиях ***ОС***. В этом плане результат теоремы ***14*** принимает следующий достаточно простой вид, который достаточно удобен при численных оценках в задачах, связанных с ***НКФ*** [5,37].

***Теорема 15**. Если в классической 2-ОС с индексом соседства Мура существуют γ-КФ с размером BxB, то для нее существуют и НКФ на блоках минимального размера LxL, где величина L удовлетворяет следующим соотношениям, а именно:*

$$\left\lceil \frac{2B^2+5B+4}{B+1} \right\rceil \le L \le 8(2B^2+9B+10)\rceil \ln a[* a^{4B+4} - 2$$

Если в классической 1-ОС с шаблоном соседства размера n существуют γ-КФ длины B, то для нее существуют и НКФ минимальной длины L:

$$B \le L \le 2(B+n-1)(n-1) * a^{n-1} * \rceil \ln a[$$

где]M[обозначает целое число, не меньшее, чем M.

Результат данной теоремы дает оценку для размера минимального блока, содержащего ***НКФ***, как функцию основных параметров структуры: размеров ***γ-КФ*** и шаблона соседства, а также мощности ***A***-алфавита структуры. Теоремы ***14-15*** могут быть обобщены на случай высших размерностей с произвольным индексом соседства и оказываются полезными при исследованиях ряда аспектов динамики классических ***ОС***-моделей [3,5]. Как для более глубокого осмысления понятия неконструируемости, так и для создания на его основе эффективного аппарата исследований динамики ***ОС***-моделей крайне желательно определение разнообразных взаимосвязей между различными характеристиками ***ВСКФ***, ***γ-КФ***, ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3*** как количественными, так и качественными. В настоящее время полная картина в данном вопросе отсутствует, за исключением ряда отдельных результатов [5,9], представляемых ниже. В частности, из данных результатов следует, что критерий ***Мура-Майхилла*** (*теорема* ***7***) существования в классических ***ОС***-моделях ***НКФ***, базирующийся на понятии ***ВСКФ***, во многих отношениях весьма существенно уступает эквивалентному ему в целом критерию ***Аладьева-Кимура-Маруока*** (*теорема* ***13***), базирующемуся на введенном выше понятии ***γ-КФ***.

***Теорема 16**. Пусть $\tau^{(n)}=\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ есть декомпозиция ГФП $\tau^{(n)}$ на две глобальные функции $\tau^{(m)}$, $\tau^{(p)}$ той же 1-размерности и определенных в том же A-алфавите. Если ГФП $\tau^{(m)}$ не имеет ВСКФ, а $\tau^{(p)}$ имеет D-множество γ-КФ, то ГФП $\tau^{(n)}$ имеет то же D-множество γ-КФ. Если ГФП $\tau^{(m)}$ не имеет ВСКФ, а $\tau^{(p)}$ имеет ВСКФ, то ГФП $\tau^{(n)}$ имеет то же множество НКФ, что и функция $\tau^{(n)}$. Существуют ГФП, имеющие ВСКФ с ограниченным размером минимального простого ВБ и НКФ любого наперед заданного минимального размера. Существуют ГФП, для которых любая пара ВСКФ содержит НКФ. Пусть ГФП $\tau^{(n)}$ имеет множество M пар ВСКФ. Тогда ГФП $\tau^{(n)m}$ (m>1) имеют тождественное с функцией $\tau^{(n)}$ M-множество ВСКФ тогда и только тогда, когда по крайней мере одна КФ из каждой пары ВСКФ из M является НКФ для ГФП $\tau^{(n)}$. В противном случае $(\forall k \ge 1)(M_k \subset M_{k+1})$, где M_k – множество всех пар ВСКФ для глобальных функций перехода $\tau^{(n)k}$ $(k \ge 1)$. ГФП $\tau^{(n)}$ обладает НКФ тогда и только тогда, когда по меньшей мере одна из ГФП $\{\tau^{(m)},\tau^{(p)}\}$ обладает НКФ. Если по крайней мере одна ГФП из пары $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ обладает НКФ-1, то их композиция $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(p)}$ (n=m+p-1) будет обладать НКФ и/или НКФ-1. Последние два утверждения сохраняют силу и для случая d-размерности $(d \ge 1)$ и произвольного конечного A-алфавита.*

Приведем доказательство лишь последних утверждений. Пусть $\tau^{(m)}$ обладает ***НКФ***, что согласно одному из критериев наличия для ***ГФП*** неконструируемости ***НКФ***-типа обусловлено наличием для нее ***ВСКФ***, а значит и существованием пар конфигураций $c_1 \ne c_2$ $\{c_1,c_2 \in C(A,d,\phi)\}$ таких, что $c_1\tau^{(m)} = c_2\tau^{(m)} = c^* \in C(A,d,\phi)$. Несложно убедиться, что эти же пары ***КФ*** $\{c_1,c_2\}$ будут являться ***ВСКФ*** и для композиции $\tau^{(m)}\tau^{(p)}$, т.е. ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ также об-

ладает ***НКФ.*** Пусть теперь ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ обладает ***НКФ.*** Следовательно, для нее существуют такие ***КФ*** $c^* \in C(A,d,\phi)$, для которых отсутствуют предшественники $c^{*-1} \in C(A,d,\phi)$. Поэтому, вне зависимости от ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ композиция $\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ также будет иметь ***(как минимум)*** такие же конфигурации c^* неконструируемыми ***НКФ-***типа, что завершает доказательство нашего предпоследнего утверждения.

Рассмотрим теперь вопрос относительно неконструируемости типа ***НКФ-1.*** Пусть ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ в композиции $\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ обладает ***НКФ-1.*** Тогда для нее существует ***КФ*** $c^* \in C(A,d,\phi)$, для которой предшественники c^{*-1} существуют только во множестве $C(A,d,\infty)$. Положим на входе ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ ***КФ*** c^*. Тогда для ***КФ*** $c_1 = c^*\tau^{(p)} \in C(A,d,\phi)$ возможен лишь один из четырех вариантов, а именно: c_1 относительно ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ имеет ***(1)*** единственного предшественника $c^* \in C(A,d,\phi)$, ***(2)*** дополнительно предшественника $c_3 \in C(A,d,\infty)$, ***(3)*** дополнительно предшественника $c_2 \in C(A,d,\phi)$ $(c^* \neq c_2)$ либо ***(4)*** дополнительно предшественников $c_2 \in C(A,d,\phi)$ и $c_3 \in C(A,d,\infty)$. Несложно убедиться, что в первых двух случаях ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ будет иметь ***КФ*** $c_1 \in C(A,d,\phi)$ в качестве ***НКФ-1*** *(по определению* ***НКФ-1).*** В третьем случае ***ГФП*** $\tau^{(p)}$, а следовательно и $\tau^{(n)}$, будет обладать ***ВСКФ (НКФ);*** и, наконец, в четвертом случае ***ГФП*** $\tau^{(p)}$, а следовательно и $\tau^{(n)}$, будет обладать как минимум ***НКФ.*** Пусть теперь ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ обладает ***КФ*** $c^* \in C(A,d,\phi)$ в качестве ***НКФ-1,*** но тогда для нее существуют предшественники c^{*-1} только из множества $C(A,d,\infty)$. Следовательно, ввиду определяющего соотношения $\sigma^{(n)}(0,0,\ldots,0)=0$ они могуть быть сгенерированы ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ лишь из начальных ***КФ*** из того же множества $C(A,d,\infty)$. Таким образом, и ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ будет обладать ***КФ*** c^* в качестве ***НКФ-1.*** Таким образом, если по крайней мере одна ***ГФП*** из пары $\{\tau^{(m)},\tau^{(p)}\}$ обладает ***НКФ-1,*** то их композиция ***ГФП*** $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(p)}$ будет обладать ***НКФ-1*** и/или ***НКФ.***

В свете приведенных результатов, в частности, следует, что в классических ***ОС-***моделях существуют ***ГФП,*** имеющие различные множества ***ВСКФ*** и одинаковые множества ***НКФ.*** С теоретической точки зрения большой интерес представляет установление зависимостей между размерами ***(Б)*** минимальных блоков, содержащих ***ВСКФ***, ***γ-КФ*** и ***НКФ*** в классических ***d-ОС.*** Так, например, для ***γ-КФ*** и ***НКФ*** имеет место следующее соотношение: ***Б(γ-КФ) ≤ Б(НКФ)*** [3,5,37], тогда как для ***ВСКФ*** и ***НКФ*** картина значительно сложнее, а именно, имеет место следующий важный результат [5,88].

<u>Теорема 17</u>. Для каждого целого n≥2 существуют классические 1-ОС, для которых минимальные блоки ВСКФ и НКФ удовлетворяют соотношениям Б(ВСКФ)/Б(НКФ) = n или Б(ВСКФ)/Б(НКФ)=1/(n+1) соответственно при минимальных Б(γ-КФ)=1. Для каждого целого n ≥ 2 существует ГФП $\tau^{(n)}$ классической 1-ОС, не обладающая НКФ и НКФ-3, но имеющая НКФ-1 минимального размера L ≥ n-1. Для каждого целого n ≥ 3 существует ГФП $\tau^{(n)}$ классической бинарной 1-ОС, обладающая γ-КФ минимального размера L = n и ВБ ВСКФ минимального единичного размера.

В качестве иллюстрационного примера, подтверждающего справедливость первого соотношения, можно привести классическую ***1-ОС, ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками следующего достаточно простого вида, а именно:

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n \Rightarrow \Sigma x_j \pmod a, \quad \text{если } x_n \neq 2;\ x_j \in A=\{0,1,\ldots,a-1\};\ j=1 \ldots n$$
$$x_1x_2x_3 \ldots x_n \Rightarrow \Sigma x_j + 1 \pmod a, \quad \text{в противном случае}$$

Нетрудно убедиться, что определенная таким образом классическая структура обладает блочной ***НКФ*** вида $c_b=a$, тогда как для нее существуют ***ВСКФ*** с простыми ***ВБ*** минимального размера в ***n*** автоматов. Для установления второго соотношения вполне доста-

точно рассмотреть классическую ***1-ОС***, чья ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками (**29**), использованную при доказательстве теоремы ***10***. Определеная таким образом структура обладает ***ВСКФ*** с простыми ***ВБ*** минимального единичного размера, располагая при этом блочными ***НКФ*** минимального размера ***(n+1)*** и вида $c_b=0^n1$. При этом, в обоих случаях для структур имеют место единичные размеры минимальных блоков ***γ-КФ***. Доказательство второй части теоремы можно найти в монографиях [3,5,55,88].

Результат теоремы ***17*** представляет не только сугубо самостоятельный интерес, но на его основе можно делать вполне определенные выводы, глубже проясняющие сущность понятия неконструируемости в классических ***ОС-***моделях. Действительно, так как минимальный размер ***ВСКФ*** в классических структурах может неограниченно расти при постоянно минимальном размере ***НКФ*** и наоборот, то, пожалуй, не имеет особого смысла говорить о наличии ***ВСКФ*** как о первопричине существования ***НКФ***. Первопричиной существования ***НКФ*** является именно наличие ***γ-КФ*** в классических ***ОС-***моделях. Этот же результат дает вполне убедительное объяснение того факта, что на основе понятия ***ВСКФ*** невозможно получать удовлетворительные оценки минимальных размеров ***НКФ*** в классических ***ОС-***моделях и получать для них ряд других оценочных характеристик.

В связи с вышесказанным мы можем теперь с полным основанием констатировать, что критерий ***Мура-Майхилла*** (*теорема* ***7***) существования ***НКФ*** в классических ***ОС-***моделях во многих отношениях существенно уступает эквивалентному ему критерию ***Аладьева-Маруока-Кимура*** (*теорема* ***13***), базирующемуся на понятии ***γ-КФ***. Из самого же понятия ***γ-КФ*** и ряда других соображений следует, что в его основе лежит определенная асимметричность ***ЛФП*** в ***ОС-***модели [54], ибо само понятие ***γ-КФ*** есть не что иное, как асимметричность в отображениях локальной функцией $\sigma^{(n)}$ конфигураций на конечных блоках единичных автоматов структуры. В случае наличия детальной картины такой асимметрии можно было бы существенно продвинуться и в исследованиях как самой проблемы неконструируемости (*по сравнению с ее нынешним состоянием*), так и в сопутствующих ей многочисленных интересных вопросах, связанных с динамикой ***ОС-***моделей.

Переходим теперь к обсуждению остальных трех типов ***(НКФ-1,НКФ-2 и НКФ-3)*** неконструируемости в классических ***ОС-***моделях, которые согласно теоремы **2** могут сочетаться в весьма широких пределах. Рассмотрев критерии существования ***НКФ***, охарактеризуем состояние аналогичного вопроса для остальных типов неконструируемости в классических ***ОС-***моделях. Из определений ***1,3,4*** и теоремы **2** несложно убедиться, что никакая конечная ***КФ*** $c\in C(A,\phi)$ не может быть ***одновременно*** неконструируемой типа более одного. Следовательно, попарные пересечения множеств ***НКФ-1***, ***НКФ-2***, ***НКФ-3*** для любой ***ГФП*** классической ***d-ОС*** являются пустыми множествами. Следующая теорема представляет критерий существования ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** в классической ***d-ОС***, не обладающей неконструируемостью типов ***НКФ*** и ***НКФ-3***.

<u>Теорема 18</u>. Будем говорить, что множество $C(A,d,\infty)$ замкнуто относительно ГФП $\tau^{(n)}$ в классической d-0C, если выполняется соотношение $(\forall c`\in C(A,d,\infty))(c`\tau^{(n)}\in C(A,d,\infty))$; в противном случае имеет место незамкнутость $C(A,d,\infty)$-множества. Классическая d-ОС, не имеющая НКФ-3 и/или НКФ, обладает НКФ-1 {НКФ-2} тогда и только тогда, когда $C(A,d,\infty)$-множество незамкнуто {замкнуто} относительно ГФП структуры.

Доказательство теоремы ***18*** сводится к следующему (*ради простоты и не нарушая общности проводится для случая* ***1-ОС***). Рассмотрим произвольную классическую ***1-ОС***, не обладающую ***НКФ***, а значит ***НКФ-3*** и парами ***ВСКФ***. Из определения **4** с очевидностью следует, что наличие в структуре ***НКФ-1*** с необходимостью требует и незамкнутости множества $C(A,\infty)$ относительно ее ***ГФП***. Предположим теперь, что при отсутствии в структуре ***НКФ*** в ней будут отсутствовать и ***НКФ-1*** при условии незамкнутости $C(A,\infty)$-множества. Но тогда каждая ***КФ*** $c\in C(A,\phi)$ должна иметь не более единственного $c`$-предшес-

твенника из множества $C(A,\phi)$. Наряду с этим каждая блочная ***КФ*** вида $c_b=0^p x_1x_2...x_m0^k$ $(x_j\in A;\ j=1..m)$ является в структуре конструируемой при любых целых значениях $p,k\geq 0$. С другой стороны, согласно нашего предположения существует по крайней мере одна *бесконечная* ***КФ*** $c^*\in C(A,\infty)$ такая, что $c^*\tau^{(n)}=c''\in C(A,\infty)$. Очевидно, на основе такой c^*-***КФ*** можно указать ненулевую блочную ***КФ*** c_b'' сколь угодно большой длины такую, что будет справедливо $c_b''=\square_b$, где $\square_b$ – нулевая блочная ***КФ*** длины $|c_b|-n+1$. Рассмотрим теперь конечную ***КФ*** вида $c\hat{}=\square c_b\square$ и результат $(c^{\#}$-***КФ***$)$ применения к ней глобальной функции $\tau^{(n)}$ определенной выше классической структуры, а именно:

$$\begin{array}{l}\tau^{(n)}\ : c\hat{}=\ \square y_1y_2y_3.....y_m\square\\ \downarrow\quad\ : c^{\#}=....\square c`_1\ .....\ 0^p\ ...\ c`_2\square\end{array}$$

В связи с вышесказанным, длину $c\hat{}$-***КФ*** можно выбирать так, что p-длина нулевой блочной ***КФ***, разделяющей подконфигурации $\{c`_1, c`_2\}$ в $c^{\#}$-***КФ***, может быть сделана сколь угодно большой. Очевидно, по крайней мере одна из подконфигураций $\{c`_1,c`_2\}$ должна быть ненулевой, ибо в противном случае имело бы место соотношение $c\hat{}\tau^{(n)}=\square$, говорящее о наличии в структуре ***ИсКФ*** (*а значит*, ***ВСКФ*** *и* ***НКФ-3*** *и/или* ***НКФ***), что противоречит условию. Не нарушая общности, для определенности полагаем вначале, что $c`_1\neq\square$ и $c`_2=\square$. Но так как длину $c\hat{}$-***КФ*** можно выбирать сколь угодно большой, то нетрудно убедиться, что в таком случае для ***КФ*** $c^{\#}=\square c`_1\square$ будет существовать бесконечное множество $c\hat{}$-предшественников любой наперед заданной длины (*а значит* ***ВСКФ*** *и* ***НКФ***), что противоречит условию. Рассмотрим, наконец, случай при $c`_1, c`_2\neq\square$; по крайней мере одна из подконфигураций $\{c`_1,c`_2\}$ должна быть ***НКФ-1*** (*по очевидным причинам эти подконфигурации не могут быть* ***НКФ-3*** *и одновременно* ***НКФ-2***), ибо в противном случае ***КФ*** $\{c`_1,c`_2\}$ имели бы по одному предшественнику соответственно $\{c''_1,c''_2\}$ из $C(A,\phi)$-множества. Но тогда можно было бы определить пару ***ВСКФ*** $\{c\hat{}, c^{@}=\square c''_1 0^k c''_2\square\}$ $(c\hat{}\tau^{(n)}=c^{@}\tau^{(n)}=c^{\#})$ для ***ГФП*** исходной структуры, что противоречит условию и завершает доказательство критерия существования ***НКФ-1*** в классических ***1-ОС***, не обладающих ***НКФ*** и ***НКФ-3***.

Достаточность условия очевидна – замкнутость $C(A,\infty)$-множества влечет за собой наличие в классической ***1-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-2*** согласно его определения ***4***. Еще раз отметим, что $C(A,\phi)$-множество по определению содержит нулевую (*по составляющим ее* ***0****-состояниям)* $\square$-***КФ***, имеющую нулевую длину. Предположим, что классическая ***1-ОС*** обладает ***НКФ-2*** при отсутствии для нее ***НКФ***-неконструируемости. Но тогда согласно вышесказанного и теоремы ***2*** $C(A,\infty)$-множество должно быть замкнутым, в противном случае структура обладала бы ***НКФ-1***, что противоречило бы теореме ***2*** (*табл.* ***3****; сочетания* ***13*** *и* ***14***). Следовательно, если замкнутость $C(A,\infty)$-множества относительно ***ГФП*** классической ***1-ОС*** достаточна для наличия в ней ***НКФ-2***, то при отсутствии в ней ***НКФ*** и ***НКФ-3*** данное условие является и необходимым, и достаточным для существования в ней ***НКФ-2***. Что и завершает доказательство теоремы ***18***. Результат теоремы ***18*** обобщается также и на случай высших размерностей классических ***ОС***-моделей.

В предположении, что полностью нулевая $\square$-***КФ*** принадлежит $C(A,d,\phi)$-множеству (*здесь мы в своем роде используем методику нестандартного анализа* [278], *предполагая существование такой «идеальной»* ***КФ***), можно дать и иную формулировку теоремы ***18***, представляющую значительно более удобный критерий существования неконструируемостей типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** в классических ***d-ОС***, не обладающих типами неконструируемости как ***НКФ***, так и ***НКФ-3*** [3,5,8,9,54-56,88,90,536].

***Теорема 19**. В классической d-ОС, не обладающей НКФ и НКФ-3, существуют НКФ-1 {НКФ-2} тогда и только тогда, когда для ее ГФП $\tau^{(n)}$, существуют {отсутствуют} КФ $c \in C(A,d,\infty)$ такие, что имеет место соотношение $c\tau^{(n)}=\square$. В классической d-ОС, не обладающей НКФ, существуют НКФ-1 тогда и только тогда, когда для ее ГФП $\tau^{(n)}$, существуют КФ $c^{\infty} \in C(A,d,\infty)$ такие, что имеет место соотношение $c^{\infty}\tau^{(n)} = \square$.*

Не нарушая общности, представим набросок доказательства второй части теоремы на основе классических ***1-ОС.*** Согласно определения ***НКФ-1*** очевидно, что при наличии в ***1-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-1*** для ее ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ существуют ***КФ*** $c^{\infty} \in C(A,1,\infty)$ такие, что $c^{\infty}\tau^{(n)} = \square$. Пусть теперь для ***1-ОС*** без ***НКФ*** существуют ***КФ*** $c^{\infty} \in C(A,1,\infty)$ такие, что $c\tau^{(n)}=\square$. Ввиду отсутствия для структуры ***НКФ*** предположим также, что каждая ***КФ*** $c \in C(A,1,\phi)$ имеет строго по одному предшественнику c^{-1} из того же множества $C(A,1,\phi)$, т.е. отсутствуют и ***НКФ-1***. С другой стороны, учитывая наличие ***КФ*** $c^{\infty} \in C(A,1,\infty)$ такой, что $c^{\infty}\tau^{(n)}=\square$, определяем на ее основе конечную ***КФ*** c_o вида $c_o=\square x_1x_2 \ldots x_q\square$, где кортеж $<x_1x_2 \ldots x_q>$ $(x_1,x_q \in A\setminus\{0\})$ – часть ***КФ*** c^{∞} достаточно большой длины. Но тогда получаем $c_o\tau^{(n)}=\square c_1 0 \ldots 0 c_2\square$, где по меньшей мере одна из ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой. В противном случае в структуре существовали бы пары ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что противоречит условию. Пусть лишь одна из $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от *нулевой (для определенности* c_1*)*. Но тогда она будет иметь бесконечно много предшественников вида $c = \square x_1x_2 \ldots x_q\square$, что также противоречит отсутствию для структуры ***НКФ***. Следовательно, ввиду отсутствия ***НКФ*** она должна иметь предшественников из множества $C(A,1,\infty)$, а не из $C(A,1,\phi)$, т.е. быть ***НКФ-1***. Пусть теперь обе ***КФ*** $\{c_1,c_2\}$ будут конечными, отличными от *нулевых* и обе имеют по одному предшественнику $\{c^{-1}_1,c^{-1}_2\}$ из множества $C(A,1,\phi)$. Рассмотрим ***КФ*** $c^* = \square\, c^{-1}_1 00 \ldots 00 c^{-1}_2\square$, для которой по определению получаем $c^*\tau^{(n)}=\square c_1 00 \ldots 00 c_2\square$. Но тогда для соответствующим образом определенной ***КФ*** $c^{\#}=\square x_1x_2x_3 \ldots x_q\square$ получаем, что $c^*\tau^{(n)} = c^{\#}\tau^{(n)} = \square c_1 00 \ldots 00 c_2\square$ $(c^* \neq c^{\#})$, что вновь приводит к противоречию с отсутствием для структуры ***НКФ***. Следовательно, по крайней мере одна из ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ должна быть ***НКФ-1***, что и завершает доказательство.

Данная теорема дает ответ на целый ряд вопросов, поставленных в монографии [3] и в других работах. При этом, она может быть использована для обобщения ряда результатов по неконструируемости в классических ***d-ОС***. Дальнейшее развитие проблемы неконструируемости позволило нам ввести *новое* понятие ***ВСКФ*** как основу обобщенного критерия неконструируемости в классических ***ОС-***моделях [5,8,9,54-56,88,90], а именно.

***Определение 10**. Две конфигурации $c_1,c_2 \in C(A,d)$ $(c_1 \neq c_2)$ образуют для ГФП $\tau^{(n)}$ классической d-ОС пару ВСКФ-1 тогда и только тогда, когда для них имеет место следующее определяющее соотношение, а именно: $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi)$.*

Введенное понятие ***ВСКФ-1*** взаимной стираемости пары произвольных ***КФ*** в классических ***d-ОС*** самым тесным образом связано с ***общей проблемой*** неконструируемости, о чем свидетельствует следующий важный результат [56,88].

***Теорема 20**. Классическая d-ОС обладает типами неконструируемости НКФ (возможно и НКФ-3) и/или НКФ-1 тогда и только тогда, когда в структуре существуют пары ВСКФ-1. Если же для такой структуры отсутствуют ВСКФ-1, то она обладает НКФ-1; обратное в общем случае неверно.*

Идея доказательства теоремы иллюстрируется *(не нарушая общности)* для случая ***1-ОС***, до-

вольно прозрачна и сводится к следующему. Предположим, что классическая ***1-ОС*** обладает ***НКФ*** (*возможно*, *и* ***НКФ-3)*** и/или ***НКФ-1.*** Если в структуре существуют ***НКФ-3*** и/или ***НКФ*** (*а возможно*, *и* ***НКФ-1)***, то согласно теоремы ***7*** и вышесказанному, для такой структуры должны существовать и пары ***ВСКФ-1*** $\{c_1, c_2\}$ вида $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,\phi)$ $\{c_1 \neq c_2;\ c_1, c_2 \in C(A,\phi)\}$**.** Пусть в структуре существуют ***НКФ-1*** без ***НКФ*** и ***НКФ-3.*** Но тогда множество $C(A,\infty)$ незамкнуто относительно ***ГФП*** структуры, т.е. в ней существует ***КФ*** $c\hat{}\in C(A,\infty)$ такая, что $c\hat{}\tau^{(n)}=c` \in C(A,\phi)$**.** Если для $c$`***-КФ*** существует предшественник также из $C(A,\phi)$**-**множества**,** то согласно определения ***10*** в такой структуре существуют пары ***ВСКФ-1.*** Предположим, что для каждой ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$**,** отличной от ***НКФ-1,*** существует предшественник только из $C(A,\phi)$**-**множества, что в соответствии с определением ***4*** влечет за собой наличие в структуре ***НКФ-2,*** противоречащее условию**.** Следовательно, в такой структуре должны существовать пары ***КФ*** вида $c_1 \in C(A,\phi)$ и $c_2 \in C(A,\infty)$ такие, что $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,\phi)$**,** т.е. пары ***ВСКФ-1.*** Таким образом, необходимость условия полностью доказана**.** Пусть теперь классическая ***1-ОС*** обладает парами ***ВСКФ-1.*** Если такие пары включают и классические ***ВСКФ*** (*определение* ***6)***, то согласно теоремам ***2*** и ***7*** структура будет обладать ***НКФ,*** а также**,** возможно**,** ***НКФ-3*** и ***НКФ-1.*** Предположим**,** что каждая пара ***ВСКФ-1*** включает по крайней мере одну ***КФ*** из $C(A,\infty)$**-**множества**,** что говорит о его незамкнутости. Но тогда нетрудно показать, что ***1-ОС*** будет обладать ***НКФ*** (*возможно и* ***НКФ-3)*** и/или ***НКФ-1.*** Сказанное и завершает доказательство достаточности условия. Пусть теперь для классической ***1-ОС*** отсутствуют пары ***ВСКФ-1.*** Но тогда для нее согласно вышесказанному отсутствуют ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1***, тогда как каждая ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ является в структуре ***НКФ-2.*** С другой стороны, согласно теоремы ***2*** наличие для классической ***1-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-2*** не влечет за собой отсутствия для нее пар ***ВСКФ-1.*** Сказанное и завершает доказательство теоремы ***20*** в целом.

Результат теоремы ***20*** является существенным *обобщением* хорошо известного критерия ***Мура-Майхилла (теорема 7)*** существования ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях, а также эквивалентного ему критерия ***Аладьева-Кимура-Маруока (теорема 13)***, распространяя их на другие типы неконструируемости. Так как понятие ***НКФ-3*** является следствием дифференцировки ***НКФ***-неконструируемости на основе различий ***блочной*** и ***конфигурационной*** неконструируемостей, то представляется интересным установить критерий того, чтобы конечная ***КФ*** являлась в структуре ***НКФ-3.*** Данный критерий представляет следующая основная теорема [5,8,9].

<u>Теорема 21</u>. Конфигурация $c=\square c_b\square$ является для классической 1-ОС неконструируемой типа НКФ-3 тогда и только тогда, когда блочная КФ c_b в структуре конструируема, тогда как блочная КФ $c`_b=0^m c_b 0^m$ $(m \geq a^n+n-1)$ является в данной структуре неконструируемой НКФ-типа.

Доказательство теоремы сводится к следующему. Пусть некоторая ***КФ*** $c=\square c_b\square$ является в классической ***1-ОС*** *неконструируемой* типа ***НКФ-3.*** Тогда согласно определения ***3*** блочная c_b***-КФ*** является в такой структуре конструируемой при отсутствии для ***КФ*** $c=\square c_b\square$ предшественников из множества $C(A)$**.** В свете данного условия предположим, что при некотором $m > a^n+n$ блочная ***КФ*** $c_b^* = 0^m c_b 0^m$ является конструируемой, а именно**:**

$$c`_b = \underbrace{\ldots y_1 \ldots y_n \ldots y_1 \ldots y_n}_{S} \,|\, \ldots G \ldots \,|\, \underbrace{\ldots z_1 \ldots z_n \ldots\ldots z_1 \ldots\ldots z_n}_{B} \,|\, x_1 \ldots x_{n-1}$$

$$c^*_b = \underbrace{000\ldots\ldots\ldots\ldots 0000}_{m} \,|\, \ldots c_b \ldots \,|\, \underbrace{000\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0000}_{m} \,|$$

т.е. для нее существует по меньшей мере одна блочная ***КФ***-предшественник $c`_b$ такая, что $c`_b\tau^{(n)} = c^*_b$. Но так как имеет место соотношение $m > a^n+n$, то слева и справа от ***G***-подконфигурации в $c`_b$-***КФ*** существует по меньшей мере по одной паре идентичных кортежей соответственно $<y_1 \dots y_n>$ и $<z_1 \dots z_n>$. Следовательно, можно определить ***КФ*** вида $c''=\dots SSSGBBB \dots$ такую, что $c''\tau^{(n)}=\square c_b\square=c \{c''\in C(A)\}$, что противоречит предположению о том, что ***c-КФ*** является в структуре ***НКФ-3***. Полученное противоречие и доказывает необходимость условия. Предположим теперь, что для ***КФ*** $c=\square c_b\square$ блочная c_b-***КФ*** является конструируемой, а блочная ***КФ*** $c^*_b=0^m c_b 0^m$ при $m>a^n+n$ является ***НКФ***. В этом случае, очевидно, исходная ***c-КФ*** не может иметь предшественников из ***C(A)***-множества, что доказывает достаточность условия и теоремы ***21*** в целом.

Результат теоремы ***21*** представляет собой *конструктивный* тест на принадлежность произвольной ***КФ*** $c\in C(A,\phi)$ к типу ***НКФ-3***, являясь при этом достаточно эффективным средством в целом ряде теоретических исследований по динамике классических ***ОС***-моделей. Из приведенных в разделе результатов можно сделать вывод, что понятие неконструируемости в классических ***d-ОС*** изучено достаточно детально, поэтому в настоящее время данный раздел теории ***ОС***-моделей представляется нам одним из наиболее развитых. Однако остается ряд открытых вопросов и перспективных направлений исследования. Прежде всего, это относится к отсутствию удовлетворительных критериев существования для классических ***d-ОС*** сочетаний типов неконструируемости согласно табл. ***2*** в ее полном объеме. Представленные в разделе результаты закрывают лишь часть (*хотя и очень существенную*) данного вопроса. Более детальную информацию по проблеме неконструируемости можно найти в цитированной в разделе литературе и в списке [536].

В основном, до сих пор нами рассматривались три базовых типа неконструируемости, а именно ***НКФ***, ***НКФ-1*** и ***НКФ-2***. Однако классическая ***ОС***-модель может обладать также неконструируемостью типа ***НКФ-3***. Данный тип неконструируемости определяет наличие для структуры конечной ***КФ*** вида $c=\square x_1x_2\dots x_p\square; x_1, x_p\in A\setminus\{0\}$, не имеющей предшественников из множества $C(A,1,\infty)\cup C(A,1,\phi)$, тогда как блочная ***КФ*** $x_1x_2 \dots x_p$ не является в структуре ***НКФ***. Наличие данного типа неконструируемости демонстрировалось выше, в ряде случаев использование данного типа неконструируемости оказывается достаточно полезным средством при исследованиях динамических свойств классических ***ОС***-моделей. Здесь же мы еще раз дополнительно к уже сказанному приведем мотивации, почему данный тип неконструируемости не отнесен нами к *базовому*. Рассмотрим пример бинарной ***1-ОС***, чья ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками вида:

$000 \to 0$	$010 \to 1$	$100 \to 0$	$110 \to 1$
$001 \to 1$	$011 \to 0$	$101 \to 1$	$111 \to 1$

Пытаясь на основе данной ***ЛФП*** определить для ***КФ*** $c=\square 1\square$ предшественников, убеждаемся, что их для нее не существует ни во множестве $C(A,d,\phi)$, ни во множестве $C(A,d,\infty)$:

	.....	–	1	0	1	0	0	0	.....
	.....	–	0	1	1	0	0	0	.....
t - 1	.....	–	–	–	0	1	1	–	.....
	.....	–	–	–	0	0	0	0	.....
t	.....	0	0	1	0	0	0	.....	.....

С другой стороны, блочная ***КФ*** $c_b=1$ не является ***НКФ***, ибо ее конструируемость обеспечивается уже за счет ***5*** параллельных подстановок, определяющих ***ЛФП*** структуры. Однако, определив на основе ***КФ*** $c_b=1$ блочную ***КФ*** $c^*_b=0010$, несложно убедиться, что она является ***НКФ***. Следовательно, обобщая сказанное, каждая ***КФ*** типа ***НКФ-3*** легко дооп-

ределяется до ***НКФ***, т.е. наличие в классической ***d-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-3*** влечет за собой наличие для нее и ***НКФ-***неконструируемости. Тогда как обратное в общем случае неверно, т.е. классическая ***d-ОС*** может обладать неконструируемостью типа ***НКФ*** при отсутствии для нее ***НКФ-3.*** В качестве простого примера приведем классическую бинарную ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$ и ***ЛФП*** следующего вида

$$00 \to 0 \qquad 01 \to 0 \qquad 10 \to 0 \qquad 11 \to 1$$

Очевидно, согласно критерия существования ***НКФ*** на основе понятия ***γ-КФ*** (*теорема* ***13***) можно удостовериться, что определенная таким образом ***1-ОС*** обладает ***НКФ***, в частности, уже блочная ***КФ*** вида $c_b=101$. С другой стороны, для структуры отсутствуют ***НКФ-3.*** Действительно, рассмотрим произвольную *конструируемую* в структуре блочную ***КФ*** c^*:

$c^{-1}=$	.....	y_0	y_1	y_2	.....	y_p	y_{p+1}	.....
$c^*=$	.....	0	x_1	x_2	.....	x_p	0	.....

Исходя из ***ЛФП*** структуры, несложно убедиться, что для такой *блочной* ***КФ*** c^* можно определить ее предшественник c^{-1}, принадлежащий множеству $C(A,d,\phi)$, что и говорит об отсутствии для структуры неконструируемости типа ***НКФ-3.*** Таким образом, ***наличие в классической d-ОС ($d \geq 1$) неконструируемости типа НКФ-3 обусловливает наличие в ней и НКФ-неконструируемости, тогда как обратное в общем случае неверно.*** Вместе с тем, можно показать: ***что в классической d-ОС существуют НКФ и/или НКФ-3 только тогда, когда для нее существуют конечные КФ c, не имеющие предшественников из множества $C(A,d,\infty)\cup C(A,d,\phi)$*** [88]. Между тем, в целом ряде случаев нам будет довольно удобно группировать оба типа неконструируемости под единым понятием «***НКФ***», отдельно не выделяя специфического типа ***НКФ-3***, который в некоторых случаях полезен.

Наряду с классическими ***ОС-***моделями большой прикладной интерес представляют так называемые конечные ***ОС-***модели, состоящие из сколь угодно большого, но конечного числа единичных автоматов. Данный класс структур с теоретической точки зрения наиболее интенсивно исследуется японскими математиками [135,185,230], а также рядом и других исследователей [1,3,138,147,148,158,159,161,166,170,171,173,175-179,205,267]. Наши результаты в этом направлении представлены в монографиях [1,3,5,55]. Работы в данном направлении достаточно перспективны, имея в виду многочисленные прикладные аспекты класса конечных ***ОС-***моделей, прежде всего в качестве использования их как параллельных дискретных моделей различных объектов. В отношении проблемы неконструируемости ряд результатов по конечным ***ОС-***моделям представляется в последнем разделе главы, здесь же представим только один результат, непосредственно связанный с общей проблемой неконструируемости в классических ***ОС-***моделях.

<u>Теорема 22</u>. Если ГФП $\tau^{(n)}$ обладает НКФ, НКФ-3 и/или НКФ-1, то существует достаточно широкий класс конечных замкнутых d-ОС с ГФП, обладающими $НКФ_f$, и наоборот. Среди множества всех $НКФ_f$ устанавливаются прямые и косвенные аналоги НКФ, НКФ-3 и НКФ-1.

Результат теоремы ***22*** является распространением ранее полученных нами результатов [55,56,90] на случай неконструируемости типа ***НКФ-3.*** Однако в общем случае конечных ***ОС-***моделей данная теорема не имеет места. Весьма интересным представляется исследование проблемы неконструируемости для важного с точки зрения физического моделирования класса ***ОСнР-***моделей ***(раздел 1.2).*** Особенностям проблемы неконструируемости для случая конечных ***ОС-***моделей посвящен последний раздел главы. Завершив на этом обсуждение критериев существования типов неконструируемости в классических ***ОС-***моделях, переходим к алгоритмическим аспектам данной проблематики.

2.4. Алгоритмические аспекты проблемы неконструируемости и связанные с нею вопросы динамики классических ОС-моделей

Алгоритмическая разрешимость проблемы неконструируемости является одним из ключевых вопросов математической теории ***ОС-***моделей и целого ряда важных ее приложений, особенно в плане использования классических ***d-ОС*** в качестве концептуальных и практических моделей пространственно-распределенных динамических систем, из которых наибольший интерес представляют реальные физические системы [3,5]**.** В общей постановке проблема разрешимости сводится к следующему вопросу**:** ***Существует ли алгоритм для определения того, будет ли произвольная классическая ОС-модель обладать типами неконструируемости НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3?*** В такой общей постановке данная проблема остается пока открытой, но имеются ответы на несколько более частные, но не менее важные вопросы, представляющие значительный самостоятельный интерес [3,5,8,9,88,536]**.** Наиболее полное решение получено для случая классических ***1-ОС,*** обсуждение с которого и начинается в настоящем разделе. Прежде всего, относительно произвольных блочной или конечной ***КФ*** имеет место следующий *основной* результат, имеющий целый ряд важных приложений в ***ТОС-***проблематике, а именно.

<u>Теорема 23</u>. Относительно произвольной блочной или конечной КФ проблема определения ее типа (конструируемая, НКФ, НКФ-1, НКФ-2 или НКФ-3) для классической 1-ОС алгоритмически разрешима.

Доказательство теоремы достаточно прозрачно и сводится к следующему**.** Разрешимость для случая блочной c_b***-КФ*** очевидна и в виду того, что для такой ***КФ*** непосредственные предшественники могут находиться только во множестве блочных ***КФ*** длиной $|c_b|+n-1$**.** Для случая же конечной ***КФ*** $c=\square c_b\square$ ее тип также определяется конструктивно на основе подхода, реализованного при доказательстве теоремы ***21.*** Для этих же целей можно использовать и результат теоремы ***35*** [5]. Данные подходы позволяют не только конструктивно определять тип произвольных блочной или конечной ***КФ,*** но и устанавливать саму структуру множества их непосредственных предшественников**,** что в целом ряде случаев весьма важно. Для общего же ***d-***мерного ***(d≥2)*** случая алгоритмически разрешимой является задача определения для произвольной блочной или конечной ***КФ*** ее типа ***(****конструируемая****, НКФ*** *либо* ***НКФ-3).***

Одним из подходов к решению проблемы разрешимости существования в классических ***ОС-***моделях того или иного типа неконструируемости является установление оценки сверху для минимальных размеров ***внутреннего блока*** пары ***ВСКФ,*** размеров ***γ-КФ*** или неконструируемой ***КФ*** искомого типа ***(НКФ,НКФ-1,НКФ-2,НКФ-3).*** В случае классических ***1-ОС*** мы поступали именно таким образом и в этом направлении был получен ряд результатов, представляющих и самостоятельный интерес [3,5,8,9,37,53-57,73,88,90,536].

<u>Теорема 24</u>. Для любого целого n≥2 существует ГФП $\tau^{(n)}$ классической 1-ОС, не обладающая НКФ и обладающая НКФ-1 минимальной длины $L \geq n-1$.

Подобный вопрос играет весьма важную роль для оценки минимального размера ***γ-КФ*** как при исследовании проблемы неконструируемости в общем случае**,** так и при изучении целого ряда других динамических свойств классических ***ОС-***моделей. Для случая классических ***1-ОС*** ответ дает следующая полезная теорема [3,5,88].

<u>Теорема 25</u>. Для любого целого n≥2 существует ГФП $\tau^{(n)}$ классической бинарной 1-ОС, обладающая следующими свойствами одновременно, а именно:

- ***ГФП $\tau^{(n)}$ структуры обладает γ-КФ минимальной длины L = n;***
- ***разность минимальных размеров γ-КФ и ВБ ВСКФ равна n - 1;***
- ***ГФП $\tau^{(n)}$ структуры не обладает неконструируемостью типа НКФ-1;***
- ***для любого целого $k \geq 1$ ГФП $\tau^{(n)k}$ обладает γ-КФ минимальной длины n;***
- ***существуют целые $m_1=m_1(n)$ и $m_2=m_2(n)$ такие, что блочные КФ вида $c = 0^{p_1 \geq m_1} 10^{p_2 \geq m_2}$ являются в структуре НКФ, где $m_1 < m_2$ – возрастающие функции от n-переменной;***
- ***КФ вида c_p=□1^p□ ($p \geq n-1$) являются для ГФП пассивными, т.е. $c_p\tau^{(n)}=c_p$.***

Теорема ***25*** относительно легко обобщается на случаи высших размерностей путем специального *погружения* ***1-ОС***, удовлетворяющей условиям теоремы, в классическую ***d-ОС ($d \geq 2$)***. Из данной теоремы и ряда других результатов в этом направлении следует [3], что невозможно получать удовлетворительные количественные соотношения между минимальными размерами ***γ-КФ*** и ***ВБ ВСКФ*** в общем случае классических ***ОС***-моделей. Данная ситуация служит одной из причин затруднений при количественных исследованиях проблемы неконструируемости в общего типа классических ***ОС***-моделях. Более того, из теоремы ***25*** и того факта, что минимальный размер у ***γ-КФ*** не больше минимального размера ***НКФ***, легко вытекает, что существуют классические ***ОС***-модели с любым наперед заданным минимальным размером ***НКФ***.

В рамках исследования *разрешимости* проблемы неконструируемости нами и рядом других авторов [54-56,131] изучался вопрос взаимосвязи минимальных размеров ***НКФ*** и ***ВБ ВСКФ*** в классических ***ОС***-моделях. Однако, несмотря на предпринятые усилия в данном направлении, удовлетворительного решения так и не было получено. Между тем, целый ряд полученных в данном направлении результатов позволил сформироваться следующему утверждению: ***в общем случае классических d-ОС (d>1) невозможно получить достаточно удовлетворительную количественную оценку минимального размера у НКФ как функцию минимального размера ВБ ВСКФ, и наоборот.*** Данное утверждение позволило прояснить целый ряд существовавших до него принципиальных вопросов [53-57].

На основе ряда результатов по проблеме декомпозиции ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях, рассматриваемых ниже, в целом ряде случаев возможно сводить решение проблемы существования ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1*** к решению аналогичных проблем для существенно более простых ***ГФП*** той же размерности. Иногда такой подход значительно упрощает решение проблемы, однако в общем случае его прямое использование результата не дает. Между тем, именно основываясь на данном подходе, первоначально был получен следующий достаточно интересный результат [5,55,88].

<u>Определение 11</u>. Алгоритм, устанавливающий существование пар ВСКФ в классических ОС-моделях, назовем «существенно конструктивным», если он для произвольной ГФП не только дает ответ «да/нет» на вопрос о существовании ВСКФ, но и в случае положительного ответа определяет все типы существующих для модели пар ВСКФ.

В свете определения ***11*** и на основе результатов исследования проблемы декомпозиции ***ГФП*** в классических ***d-ОС ($d \geq 2$)***, удалось пролить свет и на данный вопрос [37].

<u>Теорема 26</u>. В общем случае отсутствует существенно конструктивный алгоритм, решающий проблему существования для ОС-моделей ($d \geq 2$) пар ВСКФ.

Дальнейшее развитие методики доказательства данной теоремы позволило [90] доказать алгоритмическую неразрешимость проблемы существования для классических ***d-0C*** неконструируемости типа ***НКФ-3***, а именно был доказан следующий результат, имеющий целый ряд достаточно важных применений в качестве аппарата исследований в ***ТОС***.

Теорема 27. Проблема существования в произвольной классической d-ОС (d ≥ 2) неконструируемости типа НКФ-3 алгоритмически неразрешима. Проблема существования для произвольной классической d-ОС (d ≥ 2) пар ВСКФ-1 алгоритмически неразрешима.

А так как согласно вышесказанному (теорема *3)* для каждой ***ОС***-модели множество всех ***НКФ-3*** составляет строгое подмножество множества ***НКФ***, то алгоритмически неразрешимой является и проблема существования ***НКФ*** в произвольной классической ***d-ОС (d≥2)***, что было ранее доказано ***Ю. Кари*** [277] на основе другого подхода. Таким образом, в общем случае для классических ***d-ОС (d≥2)*** алгоритмически неразрешимыми являются проблемы существования неконструируемостей типов ***НКФ-3*** и ***НКФ***, а также и пар ***ВСКФ***, ***ВСКФ-1*** и ***γ-КФ***. Таким образом, неразрешимость общей проблемы неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3*** для классических ***ОС***-моделей предполагает развитие частных методов решения данных проблем для ***ОС***-моделей определенных типов либо классов. Это может иметь целый ряд важных теоретических и прикладных выходов. Совершенно иная картина имеет место для случая ***1-ОС***, а также неконструируемостей типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2***. Опыт работы с ***ОС***-моделями размерности ***d=2*** показывает, что не взирая на алгоритмическую неразрешимость для класса таких структур, проблемы определения наличия для них неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3*** в случае конкретных ***2-ОС*** данная проблема всегда получала разрешение в виде конструктивных алгоритмов. Поэтому здесь имеет смысл говорить только об отсутствии единого для класса всех ***d-ОС (d≥2)*** разрешающего алгоритма, тогда как в каждом конкретном случае данная проблема, на наш взгляд, как правило имеет конструктивное решение, определяемое конкретной спецификой локальной функции перехода классической структуры.

В частности, одним из подходов к решению данной проблемы является метод (*инвариантный относительно свойства неконструируемости*) моделирования одной классической ***d-ОС (d ≥ 2)*** другой структурой того же класса и той же размерности, но с простейшим индексом соседства (раздел ***1.1)***, например, для случая ***2-ОС*** такой индекс имеет вид $X = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$. Увеличение мощности ***A***-алфавита моделирующей структуры в целом ряде случаев существенно компенсируется значительным упрощением процедур анализа ***ЛФП*** на предмет наличия в моделируемой ***d-ОС*** феномена неконструируемости.

Согласно теоремам ***7*** и ***10*** проблема существования для классической ***1-ОС*** пар ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, алгоритмически разрешима. Следующий результат доказывает разрешимость проблемы для обобщенного случая ***ВСКФ-1*** при ***d=1*** и неразрешимость при ***d ≥ 1.***

Теорема 28. Проблема существования для произвольной классической d-ОС пар ВСКФ-1 алгоритмически разрешима при d = 1 и алгоритмически неразрешима при d ≥ 2.

Доказательство теоремы ***28*** сводится к следующему. Согласно определения ***10***, две различные ***КФ*** $c_1, c_2 \in C(A)$ образуют для ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ классической ***1-ОС*** пару ***ВСКФ-1*** тогда и только тогда, когда имеет место соотношение $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A, \phi)$. Предположим, что для классической ***1-ОС*** существует такая пара $\{c_1, c_2\}$ ***ВСКФ-1***, а конфигурация $c \in C(A, \phi)$ имеет минимальную ***m***-длину среди всех конечных ***КФ***, имеющих более одного непосредственного предшественника из ***C(A)***-множества, а именно:

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{=}{=}\right)\cdots\left(\frac{y_0}{z_0}\right)\left(\frac{y_1}{z_1}\right)\left(\frac{y_2}{z_2}\right)\cdots\overbrace{\left(\frac{y_j}{z_j}\right)\cdots\left(\frac{y_{j+n-1}}{z_{j+n-1}}\right)}^{\Leftarrow\Leftarrow\Leftarrow}\cdots\left(\frac{y_{j+k}}{z_{j+k}}\right)\cdots\overbrace{\left(\frac{y_j}{z_j}\right)\cdots\left(\frac{y_{j+n-1}}{z_{j+n-1}}\right)}\left(\frac{y_{j+k}}{z_{j+k}}\right)\cdots$$

$$|\leftarrow \quad B-block \quad \rightarrow|$$

$$c = \ldots\ldots 0000\ x_1\ x_2\ \ldots\ldots\ x_j\ \ldots\ldots\ x_{j+n-1}\ldots\ldots x_{j+k}\ldots\ \ldots\ldots x_{m-1}\ x_m\ 0000\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(y_p, z_p, x_u \in A;\ x_1, x_m \neq 0;\ p = -\infty\ldots+\infty;\ u = 1\ldots m)$$

Но тогда нетрудно убедиться, что при общем количестве $P_1=2^a$ всевозможных различных пар $\{y_p \mid z_p\}$, образованных состояниями соответствующих автоматов в ***КФ*** $\{c_1 \mid c_2\}$, имеется ровно $P_2=2^{an}$ различных кортежей $<\{y_j \mid z_j\}$ ..... $\{y_{j+n-1} \mid z_{j+n-1}\}>$ из них длины ***n***. Следовательно, если длина ***c-КФ*** удовлетворяет соотношению $m \geq 2^{an}+n$, то для пары ***КФ*** $\{c_1 \mid c_2\}$ на блоке, соответствующем шаблону ***c-КФ***, будет существовать по меньшей мере пара идентичных вышеуказанных кортежей, что противоречит предположению о минимальной длине ***c-КФ*** среди всех конечных ***КФ***, имеющих ***более*** одного предшественника из ***C(A)-***множества. Действительно, модифицировав пару ***КФ*** $\{c_1 \mid c_2\}$ путем удаления общего для них ***B-***блока (*уплотнение конфигураций*), получаем пару конфигураций $\{c`_1 \mid c`_2\}$ таких, что $c`_1\tau^{(n)} = c`_2\tau^{(n)} = c`$ при $|c`| < m$. Таким образом, если в классической ***1-OC*** существует множество пар $\{c_1 \mid c_2\}$ ***BCКФ-1***, то должно выполняться следующее условие: $min_k \{|c^k_1\tau^{(n)}| = |c^k_2\tau^{(n)}|\} \leq 2^{an}+n-1$. Следовательно, для определения наличия пар ***BCКФ-1*** в классической ***1-OC*** достаточно протестировать на предмет количества различных предшественников для ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ длины $L \leq 2^{an}+n-1$. Уже при относительно небольших значениях ***a*** и ***n*** данный тест является чрезвычайно громоздким, хотя и дает конструктивное доказательство теоремы. Вместе с тем, данный тест допускает относительно несложные программные реализации, позволяя использовать для решения проблемы в каждом конкретном случае компьютерные средства [5,54-56,88,90,536].

На основе теоремы ***28*** и подхода к ее доказательству можно получить целый ряд интересных результатов по разрешимости тех или иных аспектов проблемы неконструируемости для классических ***1-OC;*** часть из них рассматривается ниже. Из представленных и из результатов работ [1,2,3,5,7-9,27,30,43,53-56,90,277] по разрешимости основных аспектов проблемы неконструируемости в классических ***OC-***моделях нетрудно убедиться, что их решение весьма существенно зависит от размерности структур. Если в случае классических ***1-OC***, в основном, имеет место алгоритмическая разрешимость, то уже для ***2-***мерного случая многие важные вопросы в этом направлении остаются алгоритмически неразрешимыми, не взирая на относительную простоту такого типа ***OC-***моделей [536].

Остроту алгоритмической неразрешимости проблемы неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3*** для общего случая ***OC-***моделей снижает и тот факт, что с ростом мощности ***A-***алфавита и/или размера шаблона соседства доля структур, обладающих ***НКФ*** и, возможно, ***НКФ-3***, очень быстро стремиться к единице (теорема ***4***), т.е. «***почти все***» достаточно сложные ***OC-***модели обладают неконструируемостью ***НКФ-***типа. В этой связи было бы весьма интересным попытаться определить, пусть даже эмпирически, размер минимального блока ***НКФ,НКФ-3*** для ***d-***мерного ***(d>1)*** случая классических ***OC-***моделей как функцию параметров ***#A(a)*** и ***#X(n)*** модели, в частности, только ***a-***значения для случая ***2-OC*** с простейшим индексом соседства $X=\{(0,0), (0,1), (1,0)\}$. В определенной мере аналогичная картина имеет место и для случая неконструируемостей типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** относительно проблемы разрешимости их существования в общем случае классических ***OC-***моделей, т.е. ***d-OC*** $(d \geq 2)$ [5,8,9,53-56,88,90,536].

<u>Теорема 29</u>. Проблема незамкнутости C(A,d,∞)-множества относительно глобального отображения, определяемого параллельным $\tau^{(n)}$-преобразованием, алгоритмически неразрешима. Классическая d-OC $(d \geq 1)$, не обладающая как НКФ (и, возможно, НКФ-3), так и НКФ-1, обладает неконструируемостью типа НКФ-2. Классическая d-OC $(d \geq 1)$, не обладающая НКФ-2, обладает типами неконструируемости НКФ и/или НКФ-1.

Рассмотрим влияние *незамкнутости* множества ***C(A,d,∞)*** относительно отображения, определяемого глобальной функцией перехода $\tau^{(n)}$. Не нарушая общности, мы обратимся к случаю классических ***1-OC***. Предположим, что для структуры данного класса множес-

тво $C(A,1,\infty)$ *незамкнуто* относительно отображения, определяемого **ГФП** $\tau^{(n)}$. Предположим также, что для структуры отсутствует неконструируемость типа **НКФ-1.** Поэтому с учетом сделанных предположений для каждой **КФ** $c_o \in C(A,1,\phi)$ в такой структуре относительно предшественников c^{-1} целесообразно рассматривать только случаи, а именно:

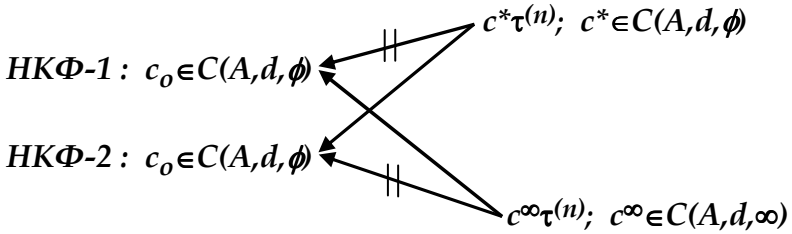
(1) не имеет предшественников c^{-1} из множества $C(A,1,\phi) \cup C(A,1,\infty)$; в этом случае согласно ранее сказанному структура должна обладать неконструируемостью **НКФ-**типа;
(2) имеет предшественников как из множества $C(A,d,\phi)$ (*единственного, в противном случае структура должна обладать* **НКФ**), так и из множества $C(A,1,\infty)$ бесконечных **КФ.**

Случай существования для структуры **КФ** $c_o \in C(A,1,\phi)$, имеющей предшественников c^{-1} лишь из множества $C(A,1,\infty)$, исключается ввиду предположения об отсутствии неконструируемости типа **НКФ-1.** Исключается из рассмотрения и случай наличия для каждой **КФ** $c_o \in C(A,1,\phi)$ предшественника c^{-1} только из множества $C(A,1,\phi)$, как не соответствующий предположению о *незамкнутости* множества $C(A,1,\infty)$. Рассмотрим оставшийся случай *(2).* Предположим, что для данной структуры будет отсутствовать и неконструируемость **НКФ-**типа. Но тогда для каждой конфигурации $c_o \in C(A,1,\phi)$ должны быть один предшественник c^{-1} из множества $C(A,1,\phi)$ и предшественник c^{∞} из множества $C(A,1,\infty)$. С другой стороны, учитывая наличие **КФ** $c^{\infty} \in C(A,1,\infty)$ такой, что $c^{\infty}\tau^{(n)}=\square$, определяем на ее основе конечную **КФ** c_o вида $c_o = \square x_1 x_2 \ldots x_q \square$, где кортеж $\langle x_1 x_2 \ldots x_q \rangle$ $(x_1, x_q \in A \setminus \{0\})$ – часть **КФ** c^{∞} достаточно большой длины. Тогда получаем конфигурацию $c_o\tau^{(n)}=\square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$, где по меньшей мере одна из **КФ** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой. В противном случае в структуре существовали бы пары **ВСКФ**, а значит и **НКФ.** Пусть лишь одна из $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой (*для определенности* c_1). Но тогда она будет иметь более одного предшественника c^{-1} вида $c = \square x_1 x_2 \ldots x_q \square$, что также обусловливает для структуры наличие неконструируемости **НКФ-**типа. Пусть обе **КФ** $\{c_1, c_2\}$ будут конечными, отличными от нулевых и обе имеют по одному предшественнику $\{c^{-1}_1, c^{-1}_2\}$ из множества $C(A,1,\phi)$. Рассмотрим **КФ** $c^* = \square c^{-1}_1 0 \ldots 0 c^{-1}_2 \square$, для которой по определению получаем $c^*\tau^{(n)} = \square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$. Но тогда для соответствующим образом определенной **КФ** $c^{\#} = \square x_1 x_2 \ldots x_q \square$ получаем, что $c^*\tau^{(n)} = c^{\#}\tau^{(n)} = \square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$ $(c^* \neq c^{\#})$, что вновь обусловливает для структуры наличие неконструируемости **НКФ-**типа. Итак, в случае незамкнутости множества $C(A,1,\infty)$ относительно отображения, определяемого глобальной функцией перехода $\tau^{(n)}$, при отсутствии для структуры неконструируемости типа **НКФ-1** она будет обладать неконструируемостью **НКФ-**типа.

Предположим теперь, что структура ***1-ОС***, для которой множество $C(A,1,\infty)$ незамкнуто относительно отображения $\tau^{(n)}$, не обладает неконструируемостью **НКФ-**типа. Но тогда соответствующим образом модифицируя вышеприведенные рассуждения приходим к заключению, что структура должна обладать неконструируемостью типа **НКФ-1.** Таким образом, вышеприведенные соображения позволяют сформулировать следующий достаточно интересный результат, а именно: ***Если для классической d-ОС*** $(d \geq 1)$ ***множество*** $C(A,d,\infty)$ ***незамкнуто относительно отображения, определяемого глобальной функцией перехода*** $\tau^{(n)}$, ***отсутствует неконструируемость типа НКФ-1 (НКФ), то структура будет обладать неконструируемостью типа НКФ (НКФ-1).***

Показано, ***проблема замкнутости множества бесконечных конфигураций*** $C(A,d,\infty)$ ***относительно глобального отображения, определяемого ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***классической однородной структуры, алгоритмически разрешима для*** $d = 1$ ***и алгоритмически неразрешима***

для d ≥ 2 [88]. Доказательство базируется на неразрешимости известной игры «***домино***», краткий набросок которого приводится в разделе ***2.8.*** Более того, показано, что ***если для классической d-ОС множество C(A,d,∞) незамкнуто относительно глобального отображения, индуцируемого ГФП $\tau^{(n)}$, то структура обладает неконструируемостью типов НКФ, НКФ-1 либо обоими типами одновременно (d ≥ 1)*** [54-56]. Следовательно, для решения проблемы разрешимости наличия для классической ***d-ОС*** неконструируемости типов ***НКФ/НКФ-1*** вопрос *незамкнутости* множества ***C(A,d,∞)*** относительно глобального отображения $\tau^{(n)}$ играет весьма существенную роль. Для лучшей иллюстрации определений неконструируемых *конечных* ***КФ*** типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** обратимся к их графическим интерпретациям, а именно:



Исходя из весьма прозрачных определений неконструируемости типа ***НКФ-1*** и ***НКФ-2***, уже достаточно несложно заключить, что при отсутствии для классической ***d-ОС (d ≥ 1)*** неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-1*** для нее должна существовать неконструируемость типа ***НКФ-2.*** Не нарушая общности, рассмотрим случай классической ***1-ОС***, не обладающей неконструируемостью как типа ***НКФ***, так и ***НКФ-1.*** Предположим, что для такой структуры будет отсутствовать и неконструируемость типа ***НКФ-2.*** Но тогда для каждой конфигурации $c \in C(A,1,\phi)$ должны быть один предшественник c^{-1} из множества $C(A,1,\phi)$ и предшественник c^∞ из множества $C(A,1,\infty)$. Действительно, наличие для ***КФ c*** предшественника только из множества одного типа ведет к наличию для структуры неконструируемости типа ***НКФ-2*** либо ***НКФ-1*** соответственно, что противоречит предположению. С другой стороны, учитывая наличие ***КФ*** $c^\infty \in C(A,1,\infty)$ такой, что $c^\infty\tau^{(n)} = \square$, определяем на ее основе конечную ***КФ*** c_o вида $c_o = \square x_1 x_2 \ldots x_q \square$, где кортеж $\langle x_1 x_2 \ldots x_q \rangle$ ($x_1, x_q \in A \setminus \{0\}$) – часть ***КФ*** c^∞ достаточно большой длины. Тогда получаем конфигурацию $c_o\tau^{(n)} = \square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$, где по меньшей мере одна из ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой. В противном случае в структуре существовали бы пары ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что противоречит условию. Пусть лишь одна из $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от *нулевой* (*для определенности* c_1). Но тогда она будет иметь бесконечно много предшественников вида $c = \square x_1 x_2 \ldots x_q \square$, что также противоречит отсутствию для структуры ***НКФ***. Следовательно, ввиду отсутствия ***НКФ*** она должна иметь предшественников из множества $C(A,1,\infty)$, а не из $C(A,1,\phi)$, т.е. быть ***НКФ-1***, что также противоречит условию. Пусть теперь обе ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будут конечными, отличными от нулевых и обе имеют по одному предшественнику $\{c^{-1}{}_1, c^{-1}{}_2\}$ из множества $C(A,1,\phi)$. Рассмотрим ***КФ*** $c^* = \square\, c^{-1}{}_1 0 \ldots 0 c^{-1}{}_2 \square$, для которой по определению получаем $c^*\tau^{(n)} = \square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$. Но тогда для соответствующим образом определенной ***КФ*** $c^\# = \square x_1 x_2 \ldots x_q \square$ получаем, что $c^*\tau^{(n)} = c^\#\tau^{(n)} = \square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$ ($c^* \neq c^\#$), что вновь противоречит отсутствию для структуры ***НКФ***. Итак, уже несложно аналогичным приемом завершить доказательство остальной части теоремы [88,90].

Данный результат еще раз подтверждает принципиальные различия между типами неконструируемости в классических ***ОС***-моделях и сильное влияние на результаты с ними связанные, размерности моделей. Наряду с этим, он является одним из немногих результатов подобного типа для общего случая классических ***ОС***-моделей. В более общей пос-

тановке в плане исследования аналогий между формальными моделями на основе классических ***d-ОС (d≥1)*** и реальными погружаемыми в них физическими процессами и явлениями было бы весьма интересным прояснить более детально не только проблему неконструируемости, непосредственно связанную с обратимостью динамики ***ОС-***моделей, но и влияние размерности структуры на ее глобальные свойства. В работах [5,8,9,53-56, 88,90,536] влияние основных параметров классических ***ОС-***моделей на исследование их динамических свойств рассматривается с достаточной степенью детализации.

Следующая теорема устанавливает *полную* разрешимость проблемы существования всех типов неконструируемости для случая классических ***1-***мерных ***ОС-***моделей [5,8,9,88].

<u>Теорема 30</u>. Проблема существования в классической 1-ОС неконструируемостей типа НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3 алгоритмически разрешима. Проблема существования для классической 1-ОС сочетаний типов неконструируемости согласно таблицы 3 алгоритмически разрешима; для случая d-ОС (d ≥ 2) полное решение вопроса открыто.

Доказательство теоремы в общих чертах сводится к следующему. Прежде всего, согласно теоремы ***10*** существует конструктивный критерий существования для классической ***1-ОС*** пар ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. При этом, в случае наличия для структуры неконструируемости ***НКФ-***типа в ней могут существовать и ***НКФ-3*** наряду с другими типами неконструируемости. С другой стороны, наличие в структуре ***НКФ-3*** влечет за собой и существование в ней ***НКФ***. Нетрудно убедиться, что проблема замкнутости множества $C(A,\infty)$ относительно ***ГФП*** произвольной классической ***1-ОС*** алгоритмически разрешима. Действительно, существование для ***ГФП*** классической ***1-ОС КФ*** $c \in C(A,\infty)$ такой, что $c\tau^{(n)}=c` \in C(A,\phi)$ эквивалентно существованию для ***ГФП КФ*** $c^* \in C(A,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(n)}=\square$. Ввиду конечности ***A-***алфавита состояний любая бесконечная ***КФ*** должна содержать блоки минимальной длины $p \le a^n+n-1$ (*что было отмечено выше*), включающие не более одного вхождения кортежа $<x_1x_2 \dots x_{n-1}>$ $(x_j \in A;\ j=1..n-1)$. Анализ таких блоков в сочетании с ***ЛФП*** структуры позволяет конструктивно относительно легко выявлять замкнутость (*незамкнутость*) $C(A,\infty)$-множества. Исходя из определений ***2-4*** нетрудно убедиться, что тип неконструируемости произвольных блочной или конечной ***КФ*** зависит от наличия и/или вида ее предшественников. Рассмотрим произвольную ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ на предмет типа существующих для нее в классической ***1-ОС*** $c`$-предшественников. Предположим, что ***c-КФ*** имеет минимальную длину среди всех конечных ***КФ*** структуры, обладающих определенным типом неконструируемости. Если длина ***c-КФ*** удовлетворяет условию $|c| \ge a^n+n$, то в ней можно выделить по крайней мере одну пару идентичных блочных подконфигураций (*возможно и пересекающихся*) $c_b=y_1y_2 \dots y_{n-1}$ $(y_k \in A;\ k=1..n-1)$. Но так как тип ***c-КФ*** определяется путем установления для нее типа $c`$-предшественника в области ее левого и правого концов, то используя модифицированный подход, примененный в доказательстве теоремы ***21***, минимальный размер исследуемых ***КФ*** (*как блочных, так и конечных*) можно определить величиной $L=a^n+n$. Следовательно, для определения типов неконструируемости в произвольной классической ***1-ОС*** достаточно для всех блочных и конечных ***КФ*** длины $L \le a^n+n$ в ***A-***алфавите установить *допустимые* для них виды $c`$-предшественников на основе ***ЛФП*** структуры, что с учетом вышесказанного не должно вызывать особых затруднений, исключая громоздкость вычислений уже при относительно небольших значениях ***a*** и ***n***. Для этих целей относительно несложно создание специальной тестирующей компьютерной программы, например, в среде пакетов ***Mathematica, Maple*** [93-104,563]. С учетом сказанного, относительно несложно доказывается и вторая часть настоящей теоремы [5,88,90].

Из представленных результатов по *разрешимости* проблемы неконструируемости в классических ***ОС-***моделях нетрудно убедиться, что ее решение весьма сильно зависит от ра-

змерности структуры. Если в ***1-***мерном случае все основные аспекты неконструируемости алгоритмически разрешимы с наличием конструктивных *разрешающих* алгоритмов, то уже в **2-**мерном случае вопросы существования основных аспектов неконструируемости алгоритмически неразрешимы**.** Поэтому вопрос влияния значений основных параметров ***ОС-***моделей **(***размерность***, *A-алфавит***,** *индекс соседства и др.***)** на исследование их динамических свойств представляет несомненный интерес**.** Ряд проблем неразрешимости более тонких свойств динамики классических ***ОС-***моделей рассматривается на основе теории креативных и продуктивных множеств конечных ***КФ*** [5,88,90,536].

Представленные в разделе результаты решают в целом проблему разрешимости существования для классических ***ОС-***моделей неконструируемых ***КФ*** различных типов, тогда как с отдельными вопросами данной проблематики можно более детально ознакомиться в целом ряде работ**,** содержащих дополнительные первоисточники [1,3,5,8,22,30,37,53-57,70,72,90,135,158,160,166,184-187,190,232,269,277,307,310,314,322,536]. В последнее десятилетие особое внимание уделяется вопросам, связанным с обратимостью ***ОС-***моделей в качестве основы представления [273] пространственно-распределенных динамических систем, которая, в свою очередь, тесно связана с проблемой неконструируемости ***НКФ-***типа. Несколько детальнее вопросы обратимости динамики классических ***ОС-***моделей обсуждаются ниже в главе ***6*** настоящей монографии**.**

2.5. Сурьективность и инъективность глобальных параллельных отображений в ОС-моделях

Свойства параллельных *отображений***,** определяемых глобальными функциями перехода ***ОС-***моделей такие, как ***сурьективность*** и ***инъективность*****,** имеют самое прямое отношение к проблеме ***неконструируемости*** и играют фундаментальную роль при изучении динамических свойств ***ОС-***моделей. Целый ряд исследователей работали в этом направлении и был получен ряд интересных результатов [1,3,5,19,20,25,28-30,53,54-56,68, 131,268-277,279,311,317,396]. В частности, в рамках этих исследований ***Г.А. Хэдлунд*** [127] изучил данную тему для ***1-***мерного случая динамических систем сдвига как в комбинаторных, и в топологических аспектах. Для ***1-***размерного случая [127] представляет важные комбинаторные свойства объекта, являющиеся специфическими для этого случая, наряду с глубокими топологическими свойствами. ***М. Насу*** [311] исследовал дальнейшие комбинаторные аспекты локальных отображений, определяемых сурьективными глобальными отображениями и локальными отображениями, определенными инъективными глобальными отображениями в ***1-ОС.*** Использовался как графический, так и конечно-автоматный подход для исследования вопросов данной проблематики.

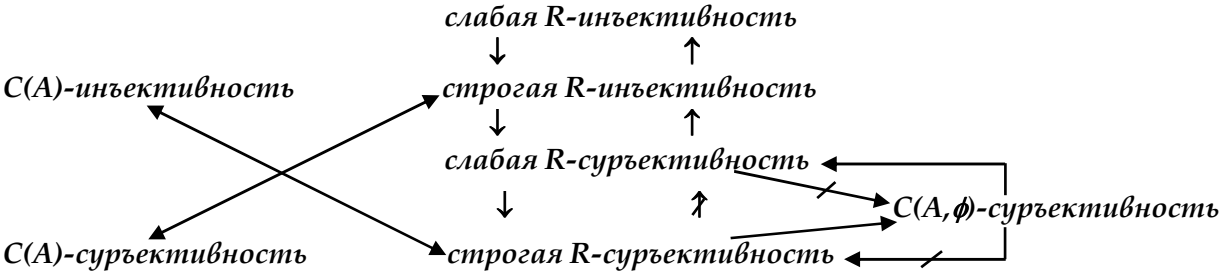
А. Маруока и ***М. Кимура*** определили четыре новых свойства параллельных отображений в ***ОС-***моделях, а именно: ***сильную R-сурьективность***, ***слабую R-сурьективность***, ***сильную R-инъективность*** и ***слабую R-инъективность*** [522]. Из них первые два понятия неэквивалентны ранее известным, и заполняют промежуток между биективностью и сурьективность. С другой стороны, доказано, что другие два понятия эквивалентны сурьективности. При этом, эти понятия характеризуются усиленными сбалансированными условиями, введенными в [271] и эквивалентными нашему понятию ***γ-КФ*** [5,37].

С этой целью ***А. Маруока*** и ***М. Кимура*** ввели *отношение эквивалентности* ***R*** на множестве ***C(A)*****,** а именно: $c_1 R c_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для всех **(***кроме конечного числа***)** одинаковых единичных автоматов ***ОС-***модели, конфигурации c_1 и c_2 совпадают. Пусть ***R***[***c***] обозначает множество всех конфигураций, ***эквивалентных*** конфигурации ***c,*** и пусть $C(A)/R=\{R[c] \mid c \in C(A)\}$**.** Тогда из глобального параллельного отображения

τ: $C(A) \to C(A)$ мы можем получить множество отображений таких, что τ: $R[c_1] \to R[c_2]$ и τ: $C(A)/R \to C(A)/R$, где $c_1\tau = c_2$. Используя теперь отображения типа $R[c_1] \to R[c_2]$, определим понятия «***строгой R-суръективности***», «***строгой R-инъективности***» и «***слабой R-инъективности***». Определение ***Маруока-Кимура*** гласит, а именно:

Глобальное параллельное отображение $\tau^{(n)}$ слабо R-суръективно (слабо R-инъективно) только, если существуют две КФ c^* и c такие, что $c^*\tau^{(n)}=c$ и $\tau^{(n)}$: $R[c^*] \to R[c]$ – суръективно (инъективно). Глобальное параллельное отображение $\tau^{(n)}$ строго R-суръективно (строго R-инъективно) только, если $\tau^{(n)}$: $R[c^*] \to R[c]$ – суръективно (инъективно) для любых двух КФ c^* и c таких, что $c^*\tau^{(n)} = c$.

С точки зрения известных результатов по *неконструируемости* результаты ***Маруока-Кимура*** позволяют определить диаграмму, отражающую взаимосвязь между вышеупомянутыми свойствами глобальных параллельных отображений $\tau^{(n)}$ в классических ***ОС-***моделях, где $G_1 \to G_2$ означает, что G_1 влечет за собой G_2 в ***1-ОС***. При этом, отметим, что стрелки «*к*» или «*из*» «***$C(A,\phi)$-суръективность***» имеют место только для глобальных параллельных отображений, обладающих состоянием «*покоя*». Следующая диаграмма отражает взаимосвязь между вышеуказанными понятиями ***суръективности/инъективности***, а именно:



Основные результаты ***Маруока-Кимура*** в этом направлении могут быть легко обобщены на классические ***ОС-***модели как произвольной размерности, так и индексов соседства более общих типов [41]. С рядом других интересных результатов по *суръективности* и *инъективности* глобальных параллельных отображений в ***ОС-***моделях можно ознакомиться в работах, указанных в расширенной библиографии по ***ОС-***проблематике [536].

2.6. Специальные вопросы проблемы неконструируемости в классических ОС-моделях

Наряду с рассмотренными, существует целый ряд других более специальных вопросов глобальной динамики классических ***ОС-***моделей, связанных с проблемой неконструируемости. Так, интересным представляется вопрос о влиянии типов ***ЛФП*** на существование неконструируемых ***КФ*** в классических ***ОС-***моделях. Исследования классических ***1-ОС***, определяемых симметрическими ***ЛФП***, показали [1,3,37], что ***ГФП***, определяемые такими ***ЛФП***, обладают ***НКФ (НКФ-1)*** $c \in C(A,\phi)$ тогда и только тогда, когда они обладают в качестве ***НКФ (НКФ-1)*** также и симметричными ей c^R***-КФ***. Следовательно, симметричность ***ГФП*** в классической ***1-ОС***, вообще говоря, расширяет как множества ***НКФ***, так и ***НКФ-1***, тогда как для асимметричных ***ГФП*** обе конфигурации $c \in C(A, \phi)$ и c^R могут быть ***НКФ*** или ***НКФ-1*** независимо каждая в отдельности. При более общей постановке симметричность ***ЛФП*** в классических ***ОС-***моделях может рассматриваться относительно отдельных подклассов. Ряд других интересных вопросов *динамики* классических ***ОС-***моделей, связанных с проблемой неконструируемости, будут рассмотрены нами ниже.

1. Исследование глубоких свойств параллельных глобальных *отображений* $\tau^{(n)}$**:** $C(A,d) \to C(A,d)$**,** индуцируемых ***ГФП*** классических ***ОС-***моделей, имеет самое непосредственное отношение к проблеме неконструируемости и играет фундаментальную роль в исследованиях динамических свойств ***ОС-***моделей**.** Свойства параллельных отображений такие, как инъективность и сюръективность имеют прямую связь с проблемой неконструируемости в структурах и изучались целым рядом исследователей, тогда как обзор их результатов можно найти в наших монографиях [3,5], а также в работах [90,183-187,270,272, 310,311]. Работая в этом направлении, ***М. Кимура*** и ***А. Маруока*** дополнительно определили четыре новых свойства параллельных $\tau^{(n)}$**-**отображений**,** а именно**:** сильная ***(слабая) R-сюръективность*** и сильная ***(слабая) R-инъективность*** [270]. Из этих понятий первые два неэквивалентны предыдущим известным свойствам и являются промежуточными между биективностью и сюръективностью**.** Тогда как два других эквивалентны понятию сюръективности [270,272,311]. Более того, эти понятия характеризуются усилением сбалансированных условий ***Маруока-Кимура,*** эквивалентных нашему понятию ***γ-КФ.*** Детальный обзор исследований других авторов в этом направлении можно найти в монографиях [3,5] и приведенных в них оригинальных источниках, а также в списке [536].

Согласно теоремы ***18*** для существования неконструируемости типа ***НКФ-1*** в классической ***d-ОС*** $(d \geq 1)$**,** не обладающей ***НКФ,*** необходимо и достаточно**,** чтобы $C(A,d,\infty)$**-**множество всех бесконечных ***КФ*** было *незамкнутым* относительно параллельного отображения $\tau^{(n)}$**:** $C(A,d,\infty) \to C(A,d,\infty)$**.** Существование же ***НКФ*** и ***НКФ-3*** в классической ***ОС-***модели прямо связано с неоднозначностью отображения $\tau^{(n)}$**:** $C(A,d,\phi) \to C(A,d,\phi)$**.** В общем случае неконструируемости интересно исследовать взаимосвязь между наличием в классической ***ОС-***модели ***НКФ***, ***НКФ-3*** и/или ***НКФ-1*** и свойствами глобального отображения $\tau^{(n)}$**:** $C(A,d) \to C(A,d)$**.** С этой целью определим влияние на взаимную однозначность $\tau^{(n)}$**-**отображения наличия в классической ***ОС-***модели ***НКФ***, ***НКФ-3*** и/или ***НКФ-1,*** и наоборот. Для случая классических ***1-ОС*** имеет место следующий основной результат.

<u>Теорема 31</u>. Если $C(A,\infty)$-множество всех бесконечных КФ незамкнуто относительно одномерного параллельного $\tau^{(n)}$-преобразования, то соответствующее ему отображение $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ не взаимно однозначно.

На основе теорем ***18*** и ***31*** можно показать, что при наличии в классической ***1-ОС НКФ***, ***НКФ-3*** и/или ***НКФ-1*** глобальное параллельное отображение $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ не является взаимно однозначным, тогда как обратное утверждение в общем случае неверно. Следовательно**,** неоднозначность отображения $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ не влечет за собой наличия в классической ***1-ОС*** неконструируемости типов ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1.*** Более того, если неоднозначность отображения $\tau^{(n)} : C(A,\phi) \to C(A,\phi)$ приводит к появлению неконструируемостей ***НКФ-***типа и, возможно, ***НКФ-3,*** то неоднозначность отображения $\tau^{(n)} : C(A,\infty) \to C(A,\infty)$ не связана *непосредственно* с неконструируемостью в классических ***1-ОС.*** Основываясь на теореме ***31*** и ряде других результатов [54]**,** можно подойти к решению проблемы алгоритмической разрешимости наличия для произвольной классической ***1-ОС*** однозначных глобальных отображений $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$**.** В данном направлении нами получен ряд интересных результатов [3,5,7,15,47,54-56,68,75]**,** выражаемых следующей основной теоремой, имеющей целый ряд интересных приложений [536].

<u>Теорема 32</u>. Проблемы определения взаимной однозначности параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)} : C(A,\phi) \to C(A,\phi)$, $\tau^{(n)} : C(A,\infty) \to C(A,\infty)$ и $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ для случая классических 1-ОС алгоритмически разрешимы. Алгоритмически разрешимой для классических 1-0С является и проблема существования для параллельного глобального отображения $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ обратного ему параллельного τ_n^{-1}-отображения.

Вторая часть теоремы представляет неконструктивное доказательство алгоритмической разрешимости проблемы существования для ***ГФП*** классической ***1-ОС*** обратной ей ***ГФП*** τ_n^{-1}**.** В этой связи было бы весьма интересно попытаться получить конструктивное решение данной проблемы**,** позволяющее на основе конкретного вида ***ЛФП*** структуры получать обратную ей локальную функцию при условии ее существования. С другой стороны, проблему алгоритмической разрешимости *взаимной однозначности* глобального отображения $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$ ($d>1$) для общего случая классических ***ОС-***моделей решает следующая основная теорема [5,54-56,88].

<u>Теорема 33</u>. Проблемы определения взаимной однозначности параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)} : C(A,d,\phi) \to C(A,d,\phi)$ ***и*** $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$ ***для случая классических d-ОС (d>1) алгоритмически неразрешимы.***

Доказательство данного утверждения непосредственно вытекает из результата теоремы ***27,*** определяющего алгоритмическую неразрешимость проблемы существования в произвольной классической ***d-ОС (d>1)*** неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3;*** иными словами *взаимной однозначности* отображения $\tau^{(n)} : C(A,d,\phi) \to C(A,d,\phi)$**.** А это, в свою очередь, вызывает алгоритмичесую *неразрешимость* определения взаимной однозначности глобального отобрашения $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$**.** Действительно, т.к. налицо строгое включение $C(A,d,\phi) \subset C(A,d)$**,** то неразрешимость проблемы относительно части влечет за собой и неразрешимость ее относительно общего.

2. Из результата теоремы ***33*** следует, что**:** ***алгоритмически неразрешимой для классических d-ОС (d*** $\geq$ ***2) является проблема определения существования для параллельного глобального отображения*** $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$ ***обратного ему параллельного*** τ_n^{-1}***-отображения также.*** Используя результаты по ***НКФ-***неконструируемости и свойство компактности топологического произведения**,** ***Дж. Ричардсон*** [305] доказал**,** что глобальное отображение $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$ является взаимно однозначным только тогда**,** когда обратное ему отображение $\tau^{-1} : C(A,d) \to C(A,d)$ определяется некоторой ***ГФП ОС-***модели. В этом отношении данный результат играет важную роль в теоретических исследованиях динамических свойств ***ОС-***моделей**;** на основании его и теоремы ***33,*** в частности, легко вытекает и вышеприведенное утверждение.

В свете результата решения данной проблемы следует отметить важный результат ***Т. Уаку*** [224,317], состоящий в том, что задача определения предшественников для произвольной ***КФ*** $c \in C(A,d)$ при ***d>1*** алгоритмически неразрешима. Данный результат является весьма веским аргументом в пользу того, что проблема определения взаимной однозначности глобального отображения $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$ для общего случая классических ***d-***мерных ***(d≥2) ОС-***моделей должна быть алгоритмически *неразрешимой***.** В одномерном же случае проблема определения непосредственных предшественников для произвольных ***ГФП*** и конечной ***КФ*** в классической ***ОС-***модели алгоритмически разрешима и конструктивное доказательство этого базируется на следующем важном результате, представляющем и самостоятельный интерес. Данный вопрос имеет определенное значение и для построения обратимых вычислительных и физических ***ОС-***моделей [536].

<u>Теорема 34</u>. Проблема определения для произвольной КФ $c \in C(A,\phi)$ ***в классической 1-ОС*** c^{-1}***-предшественников и их типов алгоритмически разрешима, тогда как в случае размерности d*** $\geq$ ***2 данная проблема алгоритмически неразрешима.***

Доказательство первой части теоремы ***34*** с учетом ранее рассмотренного довольно прозрачно и сводится к следующему. Рассмотрим произвольную конечную конфигурацию $c \in C(A,\phi)$ ***m-***длины и попытаемся определить для нее типы существующих ***c`-***предшественников либо сам факт их отсутствия в условиях данной ***ОС-***модели, а именно**:**

$$c'' = \ldots \overbrace{B_l \ldots\ldots\ldots B_l}^{L} \ldots\ldots\ y_{-1}y_0 \,|\, y_1y_2y_3 \ldots\ldots\ y_m \,|\, \overbrace{y_{m+1} \ldots B_r \ldots\ldots\ldots\ B_r}^{R} \ldots$$
$$c = \ldots\ldots\square \,|\, x_1x_2x_3 \ldots\ldots\ x_m \,|\, \square\ldots\ldots$$
$$y_k, x_j \in A;\ \ x_1, x_m \neq 0\ \ (k = -\infty, +\infty;\ j = 1 \ldots m)$$

С этой целью на основе параллельных подстановок $z_1z_2\ldots z_n \Rightarrow z^*_1$ $(z^*_1, z_k \in A;\ k=1..n)$, определяющих *ЛФП* классической ***1-OC***, строим для ***c-КФ*** множество допустимых для нее блочных ***c''-КФ*** с постоянно наращиваемыми в процессе построения {***L,R***}-концами. Допустимой ***p***-уровня полагается такая блочная ***c''-КФ*** длины $h=m+2p+2(n-1)$, для которой имеет место соотношение $c''\tau^{(n)} = 0^p c 0^p$ $(p \geq 1)$. С учетом ранее сказанного нетрудно убедиться, что при ***p***-длине отрезков {***L,R***}, удовлетворяющей соотношению $p \geq a^n+n-1$, они должны включать по крайней мере одну пару *идентичных* кортежей соответственно $B_l = \langle y`_1y`_2y`_3\ldots y`_n\rangle$ и $B_r = \langle y''_1y''_2y''_3\ldots y''_n\rangle$ $(y`_k, y''_k \in A;\ k=1..n)$, допускающих в общем случае пересечения. Но тогда на основе отрезков $\langle B_l, B_l\rangle$ и $\langle B_r, B_r\rangle$ можно составить ***КФ*** $c` \in C(A)$ такую, что имеет место соотношение $c`\tau^{(n)} = c$; при этом, легко усматриваются тип таких ***c`***-предшественников либо сам факт их отсутствия для исходной ***c-КФ***. Следовательно, для определения всех допустимых предшественников произвольной ***КФ*** $c \in C(A, \phi)$ достаточно описанным способом проанализировать допустимые для нее блочные ***c''-КФ*** длины не большей $|c|+2(a^n+n)$. Сказанное завершает набросок доказательства первой части теоремы. С доказательством второй части можно ознакомиться в работах [55,90,224]. Однако уже для случая классических ***1-OC*** *неразрешимой* является проблема установления «*родственных*» отношений для двух произвольных конфигураций, т.е. имеет ли место соотношение $(\forall c, c^* \in C(A, \phi))(c^* \in \langle c\rangle[\tau^{(n)}])$?

Хорошо известно, что проблемы разрешимости исследуются как конструктивными, так и неконструктивными методами. С точки зрения прикладных аспектов ***OC***-теории наибольший интерес представляют именно конструктивные методы. И при получении большинства результатов по разрешимости проблемы неконструируемости в классических ***1-OC*** нами использовались именно такие методы. Вместе с тем, в целом ряде случаев *степень неразрешимости* для *индекс*-множеств некоторых подклассов ***OC***-моделей оказывается больше единицы. Доказательство данного результата базируется на использовании перечислимостей, эквивалентных нумерациям Геделя. Исследования по критериям и разрешимости ряда аспектов проблемы неконструируемости в общем случае классических ***d-OC*** $(d \geq 1)$ подтверждают достаточно высокий уровень сложности указанной проблематики. Целый ряд отдельных и более специальных результатов в данном направлении можно найти в работах [3,5,7,15,47,54-56,68,75,88,90,306,536].

3. Упоминаемое выше понятие обратимости в классических ***OC***-моделях играет весьма важную роль как в теоретических, так и в прикладных их аспектах, особенно в случае использования структур в качестве моделей пространственно-распределенных динамических систем, из которых физические системы представляют особый интерес. Мы можем представлять себе ***OC***-модель как бесконечный автомат для преобразования определенных входных слов [*конфигураций из* $C(A,d,\phi)$-*множества*] в выходные слова из того же бесконечного множества. При этом, *выход* такого автомата становится очередным его *входным* словом. Таким образом, классические ***OC***-модели можно рассматривать как бесконечные автономные автоматы, для описания и исследования динамики которых можно вполне успешно использовать язык диаграмм состояний либо графический язык переходов. Наряду с этим, подход на основе графов (*диаграмм*) состояний является достаточно эффективным средством исследования динамики ***OC***-моделей, о чем уже упоми-

налось выше. При этом, такой графический подход допускает ряд модификаций и интерпретаций, отвечающих специфике исследуемых проблем. Достаточно широко данный графовый подход к исследованию динамики классических ***ОС-***моделей используется, например, в [158,160,177,178,268,281,314]. В этих терминах функционирование ***ОС-***модели может быть определено графом состояний, где под состоянием автомата понимается текущая ***КФ*** классической ***ОС-***модели. В свою очередь, граф состояний бесконечного автомата состоит из подграфов нескольких элементарных типов, а именно**:**

$$(a)\quad \tau^{(n)}: c_o \to c_1 \to c_2 \to c_3 \to \ldots \underbrace{c_j \to \ldots\ldots \to c_k \to \ldots\ldots \to c_p \to}$$

$$(b)\quad \tau^{(n)}: c_o \to c_1 \to c_2 \to c_3 \to \ldots c_j \to \ldots\ldots \to c_k \to \ldots\ldots \to c_p \ldots\ldots$$

$$(c)\quad \tau^{(n)}: \ldots\ldots \to c_{-3} \to c_{-2} \to c_{-1} \to c_o \to c_1 \to c_2 \to \ldots \to c_k \to \ldots\ldots \to c_p \to \ldots\ldots$$

$$c_k \in C(A,d,\phi)\ (k = -\infty \ldots +\infty)$$

В результате работы по проблематике вопросов, поставленных ***А.В. Берксом*** [128,314] в связи с исследованием проблемы *обратимости* в ***ОС-***моделях, были исследованы графы состояний классических ***ОС-***моделей в их связи с проблемой неконструируемости. Основным здесь является следующий результат**:** ***если классическая ОС-модель не обладает НКФ (НКФ-3) и НКФ-1, то уже относительно входного/выходного алфавита C(A,d,ϕ) граф ее состояний может содержать только подграфы типов (a; при j=p=0) и/или (c); в остальных случаях допускается сочетание подграфов типов (a .. c) в весьма широких диапазонах.*** Результаты исследования по графам состояний классических ***ОС-***моделей представляют специальный интерес в случае рассмотрения такого класса параллельных динамических систем в качестве ***бесконечных*** автоматов в их традиционном понимании [158,281,389,390,536]. Детальнее данный вопрос обсуждался в разделе ***2.2.***

4. Для класса ***ОСнР-***структур**,** определенных в разделе ***1.2*** и весьма важных с точки зрения физического моделирования**,** проблема неконструируемости ассоциируется, в первую очередь, с проблемой *обратимости* их динамики, актуальность которой обсуждается кратко в рамках настоящей книги и детально рассматривается в работах [90,150-152, 157,160,204,268,273,318,378,386-388,536]. Для классических ***ОС-***моделей понятие ***обратимости*** динамики определяем следующим образом, а именно.

<u>Определение 12</u>. Классическая ОС-модель, не обладающая неконструируемостью типов НКФ, НКФ-3 и НКФ-1, называется обратимой, иначе – необратимой.

Следует отметить, что ***обратимость*** рассматривается нами относительно ***C(A,d,ϕ)-***множества всех конечных конфигураций**;** следовательно даже наличие предшественников у конечной ***КФ*** только из ***C(A,d,∞)-***множества не делает классическую ***d-ОС обратимой.*** Данное предположение вполне обосновано, ибо бесконечные ***КФ*** с точки зрения прикладных аспектов не имеют вполне удовлетворительной интерпретации, да и с теоретической точки зрения более интересен случай потенциальной бесконечности. Хотя в ряде случаев бесконечные ***КФ*** могут оказаться весьма полезными при исследовании некоторых теоретических аспектов **(***например**,** *в случае представления бесконечными* ***КФ*** *трансцендентных чисел)***.** Грубо говоря, обратимая классическая ***d-ОС*** никогда не забывает историю любой конечной ***КФ.*** Такого типа классические ***d-ОС*** представляют особый интерес для моделирования процессов, изучаемых современной физикой [536].

Точнее, как невозможен для классических ***ОС-***моделей мгновенный **(***за один шаг* ***ГФП*** *модели)* переход от конечной к бесконечной конфигурации **(***возможен только потенциально бесконечный рост конечной* ***КФ*** *с течением времени***,** *скорость которого определяется размером* ***ШС)***, так и мгновенный переход бесконечной ***КФ*** в конечную **(***теоретически допустимый аксиоматикой классических* ***ОС-****моделей)* лишен, в определенной степени, естественного смысла. Современные космогонические концепции также подтверждают данную точку

зрения на трактовку однородных структур, как модели пространственно-распределенных динамических систем, из которых физические системы представляют наибольший интерес. Таким образом, динамика именно конечных ***КФ*** из ***C(A,d,ϕ)*-**множества в среде классических ***ОС*-**моделей представляет основной интерес на предмет исследования как теоретических, так и прикладных аспектов теории однородных структур во всей их общности и широте применимости [536].

Как следует из определения ***12***, в классических ***ОС*-**моделях обратимость их динамики весьма тесно увязана с наличием или отсутствием в моделях типов неконструируемости ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1***. В этом отношении определение ***12*** полностью определяет условия обратимости динамики классических и ряда других типов ***ОС*-**моделей.

При этом, если требование отсутствия типов неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-3*** вполне очевидно, то отсутствие неконструируемости типа ***НКФ-1*** полностью исключает возможность, когда для конечной ***КФ*** в качестве предшественников выступают только бесконечные ***КФ***, что не обеспечивается сколько-нибудь удовлетворительной интерпретацией. Тогда как для класса ***ОСнР*-**моделей подобной проблемы не возникает, ибо обратный мониторинг динамики произвольной конечной ***КФ*** производится на основе параллельных локальных блочных подстановок (**18**) и обратного **Ξ-**правила *переразметки* Z^d**-**пространства модели (см. раздел ***1.2***). При таком подходе ***обратимая*** динамика для каждой конечной ***КФ*** однозначно возвращает конечную же ***КФ*-**предшественника.

Вместе с тем, обратный мониторинг динамики произвольной ***с-КФ*** для классической и ***ОСнР*-**моделей также существенно отличны, требуя различной информационной отправной точки. Если для случае классической ***ОС*-**модели нам вполне достаточно вида исследуемой ***с-КФ*** и ***ЛФП*** (*не привязывая себя к временной шкале и* Z^d*-пространству*), в случае же ***ОСнР*-**модели дополнительно к виду исследуемой ***с-КФ*** и ***ЛБФ*** мы должны знать как **Ξ-**правила переразметки Z^d**-**пространства, так и его текущую блочную разметку, позволяющую восстанавливать обратный ход блочной переразметки, что в общем случае требует и координатной привязки исследуемой ***с-КФ***. Таким образом, как прямая, так и обратная динамики в ***ОСнР*-**моделях требуют существенно больше информации, чем для случая классических ***ОС*-**моделей, тем самым несколько усложняя сам объект.

В настоящее время вопросы обратимости ***ОС*-**моделей во всей их общности исследованы не до конца и здесь имеется ряд открытых проблем, решаемых по мере развития ***ТОС*-**проблематики. Так, если для случая классических ***1-ОС***, как следует из представленных выше результатов, *проблема обратимости* произвольной структуры алгоритмически разрешима, то в общем случае классических ***d-ОС (d≥2)*** она уже является алгоритмически неразрешимой, что дает ответ на один из вопросов, поставленных в [150].

В отличие от классических, ***ОСнР*-**модели (раздел ***1.2***) характеризуются алгоритмической разрешимостью проблемы обратимости. Действительно, любая ***ОСнР*-**модель считается определенной, если она задана набором параллельных блочных подстановок (**18**) ее ***ЛБФ*** $\Psi^{(m)}$ и **Ξ-**правилом блочной переразметки однородного Z^d**-**пространства структуры. Но как уже отмечалось, обратимость динамики ***ОСнР*-**модели и непосредственно следует из взаимной однозначности отображений $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$ (*индуцируемых ее* ***ЛБФ***), которая алгоритмически разрешима. Таким образом, определив конкретную ***ОСнР*-**модель, мы сразу же получаем ответ на вопрос об обратимости ее динамики, тогда как для случая классической ***ОС*-**модели данный вопрос в общем случае является алгоритмически неразрешимым. Нетрудно убедиться, что среди всевозможных структур на разбиении $d\text{-ОСнР} \equiv \langle Z^d, A, m, \Psi^{(m)}, \Xi \rangle$ существует ровно $R = (a^m\text{-}1)!$ с обратимой динамикой, где m – число единичных автоматов, образующих блок разбиения Z^d**-**пространства. Однако их доля относительно множества всевозможных структур такого типа подобно слу-

чаю классических ***ОС-***моделей также весьма быстро стремится к нулю в соответствии с асимптотической формулой $\vartheta = \sqrt{2\pi\varpi} * \varpi / e^{\varpi}$ $(\varpi = a^m; a = \#A)$.

Таким образом, если ***ЛБФ ОСнР-***модели непосредственно определяет свойство обратимости динамики модели, то ***ЛФП*** классической ***ОС-***модели имеет более косвенное влияние на ее обратимость **–** стираемость информации в первом случае непосредственно проявляется уже на уровне ***ЛБФ,*** тогда как во втором случае она опосредствованно проявляется через взаимно-стираемые ***КФ*** и ***γ-КФ.*** Данное обстоятельство существенно усложняет исследование проблемы обратимости для случая классических ***ОС-***моделей, что в значительной мере делает их менее предпочтительными для задач физического моделирования, в первую очередь, на микроскопическом уровне [536].

5. Структуры с рефрактерностью ***d-OCP(r,P)*** (раздел ***1.2)*** играют весьма важную роль в прикладных аспектах ***ТОС,*** определяя собственный ***R-***подкласс класса всех классических ***ОС-***моделей. Структуры ***R-***подкласса обладают неконструируемостью ***НКФ-***типа, располагая, как нетрудно убедиться, блочными ***НКФ*** уже вида $c_b = 1^m$ $(m \geq n\text{-}P\text{+}1)$, где ***n –*** размер шаблона соседства и ***P –*** порог возбудимости единичного автомата структуры. При этом, следует иметь в виду, что определение ***OCP(r,P)*** требует выполнения соотношения $P \leq n\text{-}1$, ибо в противном случае в структуре невозможно существование возбужденных *(в* ***1-****состоянии)* автоматов, исключая начальный момент времени ***t=0.*** Таким образом, в ***1-OCP(r,P)*** не существует достаточно больших и сплошных блоков автоматов в возбужденном состоянии**.** При этом**,** с ростом величины ***P-***порога возбудимости допустимый размер блоков ***возбужденных*** автоматов в ***ОСР-***модели уменьшается**.** Данный результат легко обобщается на случай высших размерностей структур**,** предполагая интересные прикладные интерпретации для такой формальной модели «***нервных тканей***»**.** Целый ряд интересных результатов теоретического и компьютерного исследования ***R-***подкласса ***ОС-***моделей можно найти в книгах [3,5-9,53-58,88,90,536].

Дальнейшие исследования по проблеме неконструируемости в классических ***ОС-***моделях представляются нам интересными по двум основным причинам, а именно**:**

(1) понятие неконструируемости является одним из фундаментальных в исследованиях динамики классических и ряда других типов ***ОС-***моделей**;**

(2) результаты по проблеме неконструируемости не только детализируют данное фундаментальное понятие, но и формируют достаточно эффективный аппарат исследования динамики ***ОС-***моделей как классических, так и ряда других типов.

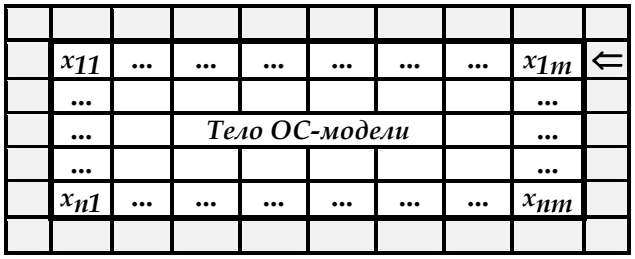
Завершая обсуждение основных результатов по общей проблеме неконструируемости в классических ***ОС-***моделях**,** кратко остановимся на особенностях данной проблематики для конечных ***ОС-***моделей, представляющих большой прикладной интерес [54-56,536].

2.7. Особенности проблемы неконструируемости для конечных классических однородных структур

В предыдущих разделах главы проблема неконструируемости рассматривалась относительно бесконечных классических ***ОС-***моделей**,** однако она имеет место и для конечных ***ОС-***моделей**,** но с весьма существенными отличиями**,** акцент на которых и сделан в настоящем разделе. Детальнее данная проблематика представлена прежде всего в работах японской школы [135,230] по конечным ***ОС-***моделям и в целом ряде других работ [156, 171,175,184-187,240]**,** но именно здесь мы впервые проводим сопоставление относительно проблемы неконструируемости бесконечных и конечных ***ОС-***моделей.

Прежде всего, конечная ***ОС***-модель представляет собой конечный автомат, наделенный специфической внутренней организацией, делающей его весьма удобной моделью в целом ряде интересных приложений. Конечная ***ОС***-модель аналогична некоторому конечному автомату без входов, который перерабатывает свои внутренние состояния *(глобальные* ***КФ)*** под действием глобальной функции перехода в дискретные моменты времени, а выход его в момент времени ***t>0*** соответствует его внутреннему состоянию в тот же самый момент времени. По сути дела, конечная ***ОС-модель*** является одним из примеров упоминаемых выше автоматов Мура со специфической внутренней организацией.

Число ***N*** глобальных ***КФ*** такой ***ОС***-модели конечно и равно $N=a^m$, где: ***m –*** количество составляющих ***ОС***-модель единичных автоматов Мура и ***a –*** мощность ***A***-алфавита внутренних состояний этих автоматов. Следовательно, каждая глобальная ***КФ*** *конечной* ***ОС***-модели есть некоторое отображение $CF: Z_m^d \Rightarrow A$, где Z_m^d – конечный связный блок из ***m*** единичных автоматов однородного Z^d-пространства, аналогичного случаю *классических* бесконечных ***ОС***-моделей. Так как ограниченность такой ***ОС***-модели вызывает неопределенность в области ее *граничных (согласно индекса соседства)* единичных автоматов при применении к ним ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, то требуется задание граничных условий *(блок граничных автоматов и его конфигурацию)*. Например, конечная прямоугольная размера ***mxn 2-ОС*** с индексом соседства Неймана или Мура требует задания конфигурации единичных автоматов *(границы)* в один слой, окружающих собственно само тело ***2-ОС*** (рис. ***17***).



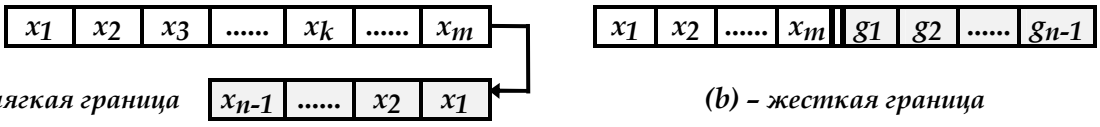
⇐ Собственно само ***тело*** конечной ***2-ОС*** размера ***nxm*** единичных автоматов

⇐ ***Граничные условия,*** соответствующие индексу соседства Неймана/Мура.

Рис. 17. Организация конечной 2-мерной ОС-модели с жесткой границей.

Конфигурация граничных автоматов может быть как *постоянной*, так и *переменной*, имитируя взаимодействие конечной ***ОС***-модели с внешней средой. В частности, одним из способов моделирования в однородных структурах является конструирование в них конечных блоков, имитирующих работу тех или иных устройств, включая каналы связи между ними. Именно по такому пути пошел ***Дж. фон Нейман*** и ряд его последователей при исследованиях первых ***клеточных моделей –*** прототипов современных ***ОС*** [124,125, 128,132,536]. Описанный способ задания граничных условий назовем ***жестким.***

Вторым способом определения граничных условий является свертывание конечной однородной среды, достигаемое путем «***склеивания***» ее противоположных границ. Наглядно это можно проиллюстрировать на примере конечной ***1-ОС,*** для которой левый край соединяется *(склеивается)* с правым, а именно:



(a) – мягкая граница ***(b) – жесткая граница***

Рис. 18. Задание мягких и жестких граничных условий для случая конечных 1-ОС.

При организации *мягких* граничных условий (рис. ***18,a)*** связь единичных автоматов ***ОС***-модели не прерывается и за ее ***m***-м автоматом сразу же следует ***1***-й, т.е. организована циклическая схема соединения единичных автоматов модели. Тогда как в случае *жестких* граничных условий граничные g_k-автоматы *(в количестве, определяемом индексом соседства)* присоединяются справа *(слева)* от крайних автоматов модели (рис. ***18, b).*** Если в случае мягкой ***G1***-границы ее конфигурация переменна, то в случае жесткой ***G2***-границы

она может быть как постоянной (*фиксированной*), так и переменной. С учетом сказанного, *конечную* **ОС-**модель можно, не нарушая общности, определять как упорядоченную шестерку $OC_G^m = <Z^d, A, \tau^{(n)}, X, m, G>$, где *первые* четыре компоненты определяются аналогично случаю классической бесконечной **ОС-**модели; **m -** размер *ребра* **d-**мерного гиперкуба из единичных автоматов Z^d-пространства (*тело модели*) и **G –** граничные условия (*способы задания граничных автоматов и их конфигурации*). При этом, под глобальным состоянием OC_G^m -*модели* понимается **КФ** составляющих ее тело единичных автоматов. Множество **C(A,d,m)** глобальных (*внутренних*) состояний конечной OC_G^m -модели называется ***полным,*** если модель в начальный момент времени **t=0** в качестве начального состояния допускает любую возможную глобальную **КФ** своего тела, определенную в ее **A-**алфавите, *независимо* от граничных условий. Очевидно, что множество **C(A,d,m)** глобальных состояний OC_G^m -модели конечно и его мощность равна величине $N=a^m$. Если же OC_G^m -модель не обладает ***неконструируемыми КФ (НКФ)***, то, используя в качестве начальной последовательно все **КФ** из **C(A,d,m)-**множества, в следующий момент получаем *полный* набор **КФ**, т.е. $\tau^{(n)} : C(A,d,m) \Rightarrow C(A,d,m)$ **–** глобальная функция модели отображает множество **C(A,d,m)** на себя (рис. ***19, a):***

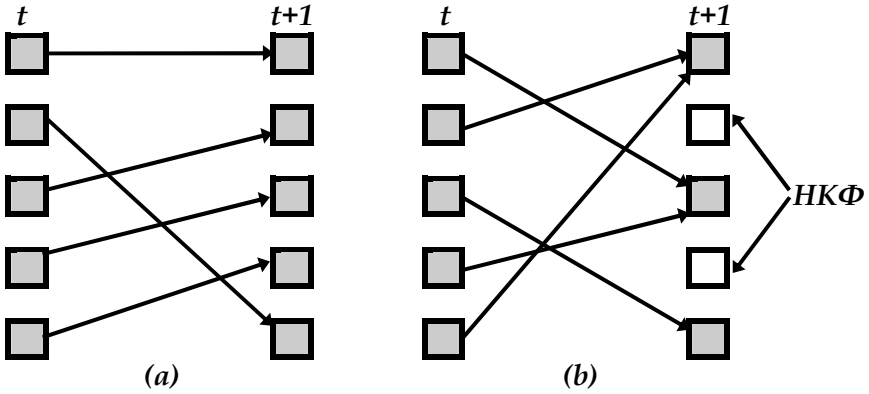


Рис. 19. Иллюстрация неконструируемости для конечных ОС-моделей.

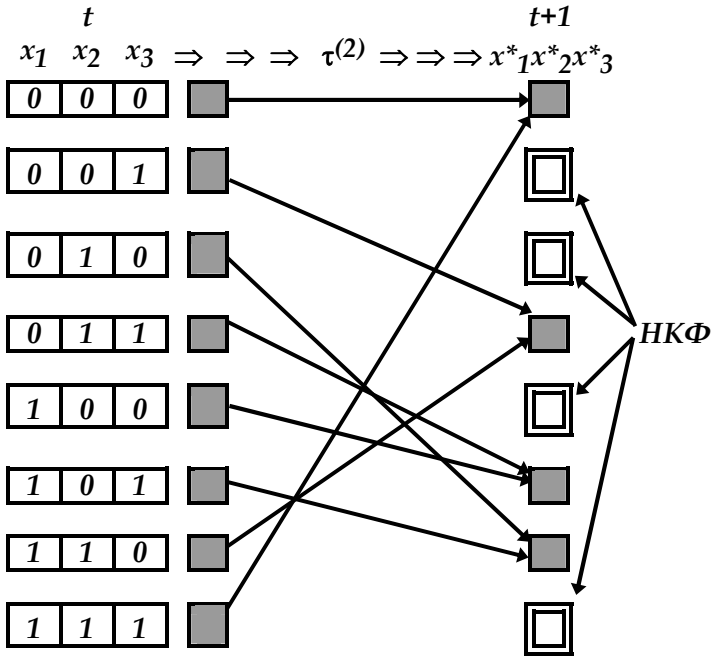
Если же при сделанных предположениях остаются недостижимые глобальные **КФ** (*состояния*) модели, то они называются неконструируемыми ***(НКФ)*** и имеет место отображение $\tau^{(n)} : C(A,d,m) \Rightarrow C^* \subset C(A,d,m)$ **–** глобальная функция модели отображает множество **C(A,d,m)** в себя (рис. ***19,b).*** Как будет показано ниже, в общем случае именно данное условие определяет *критерий неконструируемости* для конечных OC_G^m -моделей, а именно: ***конечная OC_G^m -модель обладает НКФ тогда и только тогда, когда имеет место следующее отображение*** $\tau^{(n)}: C(A,d,m) \Rightarrow C^* \subset C(A,d,m)$, т.е. *критерий* носит весьма общий характер, ассоциируясь с понятием ***взаимной стираемости*** на самом общем уровне.

Существенное различие в *динамике* бесконечных и конечных классических **ОС-**моделей проявляется уже на таком уровне их возможностей как существование *универсальных* **КФ**, рассматриваемых в разделе ***3.1.*** Если бесконечные **ОС-**модели не допускают таких **КФ**, то конечные могут иметь как одну, так и все ***КФ универсальными.*** Одним из критериев существования для бесконечных классических **ОС-**моделей неконструируемости **НКФ-**типа является наличие для них *взаимно-стираемых* **КФ (ВСКФ)**, рассмотренных в разделе ***2.1.*** Между тем, для случая ***конечных ОС-***моделей данный критерий в общем случае не имеет места, опираясь лишь на самое общее понятие стираемости **КФ.** И здесь необходимо использовать иные подходы для исследования проблемы неконструируемости. В целом же следует отметить, что вопросы неконструируемости наряду с вопросами обратимости динамики конечных **ОС-**моделей являются не столь уж и простыми [88,536].

$$\begin{cases} x_k^{t+1} = \sum_{j=0}^{n-1} x_{k+j}^t \pmod a; \quad 1 \le k \le m-n+1 \\ x_k^{t+1} = \sum_{j=k}^{m} x_j^t + \sum_{j=1}^{n-m+k-1} x_j^t \pmod a; \quad m-n+1 < k \le m \end{cases} \quad (k=1..m) \qquad (31)$$

$$\begin{cases} x_k^{t+1} = \sum_{j=0}^{n-1} x_{k+j}^t \pmod a; \quad 1 \le k \le m-n+1 \\ x_k^{t+1} = \sum_{j=k}^{m} x_j^t + \sum_{j=1}^{n-m+k-1} g_j^t \pmod a; \quad m-n+1 < k \le m \end{cases} \quad (k=1..m) \qquad (32)$$

Рассмотрим два класса $AG = \langle Z,A,\tau^{(n)},X,m,G1\rangle$ и $VS = \langle Z,A,\tau^{(n)},X,m,G2\rangle$ конечных OC_G^m-моделей, где $G1$ и $G2$ представляют соответственно *мягкие* и *жесткие* граничные условия (рис. *18*), $A=\{0,1,2,...,a-1\}$, $X=\{0,1,2,...,n-1\}$ и *ГФП* $\tau^{(n)}$ для моделей обоих классов определяется линейной *ЛФП* $\sigma^{(n)}(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_k x_k \pmod a$, $x_k \in A$ $(k=1..n)$. Принимая во внимание определение мягких и жестких граничных условий для конечных классических *1-ОС* длины m, а также *линейность ЛФП* для моделей обоих классов, x_k^{t+1}-состояние x_k-автомата модели из класса $AG=\langle Z,A,\tau^{(n)},X,m,G1\rangle$ и $VS=\langle Z,A,\tau^{(n)},X,m,G2\rangle$ в момент $(t+1)$ времени $(t \ge 0; k=1..m)$ вычисляется соответственно по вышеприведенным простым формулам (**31-32**) (см. рис. *18*). Где формулы (**31**) и (**32**) относятся к OC_G^m-моделям соответственно из первого и второго класса, для простоты обозначаемым соответственно как $AG=\langle a,n,m\rangle$ и $VS=\langle a,n,m\rangle$. Тогда непосредственной проверкой (*в справедливости которой предоставляем убедиться самому читателю*) убеждаемся в наличии для $AG(2,3,2)$-модели уже четырех *НКФ*, а именно:



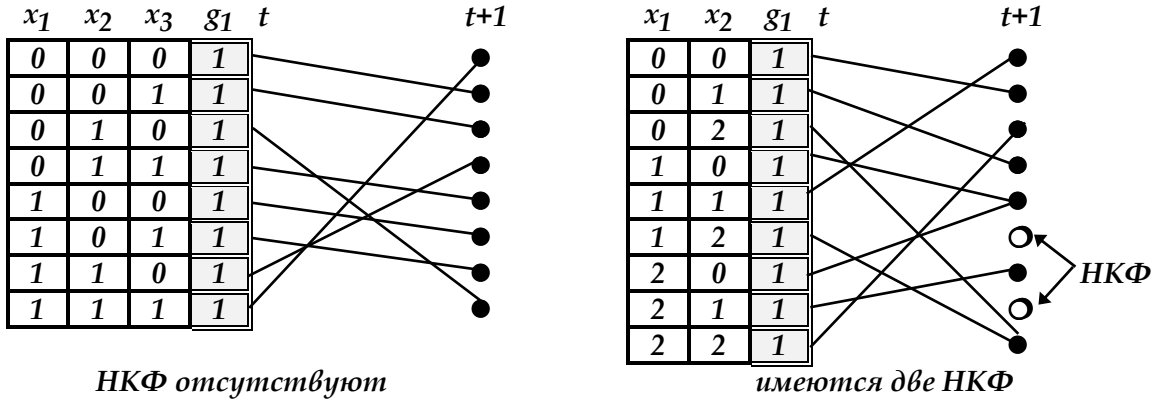
Более того, можно показать, что в общем случае для $AG(2,m,2)$-модели существует ровно $N=2^{m-1}$ $(m \ge 2)$ *НКФ* и при росте m-значения доля *НКФ* для таких моделей стремится к величине $\rho=1/2$. Подобная ситуация сохраняет силу и для $AG(2,m,2)$-модели, если в качестве ее мягкой $G1$-границы использовать не единичный x_1-автомат, а x_{m-1}-автомат, т.е. вести их отсчет в порядке, *обратном*, принятому при свертке конечной OC-модели (рис.

18.a). Однако, уже для ***AG(3,m,n)-***моделей ситуация совершенно иная**:** если для модели ***AG(3,n,n)*** существует ***N=a^n-a НКФ,*** то уже для ***AG(3,3,2)-***модели ***НКФ*** отсутствуют. Непосредственная проверка устанавливает отсутствие ***НКФ*** как для моделей ***AG(2,4,2),*** так и ***AG(2,5,3).*** Таким образом, в ***AG=<Z,A,τ$^{(n)}$,X,m,G1>-***классе моделей**,** линейная ***ЛФП*** которых не допускает существования ***ВСКФ,*** критерий ***Мура-Майхилла*** существования в моделях ***НКФ*** не имеет места**:** ***при отсутствии ВСКФ модели данного класса могут как обладать, так и не обладать НКФ-неконструируемостью.***

Рассмотрим теперь случай конечных OC_G^m **-**моделей с *жесткими* граничными условиями и линейной ***ЛФП*** рассмотренного выше вида, т.е. ***VS=<Z,A,τ$^{(n)}$,X,m,G2>-***класс моделей. В качестве конкретных примеров такого типа моделей проанализируем динамику двух простых структур ***VS1=<3,2,2>*** и ***VS2=<2,3,2>*** с одними и теми же граничными ***G2-***условиями ***(****единственный единичный автомат в* ***1-****состоянии****).*** Но если для первой структуры используется ***ЛФП σ1$^{(2)}$(x,y)=x+y (mod 2),*** то для второй **–** локальная функция ***σ2$^{(2)}$(x,y) (x,y-****состояния принадлежат соответственно бинарному и тернарному алфавитам****),*** определяемая следующей весьма простой формулой, а именно**:**

$$\sigma 2^{(2)}(x,y)=\begin{cases} y\,, & if \quad x=0 \\ x+y \pmod 2\,, & if \quad xy\in\{10,11,22\} \quad x,y\in A=\{0,1,2\} \\ x+y \pmod 2+1, & otherwise \end{cases}$$

Нетрудно убедиться**,** что определенная таким образом локальная **σ2$^{(2)}$-**функция исключает наличие для структуры ***ВСКФ,*** а значит и ***НКФ-***неконструируемости. Следующие таблицы переходов глобальных состояний для обоих конечных структур довольно прозрачны и особых пояснений не требуют, а именно**:**



НКФ отсутствуют ***имеются две НКФ***

Таким образом**,** и для случая конечных OC_G^m **-**моделей с *жесткими* граничными условиями отсутствие ***ВСКФ*** не гарантирует отсутствия неконструируемости**.** Следовательно, в общем случае конечных OC_G^m **-**моделей наличие ***ВСКФ*** является *достаточным***,** но не необходимым условием существования для них ***НКФ.*** Наряду с этим**,** проблема неконструируемости для конечных ***OC-***моделей тесно связана с ***типом*** граничных условий. Например**,** если ***AG(2,m,2)-***модели с мягкими граничными ***G1-***условиями обладают ***НКФ,*** то соответствующие им ***VS(2,m,2)-***модели с жесткими граничными ***G2-***условиями не обладают свойством неконструируемости. Более того, ***VS(2,m,2)-***модели с граничными условиями ***g1=1*** *(*рис. ***18.b)*** имеют *все* глобальные ***КФ универсальными (УКФ),*** тогда как с граничными условиями ***g1=0*** они не обладают ни ***НКФ,*** ни ***УКФ.***

При этом, как можно показать, справедливость утверждения о наличии ***N=2^{m-1} НКФ*** у ***AG(2,m,2)-***модели остается в силе и для ***VS(2,m,2)-***модели**,** если в качестве ее жестких граничных ***G2-***условий задаются некоторого типа *периодические* и ряда других типов условия**.** Оставляем эту тему читателю в качестве полезной сферы экспериментов с конечны-

ми OC_G^m -моделями. Для этих целей рекомендуется использовать метод компьютерного моделирования, для чего достаточно разработать достаточно простую программу, скажем, в среде программирования ***Basic, Turbo-Pascal*** либо в среде математических пакетов ***MathCAD, Maple, Mathematica,*** многие фрагменты для которой можно почерпнуть из наших программ компьютерного исследования ряда динамических аспектов классических ***OC-***моделей [6,15,54-56,65,67,74,85,87,118], а также из работ [166-168,236,243,280].

Для *обратимой* конечной ***OC-***модели *инъективное* глобальное отображение должно быть и биективным. Более того, если глобальное отображение конечной ***OC-***модели является инъективным, то это не влечет за собой обязательной *обратимости* ее динамики. Следовательно, динамика конечной ***OC-***модель *обратима*, если ее глобальное отображение является биективным. В общем же случае весьма затруднительно определять обратимость конечной ***OC-***модели и детальнее с обсуждением вопросов динамики конечных ***OC-***моделей можно ознакомиться в довольно интересных работах ***M. Harao*** и ***S. Noguchi*** [536]. Между тем, в случае линейности глобального отображения проблема обратимости становится существенно более доступной. Развернутое обсуждение свойств линейных или аддитивных ***OC-***моделей можно найти в работах ***O. Martin, K. Morita*** и других [536].

Таким образом, относительно проблемы неконструируемости бесконечные и конечные ***OC-***модели образуют существенно различные классы параллельных динамических клеточных систем и дальнейшие исследования в данном направлении представляются нам достаточно интересными с целого ряда точек зрения. На этом завершается как таковое рассмотрение проблемы неконструируемости в классических ***OC-***моделях, из которого следует, что за исключением нескольких принципиальных вопросов данная проблема к настоящему времени получила достаточно полное разрешение. Однако ее фундаментальность для математической ***TOC-***проблематики и ряд связанных с ней открытых вопросов продолжают привлекать к ней многих исследователей [88,90,536].

2.8. Вопросы обратимости динамики классических однородных структур

Проблема *обратимости* вычислений и создания *обратимых* вычислительных устройств особо актуальна в настоящее время, когда начались проработки по созданию новых архитектур вычислительной техники с ориентацией на нанотехнологии их производства. Вычисления, выполняемые на современных компьютерах, проводятся посредством операций, стирающих информацию. Так называемый вентиль ***И –*** это устройство с двумя *входными* линиями, на каждой из которых может быть установлен сигнал, равный ***1*** или ***0***, и одной *выходной* линией – значение ее сигнала определяется значениями входов. Если на обоих входах ***1***, то на выходе также будет ***1;*** если на одном или на обоих входах ***0***, то и на выходе будет ***0.*** Каждый раз, когда на выходе вентиля ***0***, теряется информация, т.к. неизвестно, в каком из трех возможных состояний находились входные линии (***0 - 1, 1 - 0, 0 - 0***). На самом же деле, в любом логическом вентиле, у которого количество входов превышает количество выходов, неизбежно происходит потеря информации, т.к. невозможно определить состояние входов по состоянию его выходов.

Между тем, еще в ***1973 C. Bennet*** показал, что при вычислениях можно обойтись как без необратимых логических элементов, так и без стирания информации. После чего справедливость данного положения была продемонстрирована на нескольких вычислительных моделях. Например, отметим здесь вентиль ***Э. Фредкина*** [536], имеющий три входные и три выходные линии. Сигнал на одной входной линии, называемой *управляющим* каналом, не изменяется при прохождении через вентиль. Если сигнал на управляющем

канале установлен равным ***0***, то *входные* сигналы на двух других линиях также проходят без изменения. Но если на управляющей линии будет ***1***, то на двух других *выходных* линиях происходит переключение, а именно: *входной* сигнал одной линии становится *выходным* другой, и наоборот. Вентиль ***Э. Фредкина*** не теряет информации, поскольку состояние входов можно всегда определить по состоянию выходов. ***Фредкин*** показал, что любое логическое устройство, необходимое для работы компьютера, может быть создано в виде соответствующей комбинации таким обратимых вентилей. Чтобы выполнить вычисление, на определенных *входных* линиях некоторых вентилей должны быть предварительно установлены определенные значения. Из других интересных *обратимых* вычислительных моделей можно отметить «*бильярдный*» компьютер ***Фредкина-Тоффоли.***

Вышеуказанные обратимые вычислительные модели базируются, главным образом, на классической динамике и электронике, однако ряд исследователей предложили и другие модели обратимых вычислительных устройств, базирующихся на принципах квантовой механики. По сути, частицы в этих моделях должны быть расположены таким образом, чтобы правила квантовой механики, управляющие их взаимодействием, были в точности аналогичны правилам, предсказывающим значения сигналов на *выходах* обратимых логических вентилей. Предположим, например, что спин частицы может иметь только два возможных значения: направление вверх (*соответствующее* ***1)*** и вниз (*соответствующее* ***0).*** Взаимодействие между значениями спинов частиц должно проходить таким образом, чтобы значение спина частицы изменялось в зависимости от спина частиц, находящихся поблизости. При этом, спин частицы будет соответствовать одному из выходов логического вентиля. Данная идея широко используется в моделях квантовых компьютеров. Уверенность в том, что квантовая механика позволяет проводить вычисления со сколь угодно малой затратой энергии, находит подтверждение в моделях *обратимых* квантовомеханических вычислителей. Эти модели не рассеивают энергию и подчиняются законам квантовой механики. Детальнее с моделями подобного типа можно ознакомиться в списке оригинальных источников [536].

Вышесказанное относилось главным образом к обработке информации. Но компьютер должен не только обрабатывать информацию, но и запоминать ее. Взаимосвязь между хранением и обработкой информации лучше всего, пожалуй, можно описать на примере машины Тьюринга, которая в вычислительном отношении может моделировать любой современный компьютер. Вышеупомянутый ***C. Bennet*** доказал возможность построения *обратимой* машины Тьюринга, т.е. такой, которая не теряет информации и, следовательно, в процессе работы может потреблять любое заранее заданное малое количество энергии. Не все машины Тьюринга обратимы, однако можно построить обратимую машину Тьюринга, способную выполнить любое вычисление [88,90,536].

Для создания обратимых вычислительных моделей предложены подходы на биомолекулярной и химической основах. Известные в генетике *ферментные* реакции обратимы. Показано [536], что гипотетическая ферментная машина Тьюринга может производить вычисления с произвольно малой затратой энергии, т.к. реакции, подобные ***РНК-***синтезу, могут рассеивать произвольно малое количество энергии. С достаточно интересной моделью такой обратимой машины Тьюринга, а также с интересными обсуждениями с физической точки зрения по *обратимым* вычислениям и *обратимым* компьютерам можно ознакомиться в [536]. Здесь, прежде всего, рекомендуется обратить особое внимание на во многом пионерские идеи и работы таких исследователей как ***Bennett C., Landauer R., Fredkin E., Toffoli T., Margolus M.*** и некоторых других исследователей.

Между тем, в связи с использованием ***ОС*** в качестве как формальных, так и перспективных прототипов вычислительных моделей вопросы *обратимости* динамики таких моделей также лежат в русле вышеотмеченных исследований. Вопросы ***обратимости*** динамимики ***ОС-***моделей играют чрезвычайно важную роль, в первую очередь, с точки зре-

ния использования их в качестве как симуляционной среды для погружаемых в нее разнообразних процессов, явлений и феноменов, прежде всего, *физического* характера, так и в качестве определенных прототипов перспективных вычислительных средств, предполагающих использование нанотехнологий и поддерживающих ***обратимые*** вычисления. И в этом отношении один из важнейших аспектов исследований в ***TOC-***проблематике приходится именно на вопросы обратимости динамики ***OC-***моделей. При этом, в понятие ***обратимости*** вкладывается возможность восстановления *обратной* динамики ***OC-***модели в любой момент времени. Мы же будем ниже использовать и более жесткое понятие *обратимости*, под которой понимается возможность ***однозначного*** восстановления всей динамики ***OC-***модели в любой момент времени т.е. такой обратимости, когда возможно точно определить в любой момент времени ***t*** для каждой конечной конфигурации классической ***OC-***модели ее единственного предшественника.

В настоящее время предложен ряд интересных типов ***OC-***моделей, обладающих общим свойством обратимости, среди которых можно отметить рассматриваемые в настоящей монографии ***OC*** на *разбиении* ***(OCнР)***, впервые введенные ***N. Margolus*** [388,536] и широко используемые им в соавторстве с ***T. Toffoli*** для моделирования обратимых процессов [150-152,273,376,430,536], а также специально сконструированные ***T. Toffoli*** и исследованные с точки зрения их вычислительно-конструкционной универсальности обратимые ***OC-***модели [268,318,536]. Целый ряд работ посвящен различным вопросам *обратимости* ***OC-***моделей различных типов и классов [536]. Так, ***D. Richardson*** [305] доказал, что классическая ***OC-***модель ***обратима*** тогда и только тогда, когда ее глобальное отображение, определяемое ***ГФП***, *инъективно*. Однако использованный для этого топологический подход не дает конструктивного алгоритма для обеспечения непосредственной *инверсии*. С теоретико-автоматной точки зрения подход к данной проблеме можно найти у ***K. Culik*** [536]. ***S. Amoroso, Y. Patt*** [270] и ***В. Аладьев*** [19,20] доказали существование эффективной процедуры, решающей проблему ***обратимости*** классической ***1-OC.*** С другой стороны, ***J. Kari*** [277] и ***В.З. Аладьев*** [88] на основе различных подходов доказали *неразрешимость* проблемы ***обратимости*** классических ***d-OC (d ≥ 2).***

При этом следует иметь ввиду, что получение конструктивного алгоритма *обратимости* для классических ***d-OC (d≥2)*** является достаточно трудной задачей даже при условии ее наличия [88]. Между тем, для случая линейных классических и некоторых специальных классов ***d-OC (d ≥ 2)*** такие конструктивные алгоритмы существуют. Так, ***G. Manzini*** и ***L. Margara*** вывели формулу для обратимости линейных классических ***d-OC; T. Sato*** получил алгоритм для определения обратимости в случае одного специального класса ***d-OC; K. Sutner*** получил алгоритм, обеспечивающий установление обратимости и суръективности глобального отображения линейных ***d-OC (d ≥ 2)*** за квадратичное время [536].

K. Morita доказал существование *обратимой* ***1-OC***, симулирующей произвольную ***1-OC***, включая необратимые; тогда как ***J. Dubacq*** доказал возможность симулирования машин Тьюринга *обратимыми* ***1-OC*** [536]. ***T. Toffoli*** доказал возможность моделирования произвольной ***d-OC*** обратимой ***(d+1)-OC (d ≥ 1)***, доказав тем самым вычислительную универсальность обратимых ***d-OC (d ≥ 2)*** [268]. Тогда как ***K. Morita*** и другие доказали вычислительную универсальность *обратимых* ***1-OC*** [321,322]. Между тем, вопрос моделирования произвольных классических ***d-OC*** обратимыми ***d-OC (d ≥ 2)*** все еще остается открытым, хотя наши результаты по ***WM-*** и ***W-***моделированию классических ***d-OC (d ≥ 2)*** говорят в пользу невозможности такого моделирования либо неразрешимости данной проблемы [88,90]. ***T. Toffoli*** и ***N. Margolus*** дали интересный обзор по *обратимым* ***OC-***моделям [273].

В наиболее распространенном понимании под ***обратимой OC-***моделью понимается не теряющая со временем информацию структура, а именно: ***в любой момент времени она полностью обратима.*** В общем случае определить такую *обратимую* ***OC-***модель особо-

го труда не составляет. С этой целью вполне достаточно задать локальную функцию перехода структуры следующим образом, а именно:

$$z(t+1) = \Phi(ШС_z(t)) \# z(t-1) \qquad (\Im)$$

Как уже отмечалось выше, в любом логическом вентиле, у которого количество входов *превышает* количество выходов, неизбежно происходит *потеря* информации, т.е. невозможно определять состояние входов по состоянию его выходов. В предложенном же решении число входов логического вентиля, в качестве которого выступает ***единичный*** автомат таким образом организованной ***ОС***-модели, равно числу выходов, т.е. двум, как это иллюстрирует следующая весьма простая схема, а именно:

$$\begin{array}{l} \ldots \rightarrow \left[\begin{array}{c}\sigma_{t-1}(ШС_z)\\ z(t)\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c}\sigma_{t}(ШС_z)\\ z(t+1)\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c}\sigma_{t+1}(ШС_z)\\ z(t+2)\end{array}\right] \rightarrow \ldots \\ \ldots \rightarrow \left[\begin{array}{c}\\ \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c}\\ \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c}\\ \end{array}\right] \rightarrow \ldots \end{array}$$

Следовательно, появляется возможность *однозначно* восстанавливать состояние единичного автомата z структуры в момент $t-1$ по его состоянию в текущий момент $t+1$ и значению $\sigma_t(ШС_z)$ – его состоянию в момент t, а именно:

$$z(t-1) = z(t+1) \ \#^{-1} \sigma(ШС_z(t))$$

где $\#^{-1}$ – функция, обратная к функции #; ограничением является лишь условие, что в результате применения *обратной* функции $\#^{-1}$ недопустимо получение значения $z(t-1)$, отличного от значений A-алфавита внутренних состояний единичного z-автомата. Вышепредложенный тип ***ОС***-модели вполне можно определить как структуру с памятью, а ее единичный автомат в определенной степени подобен вышеупомянутому вентилю ***Фредкина***, в котором роль *управляющего* канала успешно выполняют состояния *верхнего* уровня вышепредставленной схемы, т.е. $\sigma_p(ШС_z)$ $(p=t+k,\ k=\pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При этом, сама локальная функция перехода σ может быть произвольной, обеспечивая возможность определения *обратимых* ***ОС***-моделей с весьма широким набором локальных правил перехода для единичного автомата структуры. В качестве иллюстративного примера такого типа структур можно привести следующий. Ради простоты полагаем шаблон соседства в ***1-ОС*** типа Неймана-Мура $X=\{-1,0,1\}$, бинарный алфавит $A=\{0,1\}$, локальную функцию перехода $\sigma^{(3)}$, определяемую параллельными подстановками следующего вида:

$000 \rightarrow 0$	$000 \rightarrow 1$	$000 \rightarrow 1$	$000 \rightarrow 1$
$001 \rightarrow 1$	$000 \rightarrow 1$	$000 \rightarrow 0$	$000 \rightarrow 0$

Несложно убедиться, что определенная таким образом классическая ***1-ОС*** (*классификационный номер* ***122***) необратима, ибо согласно критерия существования неконструируемости ***НКФ***-типа на основе ***γ-КФ*** (*теорема* ***13***) в ней существуют ***НКФ***. При этом, в такой структуре существуют и ***НКФ-1*** уже следующего простейшего вида $c=\square 11\square$. Определим теперь функционирование построенной на основе данной классической ***1-ОС*** другую структуру следующими уравнениями для правил перехода ее элентарных автоматов:

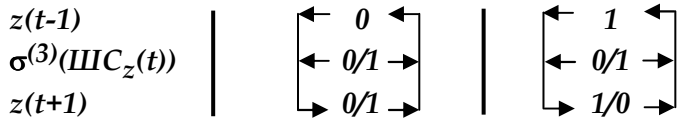
$$z(t+1) = \sigma^{(3)}(ШС_z(t)) + z(t-1) \ \ (mod\ 2) \quad \text{или} \quad z(t+1) = \sigma^{(3)}(ШС_z(t)) \ \ XOR \ \ z(t-1)$$

Во многих исследованиях в качестве алфавита внутренних состояний единичного автомата ***ОС***-модели рассматривается множество $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$, образующее конечное коммутативноех кольцо относительно операций сложения и умножения по ***mod a***. Для наших целей представляет интерес и обратная к сложению операция *вычитания* по ***mod a*** в таком кольце, которая для множеств $B=\{0,1\}$ и $A=\{0,1,2\}$ определяется таблицами вида:

–	0	1
0	0	1
1	1	0

–	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Легко выводится таблица операции *вычитания* по ***mod a*** и в общем случае ***A***-множества. Несложно убедиться, что определенная таким образом структура будет обратимой, что хорошо иллюстрирует следующая простая схема, а именно:



из которой несложно заключить, что согласно уравнению функционирования единичного ***z***-автомата структуры на основе информации о состояниях ***z***-автомата в моменты времени ***t+1*** и ***t*** можно однозначно определять и его состояние в момент ***t-1,*** т.е. в этом смысле определенная нами структура является ***обратимой.*** Приведем историю данной структуры на протяжении первых ***3*** шагов при ***КФ*** в момент ***t-1*** c_{t-1}=□***111111***□ (*начальное условие)* и начальной конфигурации c_t = □***1000010***□, а именно:

t-1	***... 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 ...***
t	***... 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 ...***
t+1	***... 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 ...***
t+2	***... 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 ...***
t+3	***... 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 ...***

Естественно, определенная нами обратимая структура моделируется в строго реальное время классической ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура и ***A***-алфавитом структурированных состояний, однако такая структура не будет ***обратимой.***

Действительно, моделирующая ***1-ОС*** представляется структурированным ***A***-алфавитом состояний ее единичных автоматов и индексом соседства Неймана-Мура ***X*** с локальной функцией перехода, определяемой параллельными подстановками следующего вида:

$$\begin{matrix} t-1 \\ t \end{matrix}\begin{bmatrix} S_{j-1} \\ S^*_{j-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_j \\ S^*_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{j+1} \\ S^*_{j+1} \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} \sigma^{(3)}(S^*_{j-1},S^*_j,S^*_{j+1}) \\ \sigma^{(3)}(S^*_{j-1},S^*_j,S^*_{j+1})\ \ XOR\ \ S_j \end{bmatrix};\ S_j,S^*_j\in\{0,1\};\ j=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ t=0,1,2,\ldots$$

Несложно убедиться, что моделирующая ***1-ОС*** является классической структурой с индексом соседства Неймана-Мура ***X***={***-1,0,1***}, структурированным алфавитом ***A*** мощности ***4;*** при этом, ***первый*** уровень состояний *моделирующей* структуры определяет конфигурацию *моделируемой* структуры в момент времени ***t,*** тогда как ***второй –*** в момент ***t-1 (t=1,2,...).*** Предполагается, что в момент времени ***t=0*** второй уровень состояний моделирующей структуры определяет некоторое начальное условие (*начальную* ***КФ),*** тогда как первый уровень определяет начальную конфигурацию непосредственно *моделируемой* структуры. Для доказательства необратимости моделирующей структуры достаточно указать для нее пару ***ВСКФ,*** что влечет за собой наличие для структуры неконструируемости ***НКФ-***типа, а следовательно, и отсутствие свойства обратимости ее динамики.

$$\sigma^{(3)}:\left\langle\begin{matrix}0\,0\,|\,0\,0\,0\,|\,1\,0\\0\,1\,|\,0\,0\,1\,|\,1\,0\end{matrix}\right\rangle\rightarrow\left\langle\begin{matrix}1\,|\,1\,1\,1\,|\,1\\1\,|\,1\,1\,1\,|\,0\end{matrix}\right\rangle$$

$$\sigma^{(3)}:\left\langle\begin{matrix}0\,0\,|\,0\,0\,0\,|\,1\,0\\0\,1\,|\,1\,0\,0\,|\,1\,0\end{matrix}\right\rangle\rightarrow\left\langle\begin{matrix}1\,|\,1\,1\,1\,|\,1\\1\,|\,1\,1\,1\,|\,0\end{matrix}\right\rangle$$

С учетом вышесказанного несложно убедиться в справедливости наличия для *моделирующей* структуры уже пары ***ВСКФ*** с ***ВБ*** размера ***3*** вышепредставленного вида, что и обусловливает наличие для структуры неконструируемости ***НКФ-***типа, а следовательно, и отсутствие свойства обратимости ее динамики. Еще на одном аспекте следует акцентировать внимание. Использовав в приведенном примере для определения *обратимой* ***ОС-***модели в качестве локальной функции перехода ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ бинарной классической ***1-ОС*** с номером ***122,*** не обладающей свойством обратимости динамики, и информацию о со-

стояниях *z*-автомата структуры в двух смежных моментах времени **<*t*,*t*-1>** для вычисления состояния *z*-автомата в момент ***t*+1**, мы ни в коей мере не решили вопрос моделирования такой необратимой структуры обратимой. Исходная необратимая структура была лишь одним из вариантов отображения конфигурации ***ШС*** *z*-автомата в момент ***t*** в его состояние в момент ***t*+1**. Аналогично сказанному могут быть использованы и иные операции в качестве **#**-операции **($\Im$)**. Таким образом, представленный пример ***обратимой ОС***-модели является лишь одним из возможных примеров такого типа и для получения обратимых ***ОС***-моделей для конкретных приложений требуется, порой, довольно сложная исследовательская работа. В настоящее время имеется ряд других интересных примеров определения обратимых ***ОС***-моделей [536]. Нами также был представлен ряд обратимых ***ОС***-моделей, отличных от классических и использованных для моделирования биологических процессов [5,88,90].

В настоящем разделе рассматривается вопрос *обратимости* динамики конечных конфигураций относительно классических ***d-OC (d≥1)***, т.е. структур, чьи ***ЛФП*** удовлетворяют следующему определяющему соотношению $\sigma^{(n)}(x,x,\ldots,x)=x$, где ***x*** – состояние «*покоя*». В свете данного предположения под ***обратимой d-OC*** понимается классическая структура, для которой имеют место одно или оба из нижеследующих соотношений, а именно:

$$(1)\qquad (\forall c\in C(A,d,\phi))(\forall t\in\{1,2,3,\ldots\})(\exists! c^t\in C(A,d,\phi))(c^t\tau^{(n)t}=c)$$

$$(2)\qquad (\forall c\in C(A,d,\phi))(\forall t\in\{1,2,3,\ldots\})(\exists! c^t\in C(A,d,\phi)\cup C(A,d,\infty))(c^t\tau^{(n)t}=c)$$

При этом, во втором случае снимается ограничение на принадлежность *предшественников* для конечной конфигурации ***c*** из множества $C(A,d,\phi)$. Графы состояний ***обратимой*** и ***необратимой*** динамик конечных конфигураций имеют следующий вид, а именно:

$(a)\ \ldots \leftarrow c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-3} \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o \in C(A,d,\phi)$ ***обратимая динамика d-OC***

(b) $\ldots \leftarrow c^{\infty}_{-(j+1)}$, $\ldots \leftarrow c^{f}_{-(j+1)}$, $\leftarrow c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-3} \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o \in C(A,d,\phi)$ ***необратимая динамика d-OC***

При этом, в графе состояний типа ***(a)*** конфигурация c_o может повторяться ***бесконечное*** количество раз в случае ее *периодичности*, тогда как для графа типа ***(b)*** число предшественников на шаге $-(j+1)$ обязательно более одного и они могут принадлежать как множеству $C(A,d,\phi)$, так и множеству $C(A,d,\infty)$. С учетом же предыдущих результатов данной главы по проблеме неконструируемости в классических ***ОС***-моделях уже несложно заключить, что для *обратимости* такого типа моделей необходимо отсутствие у них неконструируемости ***НКФ***-типа, ибо в противном случае для конфигураций c_o типа ***НКФ*** (*и блочных, и конечных*) вообще будут отсутствовать *предшественники* из множества $C(A,d,\phi)\cup C(A,d,\infty)$, не говоря уже о требовании их *единственности*. Рассмотрим в этой связи случай классических ***d-OC***, обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-1*** при отсутствии для них ***НКФ***. В качестве одного из примеров приведем бинарную ***1-OC*** с индексом соседства ***X*={*0,1,2*}, имеющую классификационный номер ***102*** и рассмотренную в разделе ***2.2***. Показано, что данная структура не обладает парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. С другой стороны, несложно убедиться, что для данной структуры существует множество ***НКФ-1*** вида $G=\{c_k=\square 1^{2k-1}\square \mid k=1,2,3,\ldots\}$, где 1^p – кортеж **<*11 ... 1*>** из ***p*** единиц. При этом, каждая ***КФ*** $c_k\in G$ имеет по паре ***непосредственных*** предшественников $\{c'_k, c''_k\}$:

$$c'_k=\square(10)^{k-1}1^{\infty},\qquad c''_k=1^{\infty}(01)^{k-1}\square;\qquad c'_k\tau^{(3)}=c''_k\tau^{(3)}=c_k\quad (k=1,2,3,\ldots)$$

Следовательно, такая структура не может быть *обратимой* в нашем понимании, если не принимать во внимание симметричность *предшественников* для указанного ***G***-множест-

ва ***НКФ-1.*** Между тем, даже при допущении, что предшественники рассматриваются с точностью до симметрии**,** свойство *необратимости* сохраняется. В качестве примера рассмотрим классическую бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$**,** имеющую классификационный номер ***30*** и рассмотренную в разделе ***2.2.*** Данная структура не обладает ***НКФ*** при наличии в ней ***НКФ-1*** уже вида $c_k=\square(1110)^k11\square$ $(k=0,1,2,\ldots)$**.** Так вот уже для ***НКФ-1*** простейшего вида $c=\square 11\square$ существует пара *непосредственных* предшественников вида $c_1=1^\infty\square$ и $c_2=\square 101^\infty$**,** т.е. $c_1 \neq c_2$ и $c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)} = c$**.** Таким образом, имеет место необратимость даже с точностью до симметричности предшественников конфигураций.

Наконец**,** в качестве еще одного примера приведем бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$**,** имеющую классификационный номер ***120*** и рассмотренную в разделе ***2.2.*** Показано, что данная структура не обладает парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ.*** С другой стороны, несложно убедиться, что для данной структуры существует множество ***НКФ-1*** уже простейшего вида $c=\square 1\square$ наряду с существованием ***КФ*** $c\in C(B,1,\phi)$**,** имеющей пару непосредственных предшественников и из множества $C(B,1,\phi)$**,** и из множества $C(B,1,\infty)$**,** а именно**:** $c_1 = \square 101\square$**,** $c^\infty = 1^\infty 01001^\infty$**,** $c_1\tau^{(3)} = c^\infty\tau^{(3)} = c = \square 11011\square$**.** Следовательно, и такая классическая структура не может быть *обратимой* в нашем понимании**.** Вышесказанное позволяет сформулировать следующий достаточно важный результат, а именно**:**

Отсутствие для классической d-ОС $(d \geq 1)$ ***неконструируемости НКФ-типа является необходимым, но не достаточным условием обратимости ее динамики конечных конфигураций в контексте представленного выше определения обратимости.***

Таким образом, среди классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$**,** не обладающих неконструируемостью ***НКФ-***типа**,** но обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-1,*** существуют ***необратимые*** структуры согласно представленного выше вполне естественного определения. Более того**,** проведенный вышеуказанным образом анализ показывает**,** что все классические бинарные ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$**,** не обладающие неконструируемостью ***НКФ-***типа и обладающие ***НКФ-1*** **(***структуры с характеристическими номерами* ***30, 60, 75, 86, 89, 90, 102, 105, 106*** *и* ***120;*** *раздел* ***2.2)****,* являются необратимыми в контексте представленного выше определения**.** Следовательно**,** наличие неконструируемости типа ***НКФ-1,*** не взирая даже на отсутствие неконструируемости ***НКФ-***типа в классических ***d-ОС,*** может обусловливать ***необратимость*** динамики такого класса структур.

Учитывая важность для исследования динамики классических ***ОС-***моделей, еще раз обратимся к трем основным типам неконструируемости в такого типа моделях, а именно**:** ***НКФ, НКФ-1*** и ***НКФ-2.*** Для вышеопределенных основных типов неконструируемости в классических ***ОС-***моделях ***(d≥1)*** можно привести следующие достаточно наглядные графические пояснения, а именно**:**

$$\textit{НКФ } C_b: \quad C\in C(A,d,\phi)\cup C(A,d,\infty) \rightarrow C_b \notin c\tau^{(n)}$$

$$\textit{НКФ-1 } C: \quad C \begin{cases} \rightarrow C^\infty\tau^{(n)}; & C^\infty\in C(A,d,\infty) \\ \not\rightarrow C^*\tau^{(n)}; & C^*\in C(A,d,\phi) \end{cases}$$

$$\textit{НКФ-2 } C: \quad C \begin{cases} \not\rightarrow C^\infty\tau^{(n)}; & C^\infty\in C(A,d,\infty) \\ \rightarrow C^*\tau^{(n)}; & C^*\in C(A,d,\phi) \end{cases}$$

где C_b **–** блочная конфигурация, т.е. конфигурация состояний конечного блока единичных автоматов ***ОС-***модели**;** $C(A,d,\phi)$ и $C(A,d,\infty)$ **–** множества соответственно всех конечных и бесконечных ***d-***мерных конфигураций структуры в алфавите $A=\{0,1,\ldots,a-1\}$**;** $\tau^{(n)}$ **–**

глобальная функция перехода структуры и ***C –*** конечная конфигурация структуры**,** для которой имеет место только конечное число состояний, отличных от состояния «*покоя*» ***(0).*** При этом, среди представленных типов неконструируемости в качестве ***базовых*** мы будем рассматривать именно два типа неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1.***

Отметим одно весьма важное соотношение между базовыми типами неконструируемости. В целях простоты изложения рассмотрим случай ***1-***мерных классических структур. Предположим, что в такого класса ***ОС-***моделях отсутствуют типы неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1*** при наличии для них *бесконечных* конфигураций $c^{\infty} \in C(A,1,\infty)$**,** отличных от полностью нулевых □-конфигураций и таких, что $c^{\infty}\tau^{(n)} = \square$**.** Рассмотрим произвольную блочную конечную ***КФ*** $c_b = x_1x_2 \dots x_p$ соответствующей длины, «*вырезанную*» из конфигурации c^{∞} $(x_1, x_2 \in A\setminus\{0\})$**;** на ее основе конструируем соответствующую ей *конечную* ***КФ*** $c^* = \square c_b \square = \square x_1x_2 \dots x_p \square$**;** $c^* \in C(A,1,\phi)$**.** Применяя теперь к данной ***КФ*** глобальную функцию перехода ***(ГФП)*** $\tau^{(n)}$**,** получаем конечную ***КФ*** следующего вида, а именно**:**

$$c^*\tau^{(n)} = \square c_1 000000 \dots 000000 c_2 \square$$

Очевидно, что ввиду предположения об отсутствии для структур неконструируемости ***НКФ-***типа, должно выполняться одно из следующих соотношений**:** $c_1 \neq \square$ & $c_2 \neq \square$, $c_1 \neq \square$ & $c_2 = \square$, $c_1 = \square$ & $c_2 \neq \square$**,** ибо в противном случае, как несложно убедиться, для структуры существовали бы пары ***ВСКФ*** уже вида $\{c^* \neq \square, \square\}$, т.е. $c^*\tau^{(n)} = \square\tau^{(n)} = \square$**,** а значит и ***НКФ***, что противоречит нашему предположению. Для определенности рассмотрим случай $c_1 \neq \square$ & $c_2 = \square$**.** Но тогда, увеличивая размер блочной ***КФ*** c_b и тем самым размер ***КФ*** c^***,** получаем бесконечное множество конечных ***КФ*** c^* таких, что $c^*\tau^{(n)} = c_1$**,** а следовательно и пар ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что вновь противоречит нашему предположению. Случай $c_1 = \square$ & $c_2 \neq \square$ аналогичен предыдущему**.** Наконец, рассмотрим случай $c_1 \neq \square$ & $c_2 \neq \square$**.** В данном случае поступаем следующим образом. Более того, согласно нашего предположения в рассматриваемых структурах отсутствует и неконструируемость типа ***НКФ-1.*** Следовательно, каждая конечная ***КФ*** c *(в том числе* c_1 *и* c_2*)* имеет только одного непосредственного предшественника c^{-1} из множества $C(A,d,\phi)$**.** Так как ***КФ*** $c^*\tau^{(n)} = \square c_1 0000 \dots 0000 c_2 \square$**,** то определив конфигурацию $c^{**} = \square c^{-1}{}_1 0000 \dots 0000 c^{-1}{}_2 \square$**,** приходим к заключению, что можно подобрать ***КФ*** $c^* = \square c_b \square = \square x_1x_2 \dots x_p \square$ таким образом, что будет выполняться следующее соотношение, а именно**:** $c^*\tau^{(n)} = c^{**}\tau^{(n)} = \square c_1 00000 \dots 00000 c_2 \square$**,** а при условии, что $c^* \neq c^{**}$ вновь легко приходим к заключению, что структуры должны обладать парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что противоречит нашему предположению. Но, с другой стороны, наличие для классических ***ОС-***моделей бесконечных конфигураций $c^{\infty} \in C(A,1,\infty)$**,** отличных от полностью нулевых □-конфигураций и таких что $c^{\infty}\tau^{(n)} = \square$**,** эквивалентно незамкнутости множества $C(A,1,\infty)$ относительно глобального отображения, индуцируемого ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ модели**.** С учетом вышеприведенных рассуждений получаем следующий достаточно важный результат**:** ***Если для классической 1-ОС множество*** $C(A,1,\infty)$ ***незамкнуто относительно глобального отображения, индуцируемого ГФП*** $\tau^{(n)}$***, то структура обладает неконструируемостью типов НКФ, НКФ-1 либо обоими типами одновременно.*** Данный результат распространяется и на случай классических ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ [54-56]. Вышесказанное позволяет сформулировать следующую достаточно интересную ***гипотезу,*** а именно**:** ***Классическая d-ОС, для которой множество*** $C(A,d,\infty)$ ***незамкнуто относительно глобального отображения, определяемого ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***структуры, является необратимой.*** В частности, для случая классических бинарных ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура *(как мы убедились выше)* данная гипотеза верна.

В данной связи особый интерес представляет проблема алгоритмической разрешимости замкнутости множества конфигураций $C(A,d,\infty)$ относительно глобального отображения, индуцируемого **ГФП** $\tau^{(n)}$ однородной структуры. Для случая множества $C(A,1,\infty)$ проблема алгоритмически разрешима [54-56], тогда как для случая множества $C(A,d,\infty)$ $(d>1)$ она алгоритмически неразрешима [88,90]. Приведем набросок доказательства данного результата, предварив изложение необходимыми сведениями. Под «*домино*» понимается квадратная пластинка со стороной длины 1 и удовлетворяющая условиям:

(1) стороны *домино* называются *(в порядке обхода по часовой стрелке)* ***верхней, правой, нижней и левой ;***

(2) каждая сторона домино окрашена в свой уникальный цвет *(одно домино может быть окрашено не более, чем* ***4****-мя различными цветами, но может быть и меньше цветов)*.

Общая игра «***домино***» задается непустым конечным множеством G типов «*домино*». Для дальнейшего представим себе квадратную сетку на плоскости, образованную прямыми, параллельными осям координат и проходящими через целочисленные точки. Говорят, что получено *покрытие* сетки посредством G, если в каждый ее квадрат помещено домино одного из типов, имеющихся в G. При этом, такое покрытие называется *когерентным*, если все домино соприкасаются сторонами одного цвета. Игра «*домино*» называется *правильной*, если существует вышеуказанное когерентное покрытие сетки посредством G.

В отдельных случаях удается установить *правильность* той или иной общей игры «*домино*», но как доказал ***R. Berger*** [536], проблема определения правильности игры «*домино*» в общем случае алгоритмически неразрешима, т.е. не существует алгоритма, позволяющего за конечное число шагов установить *правильность* общей игры «***домино***». Идея доказательства состоит в сопоставлении программе машины Тьюринга *общей* игры «*домино*» либо ее вариантов таким образом, чтобы имела место следующая эквивалентность, а именно: ***МТ после применения к пустой ленте никогда не останавливается тогда и только тогда, когда общая игра «домино» является правильной.*** При этом, в отличие от ***общей, угловая*** игра «*домино*» задается конечным множеством G типов «*домино*», а угловое покрытие посредством G можно получить помещением в каждый квадрат первого квадранта «*домино*» одного из типов G. Когерентность углового покрытия определяется аналогично случая общей игры «*домино*». Алгоритмическая неразрешимость определения правильности ***угловой*** игры «***домино***» была доказана ***H. Wang*** [536]. При этом, в отдельных случаях возможно установить наличие либо отсутствие алгоритма, решающего вопрос о *правильности* ***общей*** либо ***угловой*** игры «*домино*», однако в общем случае данная проблема неразрешима. С основными элементами доказательств на вполне доступном уровне можно ознакомиться, например, в прекрасной книге [260].

Для наших целей рассмотрим классическую 2-OC с произвольным алфавитом $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ и индексом соседства $X=\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$. Выделим среди всех параллельных подстановок, определяющих локальную функцию перехода $\sigma^{(4)}$ те, которые удовлетворяют следующему соотношению $\sigma^{(4)}((0,0),(1,0),(0,1),(1,1))=r\in A$. Таким образом, выбираем классическую 2-OC с «*почти*» простейшим индексом соседства X, чей шаблон соседства для его центрального автомата h_{oo} имеет следующий вид, а именно:

$$\sigma^{(4)}: \quad \begin{array}{|c|c|}\hline h_{01} & h_{11} \\ \hline h_{00} & h_{10} \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad S(h_{00}) = r \qquad (TF)$$

Во множестве всех конфигураций шаблона соседства такой структуры выбираем лишь те, для которых выполняется вышеуказанное соотношение (TF), т.е. те шаблоны, на которых локальная функция перехода $\sigma^{(4)}$ возвращает r-значение; при этом, исключаются те конфигурации шаблонов соседства, которые состоят полностью из r-состояний, что

делается для исключения тривиальных случаев покрытия. Обозначим такое множество через ***TF***. Очевидно, если в текущей конфигурации $c_t \in C(A,2,\infty)$ структуры конфигурации ***ШС*** всех единичных автоматов принадлежат только множеству ***TF***, то будет выполняется следующее соотношение, а именно: $c_t \in \tau^{(4)} = \Re_r$, где $\tau^{(4)}$ – глобальная функция перехода, соответствующая локальной функции перехода $\sigma^{(4)}$ структуры, и $\Re_r$ – конфигурация ***2-ОС***, все автоматы которой находятся в ***r***-состоянии. Для определения того, имеется ли возможность установления для произвольной классической ***2-ОС*** алгоритма, по которому за *конечное* число шагов можно определить – генерирует ли она из некоторой бесконечной ***КФ*** c^{∞} конфигурацию структуры, состоящую лишь из ***r***-состояний, поступаем следующим образом. Не нарушая общности, несложно убедиться, что на основе первого квадранта произвольной ***КФ*** структуры легко получить когерентное покрытие первого квадранта плоскости шаблонами соседства, как это проиллюстрировано ниже.

Когерентное покрытие R $\Rightarrow$

Квадрант конфигурации

h_{41}	h_{42}	h_{43}	h_{44}	==
h_{31}	h_{32}	h_{33}	h_{34}	==
h_{21}	h_{22}	h_{23}	h_{24}	==
h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	==

$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$

h_{41}	h_{42}	h_{42}	h_{43}	h_{43}	h_{44}	==
h_{31}	h_{32}	h_{32}	h_{33}	h_{33}	h_{34}	==
h_{31}	h_{32}	h_{32}	h_{33}	h_{33}	h_{34}	==
h_{21}	h_{22}	h_{22}	h_{23}	h_{23}	h_{24}	==
h_{21}	h_{22}	h_{22}	h_{23}	h_{23}	h_{24}	==
h_{11}	h_{12}	h_{12}	h_{13}	h_{13}	h_{14}	==

Легко убедиться, что произвольная ***КФ*** Z^2 (*тривиальный случай полностью нулевой* □***–КФ*** *исключается из рассмотрения*) конвертируется в *когерентное* покрытие Z^2 шаблонами соседства вышеуказанным способом, и наоборот. Следовательно, вышеуказанная проблема для классической ***2-ОС*** сводится к разрешимости ***правильности*** общей или угловой игры «***домино***». При этом, в качестве «***домино***» используются шаблоны соседства ***2-ОС***, чьи четыре стороны окрашены в цвета, соответствующие кортежам состояний $[h_{01},h_{11}]$, $[h_{11},h_{10}]$, $[h_{10}, h_{00}]$ и $[h_{00}, h_{01}]$; очевидно, количество различных допустимых цветов – a^2.

h_{01}	h_{11}
h_{00}	h_{10}

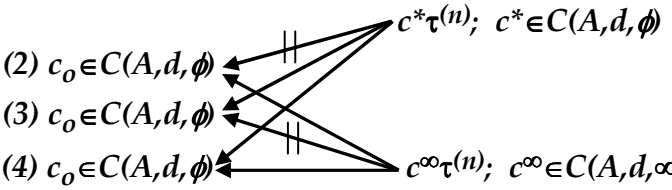
Таким образом, наша проблема (*а именно: генерирует ли произвольная* ***2-ОС*** *из некоторой бесконечной* ***КФ*** *конфигурацию структуры, состоящую лишь из* ***r***-*состояний*) сводится к вопросу существования алгоритма, решающего для произвольной классической ***2-ОС*** вышеуказанного вида, разрешимость *правильности* вышеприведенного когерентного покрытия ***R*** шаблонами соседства, на конфигурациях которых ***ЛФП*** структуры принимает ***r***-значение, т.е. к разрешимости ***общей*** (*или* ***угловой***) игры «***домино***», каждая из которых в общем случае *неразрешима*. Полагая, в частности, ***r=0*** получаем следующий результат:

Проблема замкнутости множества бесконечных конфигураций C(A,d,∞) относительно глобального отображения, определяемого ГФП $\tau^{(n)}$ классической однородной структуры, алгоритмически разрешима для d = 1 и алгоритмически неразрешима для d ≥ 2.

Между тем, в более общей постановке вышеприведенные рассуждения позволяют сформулировать следующий достаточно интересный результат, а именно: ***для произвольной классической d-ОС (d≥2) с алфавитом A={0,1,...,a-1} и ГФП $\tau^{(n)}$ проблема существования конфигураций C таких, что $C\tau^{(n)} = C^{\infty}_r$ (где C^{∞}_r – бесконечная КФ структуры, состоящая лишь из r-состояний; r∈A), алгоритмически неразрешима.***

В заключение еще раз остановимся на трех базовых типах некоструируемости в классических ***ОС***-моделях, а именно ***НКФ***, ***НКФ-1*** и ***НКФ-2.*** Так как неконструируемость прямо связана с наличием для конечной ***КФ с предшественников*** c^{-1}, то представим все допустимые типы таких *предшественников* для наглядности в графическом виде, а именно

(1) $(\forall c^* \in C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty))(c_b \not\subset c^*\tau^{(n)})$



Несложно убедиться, что вышепредставленные ***четыре*** типа *предшественников* для произвольной ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ являются исчерпывающими. Рассмотрим каждый из них по отдельности. Случай ***(1)*** характеризует наличие для ***d-ОС*** *блочной* ***КФ*** c_b, которая не является подконфигурацией ни для какой ***КФ*** $c^*\tau^{(n)}$ из множества $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$. Следовательно, такая ***d-ОС*** согласно определения ***1*** обладает неконструируемостью типа ***НКФ.*** Естественно, такой же результат получаем, если для ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ имеется более одного предшественника из множества $C(A,d,\phi)$ (*имеются пары* ***ВСКФ***, *а значит и* ***НКФ***), поэтому далее данный подвариант не рассматривается. Случай ***(2)*** говорит о наличии в ***d-ОС КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, не имеющей предшественников из множества $C(A,d,\phi)$, но имеющей предшественников из множества $C(A,d,\infty)$, что согласно определения ***4*** говорит о наличии для такой структуры неконструируемости типа ***НКФ-1.*** Случай ***(3)*** говорит о наличии в ***d-ОС КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, не имеющей *предшественников* из множества $C(A,d,\infty)$, но имеющей предшественников из множества $C(A,d,\phi)$, что согласно определений ***1*** и ***4*** говорит о наличии для такой структуры неконструируемостей типов ***НКФ***, ***НКФ-2.***

Наконец, случай ***(4)*** говорит о наличии в ***d-ОС КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, имеющей одного предшественника из множества $C(A,d,\phi)$ и предшественников из множества $C(A,d,\infty)$. Не нарушая общности, рассмотрим классическую ***1-ОС,*** удовлетворяющую данному случаю и не обладающую неконструируемостью типов ***НКФ*** и ***НКФ-1.*** Несложно убедиться в том, что для такой структуры существует ***КФ*** $c^\infty \in C(A,1,\infty)$ такая, что $c^\infty\tau^{(n)}=\square$. Определяем на ее основе конечную ***КФ*** c_o вида $c_o = \square x_1 x_2 \ldots x_q \square$, где кортеж $\langle x_1 x_2 \ldots x_q \rangle$ $(x_1, x_q \in A \setminus \{0\})$ – часть ***КФ*** c^∞ достаточно большой длины. Получаем ***КФ*** $c_o\tau^{(n)} = \square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$, где по меньшей мере одна из ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой. В противном случае в структуре существовали бы пары ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что противоречит условию. Пусть лишь одна из $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от *нулевой* (*для определенности* c_1). Но тогда она будет иметь бесконечно много предшественников вида $c = \square x_1 x_2 \ldots x_q \square$, что также противоречит отсутствию для структуры ***НКФ.*** Следовательно, ввиду отсутствия ***НКФ*** она должна иметь *предшественников* из множества $C(A,1,\infty)$, а не из $C(A,1,\phi)$, т.е. быть ***НКФ-1***, что также противоречит условию. Пусть теперь обе ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будут конечными, отличными от *нулевых* и обе имеют по одному предшественнику $\{c^{-1}_1, c^{-1}_2\}$ из множества $C(A,1,\phi)$. Рассмотрим ***КФ*** $c^* = \square\, c^{-1}_1 0 \ldots 0 c^{-1}_2 \square$, для которой по определению получаем $c^*\tau^{(n)} = \square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$. Тогда для соответствующим образом определенной ***КФ*** $c^\# = \square x_1 \ldots x_q \square$ получаем $c^*\tau^{(n)} = c^\#\tau^{(n)} = \square c_1 0 \ldots 0 c_2 \square$ $(c^* \neq c^\#)$, что противоречит отсутствию для структуры ***НКФ.*** Таким образом, ***каждая классическая d-ОС*** $(d \geq 1)$ ***имеет по крайней мере один из трех базовых типов неконструируемости НКФ, НКФ-1, НКФ-2 либо допустимые их сочетания, т.е. абсолютная конструируемость отсутствует.***

2.9. Особенности проблемы неконструируемости для однородных структур на разбиении

Однородная структура на разбиении ***(ОСнР)*** определяется как упорядоченная пятерка базовых компонент ***d-ОСнР*** ≡ $<Z^d,A,m,\Psi^{(m)},\Xi>$, где первые две компоненты Z^d и A аналогичны случаю классической ***ОС***-модели; m – размер ребра d-мерного кубического блока, на которые разбивается Z^d-пространство структуры; $\Psi^{(h)}$ – локальная блочная функция перехода ($h=m^d$); Ξ - правила коммутации блоков (*переразметка*) Z^d-пространства структуры. Функционирование структуры ***d-ОСнР*** достаточно просто и достаточно детально обсуждается в разделе ***1.2***. Там же проводится некоторый сравнительный анализ обоих типов моделей классических ***ОС*** и на разбиении ***ОСнР***. В ***ОСнР***-модели функция $\Psi^{(h)}$ отображает произвольную ***КФ*** (mx ... xm)-блока в новую конфигурацию этого же блока, т.е. имеет место отображение $\Psi^{(h)} : A^h \Rightarrow A^h$. Одновременное же применение *локальной блочной функции* ***(ЛБФ)*** ко всем блокам Z^d-пространства определяет *глобальную функцию* ***(ГФП)*** *перехода* $\tau^{(h)}$, преобразующую начальную c_o-***КФ*** всего однородного Z^d-пространства в следующую глобальную c_1-***КФ***, т.е. $c_o\tau^{(h)}=c_1$. В настоящее время структуры ***ОСнР***-типа находят достаточно широкое применение, в первую очередь, для задач физического моделирования и имеют программно-аппаратную поддержку на уже упоминаемых ***CAM***-машинах, базирующихся на ***ОС***-моделях [536].

В контексте же проблемы *неконструируемости* классические ***ОС***-модели и ***ОСнР***-модели имеют принципиальные различия. Во-первых, для ***ОСнР***-моделей не имеет силы классификация типов неконструируемости, определенная нами выше для классических ***ОС***-моделей ***(НКФ,НКФ-1,НКФ-2 и НКФ-3)***. Действительно, согласно определения ***4*** конечная ***c-КФ*** является в классической ***ОС***-модели ***НКФ-1*** тогда и только тогда, когда для нее существуют предшественники только из $C(A,d,\infty)$-множества бесконечных ***КФ***. Это влечет за собой незамкнутость $C(A,d,\infty)$-множества относительно глобального $\tau^{(h)}$-преобразования модели. С другой стороны, из определения ***ОСнР***-модели непосредственно следует, что из незамкнутости $C(A,d,\infty)$-множества относительно глобального $\tau^{(h)}$-преобразования вытекает необходимость наличия среди параллельных блочных подстановок, определяющих ***ЛБФ*** $\Psi^{(h)}$ модели, подстановок следующего вида $(\exists x_j\neq 0)(x_1x_2x_3 \ldots x_h \Rightarrow 000 \ldots 0)$. Следовательно, отображение $\Psi^{(h)} : A^h \Rightarrow A^h$ не будет взаимно однозначным и ***ОСнР***-модель должна обладать неконструируемостью ***НКФ***-типа, т.е. наиболее общим (*универсальным*) типом неконструируемости в ***ОС***-моделях.

Таким образом, наличие в ***ОСнР***-модели ***НКФ-1*** с необходимостью влечет за собой и наличие в ней ***НКФ***, т.е. является достаточным условием существования в ***ОСнР***-модели неконструируемости ***НКФ***-типа. С другой стороны, отсутствие для ***ОСнР***-модели неконструируемости ***НКФ***-типа влечет за собой замкнутость $C(A,d,\infty)$-множества относительно глобального $\tau^{(h)}$-преобразования модели, а значит, и отсутствие для нее ***НКФ-1***. Тогда как для случая классических ***ОС***-моделей данные утверждения в общем случае не имеют силы. Более того, несложно убедиться, что ***проблема замкнутости $C(A,d,\infty)$-множества ($d\geq 1$) относительно глобального $\tau^{(h)}$-преобразования модели d-ОСнР алгоритмически разрешима, а множество НКФ для нее рекурсивно***. Таким образом, для ***ОСнР***-моделей невозможно существование ***НКФ-1*** без ***НКФ***.

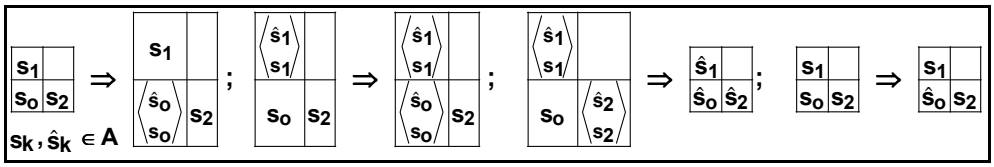
С другой стороны, для классической ***ОС***-модели типы *неконструируемости* ***НКФ*** и ***НКФ-1*** *не эквивалентны* и при отсутствии в ней ***НКФ*** классическая ***ОС***-модель может обладать ***НКФ-1***. Критерием существования в классической ***ОС***-модели ***НКФ-1*** при отсутствии в

ней ***НКФ*** является именно незамкнутость ***C(A,d,∞)-***множества относительно глобального $\tau^{(n)}$***-***преобразования модели *(*теорема ***18).*** При этом, в стиле нестандартного анализа полностью нулевая ***КФ (□-КФ)*** однородного Z^d***-***пространства относится нами для удобства формулировок и анализа к ***C(A,d,ϕ)-***множеству конечных ***КФ.***

Как отмечалось выше,проблема существования *неконструируемости* ***НКФ-***типа для классических ***d-ОС (d ≥ 2)*** в общем случае алгоритмически неразрешима *(*теорема ***27).*** Тогда как в классе структур ***d-ОСнР (d≥1)*** данная проблема алгоритмически разрешима и конструктивный разрешающий алгоритм состоит в установлении *наличия/отсутствия* взаимной однозначности локального параллельного отображения $\Psi^{(h)} : A^h \Rightarrow A^h$**.** Критерием отсутствия ***НКФ*** в ***ОСнР-***модели является взаимная однозначность локального отображения $\Psi^{(h)} : A^h \Rightarrow A^h$**,** определяемого ***ЛБФ*** модели**.** При этом**,** неконструируемость определяется сразу же на ***(m×m× ... ×m)-***блоках единичных автоматов структуры и множество всех ***НКФ*** для произвольной ***ОСнР-***модели рекурсивно. Из вышесказанного следует, что базируясь на одном и том же определении *неконструируемости* ***НКФ-***типа**,** причинно-следственные ее основы для классических ***ОС-***моделей и ***ОСнР-***моделей принципиально различны**.** Данное различие лежит в основе различий целого ряда фундаментальных динамических свойств классических ***ОС-***моделей и ***ОСнР-***моделей и обусловливает существенно большую востребованность вторых для задач моделировани процессов, явлений и феноменов, требующих наличия свойсва обратимости динамики [5,88,536].

Вместе с тем, принцип блочного разбиения однородного Z^d***-***пространства ***ОСнР-***модели, допускающий на каждом шаге модели оперировать только с локально независимыми ***m-***блоками, позволяет в целом ряде случаев существенно проще исследовать ее динамические аспекты. Это в сочетании с возможностью моделирования произвольных классических ***d-ОС*** структурами ***d-ОСнР*** позволяет, в свою очередь, существенно упрощать исследование ряда динамических аспектов первых. В качестве простого примера приведем моделирование классической $ОС=<Z^2,A,\tau^{(3)},Xn>$ с простейшим индексом соседства ***Xn*****={(0,0),(1,0),(0,1)}** структурой $ОСнР=<Z^2,A^*,2,\Psi^{(3)},\Xi>$ на разбиении, для которой $A^* = A \bigcup \left\{ \left\langle \begin{matrix} \hat{s} \\ s \end{matrix} \right\rangle \right\} (s, \hat{s} \in A)$**,** ***(2x2)-***блок разбиения Z^2***-***пространства совпадает с *шаблоном соседства* ***(ШС)*** моделируемой ***2-ОС, ЛБФ*** моделирующей структуры определяется параллельными блочными подстановками следующего простого вида, а именно**:**

локальная блочная функция $\Psi^{(3)}$***:*** ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$***:***



(k=0 .. 2), а ***Ξ-***правило переразметки Z^2***-***пространства структуры состоит в циклическом чередовании координат ***j-***точки ***{(0,0) ⇒ (1,0) ⇒ (1,-1) ⇒ (0,0)}***,* т.е. на один единичный автомат вправо вдоль ***X-***оси, затем на один автомат вниз вдоль ***Y-***оси, затем вновь в исходную ***(0,0)-***точку**.** При сделанных предположениях нетрудно убедиться *(оставляем это читателю в качестве полезного упражнения)***,** что исходная классическая ***2-ОС 3-***моделируется вышеопределенной структурой ***2-ОСнР.*** Обобщение данной принципиальной схемы на общий ***d-***мерный случай позволяет сформулировать следующий полезный во многих отношениях результат**:** ***произвольная классическая*** $ОС=<Z^d,A,\tau^{(d+1)},Xn>$ ***с простейшим индексом соседства (d+1)-моделируется структурой*** $ОСнР=<Z^d,A^*,2,\Psi^{(d+1)},\Xi>$ ***на разбиении, блок разметки*** Z^d***-пространства которой тождественен шаблону соседства моделируемой структуры и #A* = a*(a+1).***

Хорошо известно, что с переходом от размерности ***d=1*** уже к размерности ***d=2*** весьма существенно усложняется исследование многих вопросов динамики классических ***d-ОС***, а целый ряд алгоритмически разрешимых проблем для одномерного случая в общем случае ***d***-мерном ***(d≥2)*** оказываются алгоритмически неразрешимыми. В частности, в [158] доказана алгоритмическая неразрешимость проблемы замкнутости множества всех конечных ***КФ***, отличных от ***□-КФ*** и ряд других проблем *динамики* классических ***d-ОС*** для случая ***d≥2***. В работах [3,5,8,9,54-56,90,131,147,160,184-187,232,240,241,277,306] представлен ряд интересных результатов по алгоритмической ***неразрешимости*** проблем динамики классических ***ОС***-моделей. Именно поэтому весьма актуальной является проблема понижения сложности исследования динамики многомерных классических ***ОС***-моделей. Ниже на основе моделирования предлагается один из таких подходов.

При моделировании классических ***d-ОС*** посредством структур ***d-ОСнР*** вторые наследуют целый ряд важных свойств первых, что позволяет в целях упрощения исследования классических ***ОС***-моделей использовать следующий редукционный подход:

$$\textit{исходная d-ОС} \Rightarrow \textit{d-ОС с простейшим индексом соседства} \Rightarrow \textit{d-ОСнР}$$

с последующей экстраполяцией полученных результатов исследования ***d-ОСнР*** на исходные классические структуры ***d-ОС (d≥1)***. Однако такой подход предполагает проведение дополнительного анализа на предмет наследования моделирующей структурой исследуемого феномена моделируемой. Проведение такого рода анализа требуется в каждом конкретном случае. Например, моделируя классическую $ОС=<Z^1,A,\tau^{(2)},Х_п>$, ***ЛФП*** которой определена параллельными подстановками следующего простого вида:

$$00 \Rightarrow 0 \quad 01 \Rightarrow 1 \quad 02 \Rightarrow 1 \quad 10 \Rightarrow 2 \quad 11 \Rightarrow 0 \quad 12 \Rightarrow 2 \quad 20 \Rightarrow 2 \quad 21 \Rightarrow 1 \quad 22 \Rightarrow 0$$

посредством $ОСнР=<Z^1,A^*,2,\Psi^{(2)},\Xi>$, ***ЛБФ*** которой определяется блочными параллельными подстановками следующего общего вида, а именно:

$$x_k x_{k+1} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \hat{x}_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle x_{k+1}; \quad x_k \left\langle \begin{matrix} \hat{x}_{k+1} \\ x_{k+1} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \hat{x}_k \hat{x}_{k+1}; \quad x_j, \hat{x}_j \in A \quad (j=\{k,k+1\},\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

нетрудно убедиться *(предоставляем это читателю)*, что отображение $\Psi^{(2)} : A^{*2} \Rightarrow A^{*2}$ не является взаимно однозначным. Следовательно, моделирующая ***ОСнР***-структура как и моделируемая ***1-ОС*** обладает *неконструируемостью* ***НКФ***-типа *(в моделируемой структуре существуют пары* ***ВСКФ*** *уже вида* {***010,020***}, *а значит и* ***НКФ***). Однако, если в моделирующей структуре ***НКФ*** располагаются уже на ***2***-блоках, то *(как несложно убедиться)* в моделируемой ***1-ОС*** размер ***НКФ*** более двух. Таким образом, при наследовании моделирующей ***ОСнР*** свойства *неконструируемости* в целом, в частности не наследуется размер минимального блока, содержащего ***НКФ*** моделируемой структуры.

При этом, в общем случае не существует способа взаимного моделирования классических ***d-ОС*** и ***d-ОСнР***, сохраняющего свойство неконструируемости инвариантным. Под *инвариантностью* свойства ***G*** будем понимать такое соотношение, когда ***G***-свойство моделируемой структуры наследуется моделирующей и наоборот. Исходя из сказанного предположим, что неконструируемость ***НКФ***-типа *инвариантна* относительно взаимного моделирования классической ***d-ОС*** и ***d-ОСнР (d≥2)***. Однако в виду алгоритмической разрешимости проблемы существования ***НКФ*** в ***d-ОСнР***, разрешимой должна быть и аналогичная проблема для классических ***d-ОС (d≥2)***, что противоречит теореме ***27***. Следовательно: ***в общем случае свойство НКФ-неконструируемости относительно взаимного моделирования структур d-ОС и d-ОСнР не инвариантно***. Таким образом, вполне допустимо моделирование *необратимой* структуры *обратимой*. В частности, этот подход позволяет существенно упростить доказательство разрешимости проблемы замкнутости $C(A,d,\infty)$-множества относительно глобального $\tau^{(n)}$-отображения классической ***1-ОС***, а также ряда алгоритмических проблем динамики классических ***d-ОС (d≥2)*** [88,260,536].

Глава 3. Экстремальные конструктивные возможности классических однородных структур

В разделе ***1.1*** *(пункты* ***9-11)*** мы привели пример моделирования произвольной машины *Тьюринга* ***(MT)*** посредством классической ***1-OC,*** что доказывает наличие для ***1-OC*** свойства *универсальной вычислимости*, т.е. возможности вычислять любую *рекурсивную* функцию либо реализовывать любой алгоритм вычислений, либо обработки информации. Однако такая универсальность в общем случае требует использования *дополнительных* состояний для единичного автомата структуры. А именно, для вычисления некоторой функции *(генерации конечной конфигурации)*, определенной в *конечном* ***A-***алфавите, ***OC-***модель может потребовать использования ее единичными автоматами некоторого расширения ***A-***алфавита, например, только на один символ. Ниже будет показано, что такое *минимальное* расширение вполне достаточно для обеспечения возможности вычисления ***OC-***моделью любой рекурсивной функции, включая генерацию любой *конечной* конфигурации из заданной начальной.

Аналогичная ситуация имеет место и для ***MT,*** вычисляющих функции, определенные в алфавите символов их выходных лент, но при этом использующих *опосредствованное* расширение в виде алфавита внутренних состояний конечного автомата **–** *управляющего устройства* ***MT*** *(*рис. ***6).*** По-видимому, данное свойство присуще любой достаточно сложной системе **–** в рамках *внутренней аксиоматики* системы невозможно решение всех присущих ей задач**;** для возможности решения *нерешаемых* задач требуется расширение ее аксиоматики *(в частности, состояний системы)***.** Формально данный ***постулат*** имеет строгие доказательства для ряда математических теорий.

Аксиоматика ***OC-***модели определяется ее основными параметрами, а именно**:** размерностью однородного ***Z-***пространства ***(d);*** алфавитом ***(A)*** внутренних состояний единичного ***z-***автомата**;** индексом соседства ***(X)*** и локальной функцией перехода $\{\sigma^{(n)}\}$**.** Именно в рамках данной *базовой аксиоматики* представляет особый интерес вопрос конструктивных возможностей ***OC-***моделей. А именно**:** ***Насколько мощными оказываются возможности OC-моделей (в рамках их базовой аксиоматики) по генерации ими конечных конфигураций?*** При этом, под генерационными возможностями ***OC-***моделей на сегодня не понимается вполне *однозначного* понятия и оно в значительной мере носит субъективный характер [1,5,9]. Исходя из своих вкусов и интересов, ряд исследователей по-разному определяют максимальные генерационные *(динамические)* возможности ***OC-***моделей в рамках их *базовой* аксиоматики. В противоположность неконструируемости большой интерес представляет выявление общих свойств, отражающих максимальные конструктивные возможности классических ***OC-***моделей по генерации ими конечных ***КФ.*** В этом отношении мы рассмотрим два наиболее известных подхода, а именно**:** на основе *универсальных* и *самовоспроизводящихся* конечных конфигураций [1,5,8,9,54-56,88,536].

3.1. Универсальные конечные конфигурации в классических OC-моделях

В известной монографии [220] ***С. Улам*** сформулировал интересную проблему о существовании простой *универсальной* матричной системы. Положительное решение ее дало бы пример простой воспроизводящейся формальной системы, которую можно было бы исследовать известными математическими методами. В связи с данной проблемой введем необходимые понятия и определения.

Определение 13. Матрица U(n,a) порядка n с элементами из множества A={0,1,2, ..., a-1} называется универсальной для класса всех матриц порядка m < n, если для любой матрицы B(k, a) (k ≤ m) существует целое число p > 0 такое, что B-матрица является главным минором матрицы $U^p(n, a)$.

В терминах данного определения вопрос существования ***универсальной*** воспроизводящейся матричной системы решает следующая основная теорема [5,16,88].

Теорема 35. Существует такое целое число $n_o > 0$, что для любых целых чисел $n \geq n_o$ и a ≥ 2 универсальные матрицы U(n, a) отсутствуют.

Из результата теоремы следует, что не существует универсальных воспроизводящихся матричных систем достаточно высокого порядка. Для бесконечных же матриц данный вопрос пока остается открытым, т.е. в оригинальной постановке ***С. Улама*** проблема существования универсальной воспроизводящейся матричной системы еще ждет своего решения. Остается также открытым и ряд вопросов существования подобных матричных систем над полем ***A***. Работы в данном направлении представят, помимо упомянутого прикладного, значительный интерес и для теории бесконечных матриц (*в первую очередь, используемым аппаратом*), которая разработана пока относительно слабо.

Распространением проблемы существования универсальных матричных систем на случай классических ***OC***-моделей является проблема существования *универсальных* конфигураций, которая весьма тесно связана с проблемой *полноты* ***Х. Ямада – С. Аморозо*** для случая *полигенных* ***OC***-моделей [5,73,244,245,248,256]. Данная проблема сводится к весьма интересному вопросу: ***существует ли конечное множество КФ $c_k \in C(A,d,\phi)$ таких, что посредством ГФП классической ОС-модели можно сгенерировать из них $C(A,d,\phi)$-множество всех конечных КФ, т.е. может ли выполняться следующее базовое соотношение: $\cup_k \langle c_k \rangle [\tau^{(n)}] = C(A,d,\phi)$ (k=1..p)?*** Удовлетворяющие данным условиям c_k-конфигурации будем называть ***универсальными конечными конфигурациями (УКФ).***

В качестве интересного прикладного аспекта данной проблемы можно указать, например, на использование классических ***d-OC*** для моделирования логических *дедуктивных* систем в чистой математике. В этом случае ***КФ*** из множества $C(A,d,\phi)$ ассоциируются с *предложениями* логического исчисления, начальные ***КФ*** структуры – с *аксиомами* и ***ГФП*** – с *правилами вывода* системы. Тогда последовательность ***ГФП***, примененная к *начальной* ***КФ*** (*аксиоме*), представляет собой доказательство (*вывод*) в данной дедуктивной модели. Основными в таких системах являются проблемы *полноты* и *выводимости*. Обе эти проблемы непосредственно связаны с проблемами *существования* для классических ***OC***-моделей соответственно ***УКФ*** и ***НКФ***. В качестве второго прикладного аспекта проблемы существования ***УКФ*** можно указать на использование классических ***d-OC*** для моделирования развивающихся систем *клеточной* природы. Для случая конечных ***OC***-моделей проблема существования ***УКФ*** имеет положительное решение, а именно: ***существуют конечные d-OC, имеющие одну или все КФ универсальными.*** Ряд интересных примеров таких структур можно найти в монографии [1]. Совершенно иная картина имеет место в случае рассмотрения бесконечных классических ***OC***-моделей [5,88,90].

Определение 14. Конфигурации $c_k \in C(A,d,\phi)$ образуют для ГФП $\tau^{(n)}$ в классической d-OC множество УКФ, если $\cup_k \langle c_k \rangle [\tau^{(n)}] = C(A,d,\phi)$ (k=1 .. p).

В некоторых источниках довольно активно дебатировался вопрос о т.н. «***минимальных***» ***OC***-моделях (*в частности, в англоязычной литературе с подачи* ***С. Вольфрама*** *в книге* [407]), в которых, начиная с некоторой конечной конфигурации, возможно последовательно генерировать все множество конечных конфигураций, т.е. для таких структур должно выполняться следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\exists c_o \in C(A,d,\phi))\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\left\{c_j\tau^{(k)j}\right\} = C(A,d,\phi)\right) \qquad (\lambda)$$

Прежде всего, на наш взгляд, сам термин «*минимальный*» недостаточно корректно отражает суть вопроса, т.к. относится, прежде всего, к сложности самой ***OC-***модели, которая, как правило, определяется ***размерностью, индексом соседства*** (*размером шаблона соседства)* и ***мощностью алфавита*** внутренних состояний единичного автомата структуры ***d-OC=<Z^d, A, $\tau^{(n)}$, X>***, т.е. величиной ***SL=dxnx#(A)***, где ***#(A) –*** мощность ***A-***алфавита. Было высказано немало соображений о возможности существования таких структур, приводились даже конкретные примеры такого типа структур, правда, базирующиеся только на эмпирических результатах их исследования. Рассмотрим данный вопрос несколько детальнее на примере допустимости для произвольной классической ***OC-***модели определяющего соотношения (**λ**).

Предположим, что для классической ***d-OC (d≥1)*** существует конфигурация $c_o \in C(A,d,\phi)$ такая, что выполняется соотношение (**λ**). Естественно, что в данном случае такая структура не должна обладать неконструируемостью ***НКФ-***типа. Следовательно, конфигурация c_o должна иметь предшественника, т.е. ***КФ*** c^* такую, что $c^*\tau^{(n)}=c_o$. Однако, если $c^* \in C(A,d,\phi)$, то ввиду предположения (**λ**) существовало бы такое $t>0$, что выполнялось соотношение $c_o\tau^{(n)t}=c^*$ и генерируемая последовательность $\{c_o\tau^{(n)j} \mid j \geq 0\}$ была бы периодической, что противоречило бы предположению (**λ**). Следовательно, ***КФ*** c_o может иметь предшественника c^{∞} только из множества ***C(A,d,∞)*** бесконечных конфигураций, т.е. являться неконструируемой типа ***НКФ-1.*** Но в этом случае структура будет обладать бесконечным множеством ***НКФ-1*** [54], т.е. конечных конфигураций, имеющих предшественников только из множества ***C(A,d,∞)*** бесконечных конфигураций, что также противоречит предположению (**λ**). Это и доказывает факт отсутствия классических ***d-OC (d≥1)*** и конфигураций $c_o \in C(A,d,\phi)$, удовлетворяющих вышеуказанному условию (**λ**).

Используя результаты по неконструируемости, можно показать [1,5], что данная проблема даже в более общей постановке имеет отрицательное решение для каждой классической ***OC-***модели, о чем свидетельствует следующий основной результат, имеющий и целый ряд весьма интересных приложений, наряду с теоретическими аспектами [536].

<u>Теорема 36</u>. Для любой классической d-OC (d ≥ 1) отсутствуют конечные множества универсальных конфигураций.

Приведем достаточно простое доказательство данной теоремы, базирующееся на свойствах неконструируемоси типов ***НКФ*** и ***НКФ-1*** для классических ***d-OC (d ≥ 1).*** Пусть существует конечное множество $\mathfrak{R}o$ конфигураций $c_k \in C(A,d,\phi)$ таких, что имеет место следующее определяющее отношение, а именно:

$$\tau^{(n)}: \begin{cases} c_o^1 \to c_1^1 \to c_2^1 \to c_3^1 \to \ldots \to c_j^1 \to \ldots \\ c_o^2 \to c_1^2 \to c_2^2 \to c_3^2 \to \ldots \to c_j^2 \to \ldots \\ ================================ \\ c_o^m \to c_1^m \to c_2^m \to c_3^m \to \ldots \to c_j^m \to \ldots \end{cases} \qquad (\alpha o)$$

$$\mathfrak{R}o = < c_o^k > \left[\tau^{(n)}\right] = C(A,d,\phi); \quad (\forall k)(\forall j)(k \neq j \rightarrow c_o^k \neq c_o^k)$$

При сделанном предположении очевидно, что данная ***d-OC (d ≥ 1)*** не должна обладать свойством неконструируемости типов как ***НКФ***, так и ***НКФ-1.*** В противном же случае ***d-OC*** имела бы бесконечные множества ***НКФ*** и/или ***НКФ-1***, что противоречило бы на-

шему предположению о конечности множества $\mathfrak{R}o$. С учетом же вышесказанного легко убедиться, что не существует *КФ* $c_o \in C(A,d,\phi)$ такой, что имело бы место соотношение:

$$< c_o > \left[\tau^{(n)}\right] = C(A,d,\phi) \qquad (\alpha 1)$$

ибо *КФ* предшественник $c^{-1}{}_o \in C(A,d,\phi)$ для *КФ* c_o должен был бы принадлежать последовательности $(\alpha 1)$, т.е. *КФ* c_o была бы периодической, а значит конечной, что противоречит бесконечности множества $C(A,d,\phi)$. Так как по предположению множество $\mathfrak{R}o$ конечно, то вполне естественно предположить, что среди них можно выбрать т.н. «*минимальное*» множество $\mathfrak{R}o$, имеющее минимальную мощность среди всех множеств такого типа; при этом, минимальных множеств может быть более одного.

Множество $\mathfrak{R}o$ может одержать и чисто циклические *КФ* $c^j{}_o$, для которых имеет место соотношение $(\exists t \geq 0)(c^j{}_o \tau^{(n)t} = c^j{}_o)$ $\{j=1..p\}$ наряду с обязательным наличием *КФ* $c^k{}_o$, генерирующих бесконечные непериодические последовательности $<c^k{}_o>[\tau^{(n)}]$ конечных *КФ* $\{k=p+1..m\}$. Пусть в *минимальном* множестве $\mathfrak{R}o$ имеется p периодических *КФ* $c^j{}_o$ $(j=1..p)$ – подмножество $\mathfrak{R}p$ и q бесконечных непериодических *КФ* $c^k{}_o$ $(k=p+1..m)$ – подмножество $\mathfrak{R}q$ при выполнении следующего вполне очевидного соотношения, а именно:

$$\bigcup_{j=1}^{p} < c_o^j > \left[\tau^{(n)}\right] \bigcap \bigcup_{k=p+1}^{m} < c_o^k > \left[\tau^{(n)}\right] = \varnothing$$

Рассмотрим произвольную *КФ* $c^k{}_o \in \mathfrak{R}q$. Согласно вышесказанного для данной *КФ* существует единственный предшественник $c^{-1}{}_{o,k} \in C(A,d,\phi)$, который не может принадлежать последовательностям, генерируемым конфигурациями из подмножества $\mathfrak{R}p$ (*иначе последовательность* $<c^{-1}{}_{o,k}\tau^{(n)}=c^k{}_o>[\tau^{(n)}]$ *была бы периодической, что противоречит определению подмножества* $\mathfrak{R}q$) и может принадлежать только последовательностям, генерируемым *КФ* из подмножества $\mathfrak{R}q$. При данном предположении достаточно легко удостовериться, что можно на единицу уменьшить мощность минимального множества $\mathfrak{R}$, что вновь приводит к противоречию. Таким образом, для произвольной классической *d-ОС* $(d \geq 1)$ отсутствуют конечные множества *КФ* $c^k{}_o \in C(A,d,\phi)$, отвечающие соотношению (αo). Использованный при доказательстве подход, базирующийся на свойствах неконструируемости типов *НКФ* и *НКФ-1*, может быть полезен и в ряде других случаев. Более того, при определенных условиях имеет место даже более сильный результат, выражаемый следующей теоремой, представляющей и самостоятельный интерес [5,54].

***Теорема 37**. Если для некоторой классической d-ОС $(d \geq 1)$, не обладающей НКФ, существует G-множество НКФ-1, то для нее не существует конечного множества конфигураций $c_j \in C(A,d,\phi)$ таких, что имеет место следующее определяющее соотношение*:

$$\bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n)}\right] = C(A,d,\phi) \setminus G \qquad (j = 1..p)$$

Доказательство теоремы достаточно прозрачно и может быть найдено в [54-56]. Из данного результата непосредственно следует, что в ряде случаев сужение $C(A,d,\phi)$-множества *КФ*, которые требуется сгенерировать, до множества только конструируемых *КФ* не приводит к положительному решению проблемы существования *УКФ* для *классических ОС*-моделей. Более того, на основе одного алгебраического подхода с использованием результатов по неконструируемости можно доказать существенно более общий и весьма сильный результат [90], который дает ответы на целый ряд вопросов, поставленных в наших предыдущих работах [1,5,4,8,76,54-56], а также составляет существенную часть

аппарата исследования динамики классических ***OC-***моделей. Наряду с этим, существует аналог данного результата и для класса однородных структур на разбиении [8,9].

<u>Теорема 38</u>. Пусть $\tau^{(n)}$ будет произвольная ГФП классической d-OC в алфавите A (a – простое число), обладающая GSA-множеством НКФ и, возможно НКФ-3 и/или НКФ-1. Тогда не существует d-мерных конечных множеств КФ $c_j \in C(A,d,\phi)$ и ГФП $\tau^{(n_j)}$ в алфавите A={0,1,2,3, ..., a-1} таких, что выполняются следующие два соотношения:

$$1)\ \bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n_j)}\right] = C(A,d,\phi) \setminus GSA \quad or \quad 2)\ \bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n_j)}\right] = GSA \quad (d \le 1;\ j = 1..p)$$

При этом, для A-алфавита (a – составное число) имеет место формулировка результата только со вторым соотношением; это же имеет место и в случае простого числа a и неконструируемости типа НКФ-2, т.е. ГФП $\tau^{(n)}$ обладает GSA-множеством неконструируемых конфигураций типа НКФ-2.

Наряду с другими [71-73,75], из данного результата вытекает весьма интересное следствие, а именно**:** множества ***КФ $C(A,d,\phi)\setminus GSA$*** и ***GSA (GSA –*** *множество* ***НКФ*** *и, возможно,* ***НКФ-3, НКФ-1*** *или* ***НКФ-2*** *в случае* ***A-****алфавита при простом значении* ***a)*** не могут генерироваться посредством конечных множеств $c_j \in C(A,d,\phi)$ и ***ГФП $\tau^{(n_j)}$,*** определенных в том же алфавите, безотносительно к исходной ***ГФП $\tau^{(n)}$***, относительно которой рассматривается неконструируемость указанных типов**.** Более того, из результата теоремы ***38*** следует, что классические ***OC-***модели не являются *конечно* аксиоматизируемыми параллельными формальными системами даже при условии *исключения* из множества ***$C(A,d,\phi)$*** любого подмножества неконструируемых конечных ***КФ.*** Таким образом, каждое множество неконструируемых ***КФ (НКФ, НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3)*** относительно *проблемы полноты* в классических ***d-OC*** обладает таким же иммунитетом, как и само множество ***$C(A,d,\phi)$*** всех конечных конфигураций структуры. Данный результат позволяет значительно глубже понять сущность проблемы неконструируемости в классических ***OC-***моделях. Оказывается, что неконструируемость любого из возможных ***4-***х типов не оказывает существенного влияния на *максимальные* конструктивные возможности в контексте наличия для классических ***OC-***моделей множества ***УКФ.***

Вместе с тем, использование *расширенного* алфавита классической ***OC-***модели позволяет успешно и достаточно просто генерировать лишь из одной начальной ***КФ*** все ***$C(A,d,\phi)$-***множество конечных ***КФ.*** Рассмотрим простой пример классической ***1-OC*** $\langle Z^1, A^*, \tau^{(3)}, X\rangle$ при $A=\{0,1,2, ..., a-1\}$; $A^*=A\cup\{\#,b,c,d\notin A\}$ и $X=\{-1, 0, 1\}$**.** Локальную функцию перехода $\sigma^{(3)}$**,** определяющую ***ГФП $\tau^{(3)}$,*** задаем параллельными подстановками ***(ПП)*** вида**:**

$$\boxed{\begin{array}{l} cx\# \Rightarrow b \quad xcy \Rightarrow y \quad cxy \Rightarrow c \quad \#\#d \Rightarrow 1 \quad \#dx \Rightarrow c \quad x,y \in A;\ u,v,w \in A^* \\ xb\# \Rightarrow \begin{cases} b, if\ x+1>0\ (mod\ a) \\ 0, if\ x+1=0\ (mod\ a) \end{cases};\quad yxb \Rightarrow \begin{cases} x+1, if\ x+1>0\ (mod\ a) \\ d, \quad if\ x+1=0\ (mod\ a) \end{cases} \\ xdy \Rightarrow \begin{cases} c, if\ x+1>0\ (mod\ a) \\ 0, if\ x+1=0\ (mod\ a) \end{cases};\quad \#xd \equiv yxd \Rightarrow \begin{cases} x+1, if\ x+1>0\ (mod\ a) \\ d, \quad if\ x+1=0\ (mod\ a) \end{cases} \end{array}} \quad (33)$$

Тогда как на остальных кортежах $\langle u,v,w\rangle$ выполняется соотношение $\sigma^{(3)}(u,v,w) = v$**.**

Суть механизма генерации всего ***$C(A,\phi)$-***множества конфигураций базируется на использовании алгоритма сложения по ***(mod a).*** Пусть текущая ***КФ*** в таким образом определенной ***1-OC*** имеет вид: $C_t = ...\#x_1x_2x_3 ... x_mb\#...$ $(x_k \in A;\ k=1..m)$, которая в ***A-***алфавите совпадает с конфигурацией $C^*_t = \square x_1x_2x_3x_4 ... x_m\square$ и рассматривается как ***a-***ричное число длиной в ***m*** цифр. На следующем шаге производится сложение $x_1x_2x_3 ... x_m$***-***числа с ***1*** по ***(mod a),*** что обеспечивается наличием трех дополнительных символов $\{b, c, d\}$**.** При этом,

символ ***b*** является инициатором операции сложения, символ ***d*** обеспечивает перенос ***1*** переполнения в старшие разряды числа, тогда как символ ***c*** – возврат к правому концу *числа*-конфигурации и установку ***b***-символа – инициатора очередного цикла сложения. Посредством применения к текущей C_t-конфигурации ***ПП*** (**33**) уже несложно убедиться, что генерируемые в определенной нами ***1***-мерной ***ОС***-модели конечные конфигурации (*идентитифицируемые* ***b***-*символом*) в ***A***-алфавите перечисляют все ***C(A,ϕ)***-множество конечных ***КФ***, если в качестве начальной выбрана ***КФ*** вида: c_o=...#0b#... . В качестве весьма полезного упражнения читателю рекомендуется провести указанную апробацию функционирования описанной ***1-ОС*** и попытаться решить данную задачу при *меньшем* числе дополнительных символов, используя увеличение шаблона соседства, соответствующую кодировку дополнительных символов и, возможно, иной алгоритм генерации конечных конфигураций.

Таким образом, даже исключение из ***C(A,d,ϕ)***-множества ***неконструируемых КФ*** любых типов (*относительно произвольной* ***ГФП***) оставляет в нем достаточно *сложные* для генерации даже посредством конечного набора ***ГФП*** конечные ***КФ***. Это является непосредственным шагом на пути определения понятия ***сложности*** конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях, рассматриваемого ниже. Таким образом, наличие конечного множества ***УКФ*** как для отдельной ***ГФП***, так и для их конечного набора невозможно, т.е. и в расширенном понимании проблема существования ***УКФ*** для классических ***ОС***-моделей имеет отрицательное решение. В расширенном понимании данная проблема непосредственно предшествует проблеме сложности конечных ***КФ***, а в исходной постановке говорит о невозможности генерации посредством ***ГФП*** классической ***ОС***-модели всего множества *конечных* ***КФ*** из любого конечного набора начальных ***КФ***, устанавливая верхний недостижимый предел ее генерационных (***порождающих***) возможностей. В этой связи рассматривается ряд более ослабленных подходов к установлению *максимальных* генерационных возможностей ***ОС***-моделей, среди которых особое место занимает подход на основе *универсальной воспроизводимости* конечных ***КФ***, представляющий наряду с сугубо теоретическим и определенный прикладной интерес в биологии развития, а также в задачах исследования вопросов *надежности* и *восстановления* в различного рода прикладных ***ОС***-моделях технического характера, включая вопросы самовоспроизведения роботов [536]. Данный вопрос рассматривается в следующем разделе, здесь же мы рассмотрим проблему наличия для классических ***ОС***-моделей ***универсальных*** конфигураций (*на наш взгляд, как отмечалось выше, некорректно ассоциируемых с понятием* «*минимальных*» ***ОС***-*моделей*) при ослаблении требования к их определению, а именно: ***существуют ли классические d-ОС (d≥1) и начальные КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ ***для них такие, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:***

$$(\exists c_o \in C(A,d,\phi))(\forall c^* \in C(A,d,\phi))(\exists t \geq 1)(c^* \subseteq c_o \tau^{(n)t})$$

При таком подходе мы требуем не генерации из начальной ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ последовательности, содержащей все конечные ***КФ***, а только наличия в генерируемых конечных конфигурациях вхождения всех конечных *блочных* конфигураций, что существенно более слабое условие. Несложно убедиться, что при наличии ***d-ОС*** с указанным свойством все конфигурации ***c^*** $\in C(A,d,\phi)$, генерируемые из ***КФ*** c^*, будут *самовоспроизводящимися* в смысле Мура. В то время как для самой структуры будет отсутствовать неконструируемость ***НКФ***-типа (*а значит и* ***НКФ-3***) при наличии неконструируемости типа ***НКФ-1***. В то же время в такой структуре *никакая* конечная ***КФ*** c_o не может иметь предшественников из множеств ***C(A,d,ϕ)*** и ***C(A,d,∞)*** одновременно, т.е. каждая конечная ***КФ*** в структуре будет ***НКФ-1*** *или* ***НКФ-2*** [88,90]. Общее решение данной проблемы нам неизвестно, однако ниже приведен ряд соображений в пользу ее положительного решения.

Рассмотрение проведем для класса бинарных классических ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура**.** В разделе ***2.2*** данный класс структур рассматривался с точки зрения наличия для них неконструируемости типов ***НКФ, НКФ-1*** и ***НКФ-2.*** Однако прежде вполне уместно напомнить одно замечание, носящее конвенционный характер и упоминаемое в разделе ***1.1.*** Ради удобства представления *бинарных* классических ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура нами использовался весьма естественный прием, когда ***ЛФП*** такого типа структур определяются параллельными подстановками следующего вида**:**

$$000 \to x_1 = 0 \qquad 010 \to x_3 \qquad 100 \to x_5 \qquad 110 \to x_7$$
$$001 \to x_2 \qquad 011 \to x_4 \qquad 101 \to x_6 \qquad 111 \to x_8$$

Пронумеруем данные ***1-ОС*** целыми десятичными числами, соответствующими бинарным представлениям $<x_1x_2 \ldots x_8>$**,** т.е. от ***0*** до ***255.*** На наш взгляд, данный подход наиболее естественен, вместе с тем, в начале ***80-х*** с подачи ***С. Вольфрама*** был определен иной принцип нумерации такого типа структур, когда *нумерация* структур базируется на использовании обратного порядка параллельных подстановок, определяющих ***ЛФП:***

$$111 \to y_1 \qquad 110 \to y_3 \qquad 101 \to y_5 \qquad 100 \to y_7$$
$$011 \to y_2 \qquad 010 \to y_4 \qquad 001 \to y_6 \qquad 000 \to y_8$$

и *характеристический* номер структуры определяется десятичным *эквивалентом* бинарного кортежа $<y_1y_2 \ldots y_8>$**.** Естественно, данное различие не принципиально**,** однако его следует иметь ввиду**,** когда привязываются к нумерации данного класса структур. Везде в настоящей книге используется именно наша классификация. В целях упрощения перевода из нумерации ***Аладьева*** в нумерацию ***Вольфрама*** структур данного класса можно использовать простую процедуру ***AW(N),*** реализованную в среде пакета ***Maple*** и работающую по принципу переключателя**:** если ***N –*** номер структуры в нумерации ***Вольфрама (Аладьева),*** то ***AW(N) –*** соответствующий ей номер в нумерации ***Аладьева (Вольфрама).*** Для понимания исходного текста процедуры, представленного ниже, вполне достаточно знакомства с пакетом ***Maple,*** например, в объеме наших книг [97-118,545]**.**

```
AW := proc(N::integer)
local a, k;
  if not belong(N, 0 .. 255) then error "argument must be from range 0..255,
       but had received <%1>", N  else  a := convert(convert(N, 'binary'), 'string');
    convert(parse(Rev(cat("0" $ (k = 1 .. 8 – length(a)), a))), 'decimal', 'binary')
  end if
end proc
> AW(30), AW(60),AW(75), AW(86), AW(89),AW(90), AW(102),AW(105), AW(106),AW(120);
                          120, 60, 210, 106, 154, 90, 102, 150, 86, 30
```

Из всех структур данного класса ***(согласно вышесказанного)*** сразу же можно исключить из дальнейшего рассмотрения структуры со следующими характеристическими номерами, а именно**:**

0..14, 16..22, 24..26, 28, 31..38, 40..44, 47..50, 52, 53, 55..59, 61..70, 72..74, 76, 78..82, 84, 87, 88, 91..100, 103, 104, 107..119, 121..127

по той простой причине, что каждая из них обладает *неконструируемостью* по меньшей мере ***НКФ-***типа, т.е. для каждой из них существуют бесконечные множества конечных блочных ***КФ,*** которые не могут генерироваться в качестве подконфигураций ни из какой начальной конфигурации $c \in C(B,1,\phi) \cup C(B,1,\infty)$**.** Три структуры с номерами ***15, 51*** и ***85*** не обладают ни ***НКФ,*** ни ***НКФ-1,*** генерируя идентичные ***(****с точностью до сдвига****)*** последовательности конечных ***КФ*** типа ***НКФ-2*** и с нашей точки зрения также не представ-

ляющие интереса. Обратимся к подгруппе структур, не обладающих ***НКФ*** по причине отсутствия для них ***ВСКФ.*** Номера таких структур представлены ниже, а именно**:**

30, 45, 60, 75, 86, 89, 90, 101, 102, 105, 106, 120

Однако, ввиду вышесказанного искомая в качестве кандидата на обладание свойством универсальности ***1-ОС*** должна обладать неконструируемостью типа ***НКФ-1,*** тогда как структуры с номерами ***45*** и ***101*** этим свойством не обладают. Поэтому и их следует исключить из числа потенциальных кандидатов. Следовательно, нам остается рассмотреть лишь ***10*** структур с номерами ***30, 60, 75, 86, 89, 90, 102, 105, 106, 120,*** обладающих неконструируемостью типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** при отсутствии неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3.*** Достаточно детальный как теоретический анализ**,** так и компьютерное моделирование показали, что структуры с номерами ***30, 60, 75, 86, 89, 90, 102, 105, 106*** не могут служить в качестве структур с вышеуказанным свойством универсальности. Но остается структура с номером ***120,*** к более детальному рассмотрению которой и приступим.

Пусть $c_b=x_1x_2 \ldots x_n$ $(x_j \in B=\{0,1\};\ j=1..n)$ **–** произвольная *блочная* ***КФ.*** Исходя из сказанного в разделе ***2.2,*** несложно убедиться, что для данной структуры для каждой *блочной* ***КФ*** c_b конфигурация $c^* \in C(B,1,\phi)$, удовлетворяющая условию $c_b\tau^{(3)}=c^*$**,** будет являться ***НКФ-1.*** Например, конфигурациями такого типа являются конфигурации вида $c_k=\square(1)^k\square$**;** $k \geq 1$**.**

Для компьютерного исследования динамических свойств классических ***1-ОС*** ***(****включая и бинарные структуры рассматриваемого типа****)*** нами был создан ряд программ в среде различных систем программирования [88]**;** примеры двух из них, написанных в среде ***СКА Maple*** [102-118], представлены ниже. Посредством вызова процедуры ***Art_Kr(Co, C1, T, p)*** мы получаем возможность тестировать ***p-***кратность вхождений *блочной* ***КФ C1*** в конфигурации, генерируемые из начальной конечной ***КФ Co*** посредством ***1-ОС,*** чья ***ЛФП*** определяется таблицей ***T*** параллельных подстановок. Тогда как вызовом ***Art_Kr1(Co, C1, T)*** обеспечивается вывод на печать **2-**элементных последовательностей, возрастающих по первому элементу, определяющему число копий ***КФ C1,*** входящих в конфигурации, генерируемые из начальной ***КФ Co*** посредством ***1-ОС,*** чья ***ЛФП*** определяется таблицей ***T*** параллельных локальных подстановок**.** Если первая процедура обеспечивает тестирование *кратных* вхождений произвольных блочных ***КФ C1*** в конфигурации**,** генерируемые из начальной конечной ***КФ Co (Co ≠ C1;*** *экспериментально тестируется универсальная воспроизводимость вышеуказанного типа****)***, тогда как вторая процедура обеспечивает тестирование кратных вхождений произвольных блочных ***КФ C1*** в конфигурации**,** генерируемые из начальной конечной ***КФ Co (Co ≡ C1;*** *экспериментально тестируется возможность универсальной воспроизводимости конечных* ***КФ*** *в смысле Мура****).***

```
> Art_Kr := proc(Co::string, C1::string, T::table, p::posint)
   local Kr, C, t, k, d;
   Kr, C, t, k := proc(S::string)
      local k;
         for k from length(S) by -1 to 1 do if S[k] <> "0" then break end if end do; S[1 .. k]
      end proc, Co, {}, 0;
   do
      k := k + 1; if p <= nops(Search2(C, {C1})) then break end if;
      C := convert(parse(Kr(psubs(cat("00", C, "00"), T, 'r'))), 'string')
   end do;
   k
end proc;
> T:=table(["000"="0","001"="1","010"="1","011"="1","100"="1","101"="0","110"="0","111"="0"]):
> Art_Kr("10100111111", "10100111111", T, 5);   ⇒ 807
```

```
> Art_Kr("1", "10100111111", T, 5);   ⇒ 1211
> Art_Kr1 := proc(Co::string, C1::string, T::table)
local Kr, C, t, k, d, a, h;
   Kr, C, t, k, h := proc(S::string)
      local k;
         for k from length(S) by -1 to 1 do if S[k] <> "0" then break end if end do;  S[1 .. k]
      end proc, Co, {}, 0, 1;
   do  k := k + 1;  a := nops(Search2(C, {C1})); if  h < a  then lprint(a, k);  h := a  end if;
      C := convert(parse(Kr(psubs(cat("00", C, "00"), T, 'r'))), 'string')
   end do
end proc
> Art_Kr1("11110010110", "11110010110", T120);
  2, 224
  3, 323
  4, 971
  5, 1420
  6, 1596
  Warning, computation interrupted
```

Результаты многочисленных компьютерных экспериментов со структурой под *номером* ***120***, проведенные с использованием вышеуказанных процедур, в сочетании с некоторыми теоретическими рассмотрениями, базирующимися на *динамических* свойствах ***1-ОС***, обусловленных наличием в них неконструируемости типа ***НКФ-1*** без ***НКФ***, позволяют сформулировать следующее достаточно интересное предположение, а именно [88]**:** ***для классической бинарной 1-ОС с характеристическим номером 120 каждая конечная КФ является самовоспроизводящейся в смысле Мура, одновременно генерируя при этом все конечные блочные КФ.*** Если это действительно так, мы получаем довольно интересный пример структур, обладающих свойством ***универсальной*** воспроизводимости конечных ***КФ***, принципиально отличный как от уже ставшего классическим класса *линейных* ***ОС***-моделей, чьи ***ЛФП*** определяются как $\sigma^{(n)}(x_1x_2 \ldots x_n) = \sum_j x_j \ (mod\ a)$, так и от более широкого класса структур, образованных на осное композиции их ***ГФП*** и также обладающих свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных конфигураций. (*см. раздел* ***3.2***). При этом, в случае установления такого типа структур мы получаем весьма интересный класс ***ОС***-моделей, обладающих *одновременно* как свойством ***универсальной*** воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ***, так и свойством универсальной генерационной возможности ***блочных КФ*** из каждой конечной конфигурации. На наш взгляд, исследования в данном направлении представляются достаточно интересными.

3.2. Самовоспроизводящиеся конечные конфигурации в классических ОС-моделях

Если проблема существования ***УКФ*** характеризует генерационные возможности классических ***ОС***-моделей относительно множества конечных ***КФ*** в целом, то *универсальная воспроизводимость* соотносит данную возможность со структурно-динамическим аспектом генерации ***КФ***-последовательностей ***ОС***-моделями. Сущность универсальной воспроизводимости заключается в том, что каждая конечная ***КФ*** в классической ***ОС***-модели является самовоспроизводящейся по Муру. Класс ***ОС***-моделей, обладающих свойством универсальной воспроизводимости, интересен во многих отношениях и этому вопросу глобальной динамики структур уделено достаточно много внимания. В этом направле-

нии целым рядом исследователей ***(А. Ваксман, Т. Виноград, Т. Уаку, А.Р. Смит, С. Аморозо, Т. Остранд, А. Фредкин, Г. Купер, П. Андерсон, С. Улам, В.З. Аладьев и др.)*** получены весьма интересные результаты [1,5,8,9,54-56,88,90,131,185-187,221-225,294,298,299,536].

Наши результаты в данном направлении позволяют установить целый ряд интересных соотношений между *неконструируемостью* и *универсальной воспроизводимостью* в классических ***ОС-***моделях, а также решить ряд сугубо математических проблем. Для дальнейшего определим понятие воспроизводимости конфигураций по Э. Муру.

<u>Определение 15</u>. Будем говорить, что КФ $c \in C(A,d,\phi)$ содержит m копий (с точностью до вращения и сдвига пространства Z^d) блочной c_b-конфигурации, если существует m непересекающихся областей однородного пространства Z^d, содержащих каждая по меньшей мере одну копию блочной c_b-КФ. КФ $c \in C(A,d,\phi)$ является самовоспроизводящейся в смысле Мура в классической d-ОС, если для любого наперед заданного целого числа $m > 0$ существует такое целое число $t > 0$, что КФ $c\tau^{(n)t}$ содержит не менее m копий исходной конечной с-КФ.

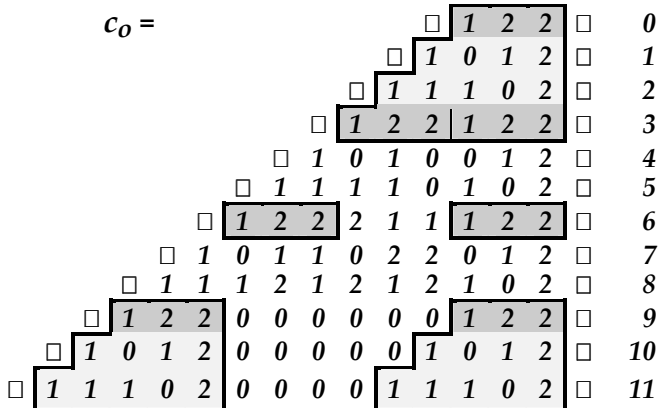
Наряду с попытками формализации процесса *самовоспроизведения* на самом общем уровне *воспроизводящиеся* ***КФ*** в определенной мере могут характеризовать конструктивные возможности классических ***ОС-***моделей и в этом плане являются, до некоторой степени, противоположными неконструируемым конфигурациям типов ***НКФ,НКФ-3*** и ***НКФ-1.*** Показано [1,5,9], что классические ***ОС-***модели могут иметь множества достаточно сложных самовоспроизводящихся по Муру *конечных* ***КФ*** как при отсутствии, так и при наличии в них ***НКФ*** и/или ***НКФ-3.*** Наиболее интересным в данном отношении оказалось обнаружение ***L-***класса линейных классических ***d-ОС,*** обладающих свойством *универсальной* воспроизводимости конечных ***КФ.*** *Линейной классической* ***d-ОС*** называется структура, чья ***ЛФП*** имеет следующий общий вид, а именно**:**

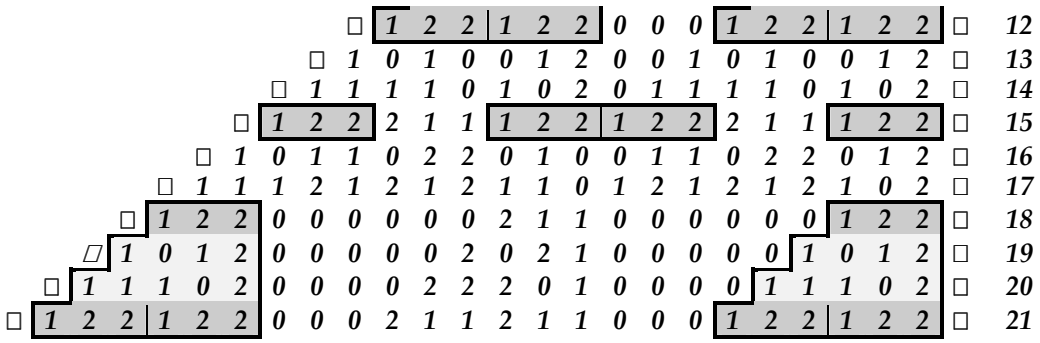
$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1}^{n} b_k x_k \pmod a \qquad x_k, b_k \in A = \{0,1,\ldots,a-1\}; \quad (k = 1..n)$$

При сделанных предположениях, благодаря работам указанных выше исследователей имеет место следующий весьма интересный результат [5,54-56,88,90,536].

<u>Теорема 39</u>. В классической линейной ОС-модели каждая конечная КФ $c \in C(A,d,\phi)$ является самовоспроизводящейся в смысле Мура.

В качестве простого примера рассмотрим классическую ***1-ОС*** с алфавитом внутренних состояний ***A={0,1,2}***, простейшим индексом соседства ***X={0,1}*** и *линейной* локальной функцией перехода $\sigma^{(3)}(x,y)=x+y \pmod 3$; $x,y \in A$. Взяв в качестве *начальной* конфигурацию c_o=□122□, уже на первых ***21*** шаге генерации структуры легко наблюдать весьма прозрачную картину воспроизведения все увеличивающихся в количестве копий исходной конечной конфигурации c_o***-КФ***, а именно**:**





Используя результат теоремы ***150*** [5], можно не только существенно упростить доказательство данного результата, но и в определенной мере охарактеризовать целый класс такого типа структур, а именно: ***Любая классическая d-ОС (d≥1) с локальной функцией перехода следующего общего вида, а именно:***

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Big(\sum_{1}^{n} b_k x_k\Big)^{a^m} \pmod a$$

при $a=p^k$ (p – простое; m, k – положительные целые; $b_j, x_j \in A$; j=1..n) имеет все конечные КФ самовоспроизводящимися в смысле Мура.

Таким образом, ***L***-класс ***линейных*** классических ***ОС***-моделей с точки зрения их динамики может быть охарактеризован наличием *универсальной* воспроизводимости конечных ***КФ***. В связи с чем возникает интересный вопрос: ***существуют ли другие классы ОС-моделей, обладающие свойством универсальной воспроизводимости, и как их можно охарактеризовать?*** В конце раздела мы вновь вернемся к данному интересному вопросу.

Класс линейных ***ОС***-моделей, обладающих свойством ***универсальной воспроизводимости*** конечных ***КФ*** по Муру, до сих рассматривался относительно ***связного*** индекса соседства $X=\{0, 1, \dots, n-1\}$; между тем, данное свойство распространяется и на случай ***общего*** индекса соседства $X^*=\{j_1, j_2, \dots, j_p\}$ $(0 \le j_1 < j_2 < \dots < j_p \le n-1)$, включая *несвязные* индексы при условии, что в нем *ведущими* являются не менее двух переменных по каждой из размерностей, т.е. для случая ***1-ОС ЛФП*** модели имеет следующий вид, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=j_1}^{j=j_p} j \pmod a; \quad (0 \le j_1 < j_2 < \dots < j_p \le n-1; \quad 2 \le p \le n) \quad (\psi)$$

где алфавит ***ОС***-модели есть $A=\{0,1,2, \dots, a-1\}$ и шаблон соседства имеет размер ***n*** [54-56]. Следовательно, в данном контексте можно рассматривать ***обобщенный класс линейных ОС***-моделей, характеризуемых свойством ***универсальной воспроизводимости*** по Муру конечных конфигураций, чьи ***ЛФП*** определяются вышеуказанным соотношением ***(ψ)***.

```
HS1B := proc(Co::string, n::posint, q::posint, m::posint, Ind::{set, list}, R::{1, 2})
local a, Ar, Kr, C, t, k, d, p, v, v1, F;
  if not belong(convert(Co, 'set1'), {seq("" | |k, k=0 .. q - 1)}) then error "Configuration <%1>
       contains an illegal symbol", Co  end if;
  if not belong({op(Ind)}, {k $ (k = 0 .. n - 1)}) then  error "4th argument %1 is invalid", Ind
  else a := cat(seq("0", k = 1 .. n - 1))
  end if;
  Ar, C, F, Kr, p, v, v1 := "", cat(a, Co, a), "HS-history.txt", proc(S::string)
    local k, j;
      for k from length(S) by -1 to 1 do  if S[k] <> "0" then break end if  end do;
      for j to length(S) do  if S[j] <> "0" then break end if  end do;
      S[j .. k]
```

```
    end proc, 0, 0, 1;
  while `if`(R = 1, v, p) < m do
    for k to length(C) - n + 1 do
      d := modp(add(parse(C[k + t]), t = Ind), q);  Ar := cat(Ar, "" || d)
    end do;
    v := Search3(Ar, {Co});   v := `if`(v = [], 0, nops(op(v)) - 1);
    if R=1 then `if`(0 < v, `if`(nargs=7, writeline(F, cat("", p+1, "; ", v, "; ", length(Ar), ": ", Ar)),
      NULL), NULL), assign('p' = p + 1,  'C' = cat(a, Ar, a), 'Ar' = "")
    else
      p := p + 1;  if v1 < v then print(v, p); v1 := v end if;  C := cat(a, Ar, a);  Ar := ""
    end if
  end do;
  if R = 1 then
    if nargs = 7 then WARNING("HS-history has been saved in datafile <%1>",
      cat(currentdir(), "\\", F)), close(F), p, v   else p, v
    end if
  end if
end proc;
```

```
> HS1B("121312311113223", 5, 4, 19, [0, 1, 4], 1);   ⇒   736, 19
> HS1B("12113123133112213211123", 6, 4, 1020, [0, 3], 2);
                                        2, 16
                                        4, 80
                                        8, 240
                                       16, 496
                                       32, 1008
> HS1B("123", 5, 4, 8, [0,1,4], 1, 66);        ⇒   61, 12
Warning, HS-history has been saved in file <C:\Program Files\Maple 10\HS-history.txt>
Содержимое файла «C:\Program Files\Maple 10\HS-history.txt»:
1; 1; 7: 1231313
2; 1; 11: 12322230003
3; 1; 15: 123313000120033
4; 1; 19: 1230002000201210323
5; 1; 23: 123131100200103121031113
6; 1; 27: 123222100010323230020220203
7; 1; 31: 123313200320330101133202001223 3
8; 3; 35: 123000000002020202000001230202012 3
9; 3; 39: 123131300000202202022220123111123011313
10; 1; 43: 123222300030202020000000121202101202221000 3
11; 1; 47: 123313000120231202222000121331023113103003000 33
12; 3; 51: 123000200020323012100000321020003230123012303230323
13; 3; 55: 123131100200301323013310321333121233232103212302303231 13
14; 1; 59: 123222100010121210020220122022103222100210121012103202002 03
15; 1; 63: 12331320032013230331120232033212113120012031210121211112023223 3
16; 3; 67: 123000000000000000000000202000002020000000000001230000020200000123
=================================================================
60; 7; 243: 123000200020323012100000123020001210321032101210200000202000323020002000 3
230123000003210202012303210121012102020202000003210002000201210323000003210200032 3
012301230323020000020200012102000200020003230002000203230321000001230202032103210 3
230323
=================================================================
```

Выше представлен как исходный текст процедуры ***HS1B***, так и примеры ее применения для анализа динамики ***самовоспроизводящихся*** по Муру конечных ***КФ*** в классических ***1-ОС***. Для понимания принципов реализации и функционирования ***HS1B***-процедуры вполне достаточно знакомства с пакетом ***Maple*** в объеме наших книг [97-118]. При этом, читателей, имеющих дело с программированием в среде ***Maple***, могут заинтересовать и используемые в процедуре приемы, в частности, организации ветвления вычислительных процессов в циклических конструкциях. Процедура ***HS1B*** обрабатывает основные ошибочные и аварийные ситуации, и находится в нашей библиотеке процедур и модулей для ***Maple*** релизов ***6 – 11*** [118,545]. Основные функциональные возможности ***HS1B***-процедуры сводятся к следующему. Процедура ***HS1B*** располагает шестью обязательными формальными аргументами и одним необязательным, а именно:

- Co – произвольная конечная ***КФ***, определенная в алфавите ***A={0,1, ... ,a-1}***;

- n – целое число, определяющее размер шаблона соседства классической ***1-ОС***;

- q – целое число, определяющее мощность алфавита ***A*** структуры; ***q ≡ a***;

- m – целое число, определяющее число копий по Муру ***КФ Co*** или число шагов ***1-ОС***;

- Ind – индекс соседства структуры, определяемый в виде $[0 \le j_1 < j_2 < ... < j_p \le n-1]$;

- R – целое число, определяющее режим выполнения процедуры; ***R={1|2}***.

Для классической ***1-ОС*** с алфавитом внутренних состояний ***A={0,1,2, ... ,a-1}*** ***(q=a)*** и индексом соседства $Ind=[0 \le j_1 < j_2 < ... < j_p \le n-1]$ вызов процедуры в режиме ***R=1*** обеспечивает возврат двухэлементной последовательности, чей первый элемент определяет номер шага структуры, на котором из ***КФ Co*** была сгенерирована конфигурация, содержащая ***m*** копий начальной ***Co***-конфигурации, тогда как второй – число этих копий. При этом, использование в данном режиме необязательного ***7-го*** фактического аргумента (*произвольное **Maple**-выражение*) позволяет сохранять историю генерации последовательностей конфигураций из ***КФ Co*** в файле данных с именем ***"HS-history.txt"***, располагающемся в текущем каталоге сеанса ***Maple***, как правило, в каталоге ***"C:\\Program Files\\Maple J" (J = 6 .. 11)***. Записи сохраненного файла данных имеют следующий формат, а именно:

$$t;\ m;\ L:\ <конфигурация\ C_t = C_o\tau^{(n)t}\ (t=1,2,3,\ ...)>$$

где ***t –*** номер итерации ***ГФП*** структуры, ***m –*** число копий по Муру ***КФ*** C_o, ***L –*** длина ***КФ*** C_t и, наконец, сама конечная конфигурация C_t.

Тогда как вызов процедуры ***HS1B*** в режиме ***R=2*** обеспечивает вывод на печать последовательности пар, чьи первые элементы определяют номера ***t*** итераций ***ГФП*** структуры, в которых из ***КФ Co*** были сгенерированы конфигурации, содержащие отмеченные вторыми элементами количества копий начальной ***Co***-конфигурации. При этом, в отличие от предыдущего режима, второй ***m***-аргумент определяет число итераций ***ГФП*** структуры, в процессе которых и отыскиваются копии по Муру начальной ***КФ Co*** и найденное количество копий выводится в возрастающем порядке с привязкой к шагам итерации.

В процессе экспериментирования с процедурой ***HS1B*** был получен ряд довольно интересных результатов относительно самовоспроизводящихся конечных ***КФ***, в частности:

* при росте числа ведущих переменных индекса соседства классической ***1-ОС*** растет и плотность (*отношение общего числа сгенерированных копий за **t** итераций **ГФП** структуры к **t***) генерируемых копий для каждой начальной конфигурации $Co \in C(A,1,\phi)$;

* независимо от начальной ***Co***-конфигурации возрастающая последовательность числа копий по Муру ***КФ Co*** имеет вид 2^k ***(k=1,2, ...)*** при индексе соседства ***X={0 ≤ j1 < j2 ≤ n-1}*** и значениях ***a***, имеющих представление следующего вида 2^p ***(p=1,2,3, ...)***;

* при индексе соседства ***X={0 ≤ j1 < j2 ≤ n-1}*** классической ***1-ОС*** в целом ряде случаев возможно установливать весьма интересные формульные зависимости, связывающие шаг

t итерации **ГФП**, число копий по Муру начальной конфигурации $C_o \in C(A,1,\phi)$, содержащихся в конфигурации $C_t = C_o\tau^{(n)t}$, и разность $j_2 - j_1$.

С другими интересными свойствами ***обобщенного класса линейных ОС-***моделей, характеризуемых свойством ***универсальной воспроизводимости*** по Муру конечных конфигураций, можно ознакомиться в [54-56,536]. Между тем, было бы весьма желательно получить некоторые определяющие характеристики класса обобщенных линейных классических ***ОС-***моделей в целом. В этом направлении определенный интерес представляет нижеследующий основной результат, используемый и в других целях [88,90].

Хорошо известно [88], что целый ряд свойств, присущих **ГФП** $\tau^{(n_j)}$ (*нескольким либо всем*), наследуется и **ГФП** $\tau^{(n)}$, являющейся их композицией следующего вида, а именно:

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\tau^{(n_2)}\tau^{(n_3)} \ldots \tau^{(n_j)} \ldots \tau^{(n_p)}; \quad n = \sum_{j=1}^{p} n_j - (p-1); \quad 2 \le n_j < n; \quad j = 1..p \qquad (\delta)$$

и наоборот. Например, если **ГФП** $\tau^{(n)}$ обладает неконструируемостью ***НКФ-***типа, этим свойством будет обладать по меньшей мере и одна из **ГФП** $\tau^{(n_j)}$, составляющих любую допустимую ее декомпозицию (δ). Некоторые другие полезные свойства подобного рода рассмотрены в настоящей книге, другие могут быть найдены в [88]. Таким образом, мы получаем естественный механизм конструирования более сложных **ГФП** из менее сложных, чьи композиции будут в результате давать требуемой сложности **ГФП** и наследующей необходимые свойства, присущие некоторым или всем **ГФП** $\tau^{(n_j)}$, составляющим композицию для **ГФП** $\tau^{(n)}$. В данном контексте рассмотрим вопрос конструирования на основе *композиционного* подхода классических структур, обладающих свойством ***универсальной*** воспроизводимости по Муру конечных ***КФ***, принципиально отличных от уже ставшего классическим примера *линейных* структур, чьи ***ЛФП*** определяются как $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, \ldots ,x_n) = \sum_j x_j \ (mod\ a)$. В качестве иллюстрации приведем простейший пример. Для композиции выбираем бинарную ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$ и ***ЛФП***, определяемой формулой $\sigma^{(2)}(x_o,x_1) = x_o + x_1 \ (mod\ 2)$. Несложно убедиться, что композиция $\tau^{(3)} = \tau^{(2)}\ \tau^{(2)}$ двух **ГФП**, определяемых указанной ***ЛФП***, в результате дает новую, более сложную **ГФП** $\tau^{(3)}$, чья ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$000 \to 0 \quad 001 \to 1 \quad 010 \to 0 \quad 011 \to 1 \quad 100 \to 1 \quad 101 \to 0 \quad 110 \to 1 \quad 111 \to 0$$

Показано, что данная **ГФП** обладает неконструируемостью типа ***НКФ-1*** при отсутствии ***НКФ***. Более того, бинарная ***1-ОС с*** данной **ГФП** и индексом соседства $X=\{-1,0,1\} \equiv \{0,1,2\} \equiv \{-2,-1,0\}$ обладает свойством ***универсальной*** *воспроизводимости* конечных конфигураций в смысле Мура. Более того, многочисленные компьютерные эксперименты с последующим теоретическим анализом позволили сформулировать следующее утверждение [88], а именно: ***Глобальная функция перехода*** $\tau^{(n)}$, ***заданная в алфавите*** $A=\{0,1, \ldots, a-1\}$, ***обладает свойством универсальной воспроизводимости конечных конфигураций в смысле Мура, если все ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, ***составляющие ее композицию*** (δ), ***обладают указанным свойством универсальной воспроизводимости конечных конфигураций.***

При конструирования новых ***1-***мерных **ГФП** $\tau^{(n+m-1)}$, обладающих упомянутым свойством ***универсальной*** в смысле Мура воспроизводимости конечных ***КФ***, на основе композиции более простых **ГФП** $\tau^{(n)}$ и $\tau^{(m)}$, обладающих тем же свойством, достаточно полезным оказывается следующее соотношение, а именно: $\tau^{(n+m-1)} = \tau^{(n)}\tau^{(m)} = \tau^{(m)}\tau^{(n)}$. В основе доказательства данного утверждения лежат нижеследующие достаточно прозрачные соотношения (*не нарушая общности для* ***1-****мерного случая*), а именно:

$$\sigma_1^{(n+m-1)}(x_1, x_2, ..., x_{n+m-1}) = \sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{j=t}^{t+n-1} x_j \pmod a\right) \pmod a$$

$$\sigma_2^{(n+m-1)}(x_1, x_2, ..., x_{n+m-1}) = \sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=t}^{t+m-1} x_j \pmod a\right) \pmod a$$

$$(\forall < x_1 x_2 \ldots x_{n+m-1} >)(\sigma_1^{(n+m-1)}(x_1, x_2, ..., x_{n+m-1}) = \sigma_2^{(n+m-1)}(x_1, x_2, ..., x_{n+m-1}))$$

$$x_j \in A = \{0, 1, ..., a-1\}; \quad j = 1..n+m-1$$

При этом, в качестве ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и $\tau^{(m)}$ могут выступать либо ***линейные*** *(в вышеотмеченном контексте)* функции, или их композиции. Более того, можно показать, что в результате композиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и $\tau^{(m)}$ получаем ***ГФП*** $\tau^{(n+m-1)}$, соответствующая которой ***ЛФП*** является симметричной. Таким образом, среди ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***(n ≥ 3)*** существуют структуры, отличные от линейных и обладающие свойством ***универсальной*** в смысле Мура воспроизводимости конечных ***КФ.*** В данном направлении имеет место следующий достаточно интересный результат, имеющий ряд важных приложений [88,90].

<u>Теорема 40</u>. Множество P всех линейных классических 1-ОС с алфавитом A={0,1,2,...,a-1} внутренних состояний единичного автомата и ГФП $\tau^{(n)}$ ***(n≥2) совместно со множеством всех структур, чьи ГФП образованы композицией глобальных функций структур из P, образуют полугруппу относительно свойства универсальной в смысле Мура воспроизводимости конечных конфигураций.***

Смысл данного результата состоит в том, что композиция линейных ***ГФП,*** обладающих свойством ***универсальной*** воспроизводимости по Муру, вновь дает ***ГФП*** из того же класса**,** т.е. ***линейность*** не является, как оказалось, довольно жестким требованием**.** Более того, данный результат обобщаем и на случай классических ***d-ОС (d ≥ 2).*** Более специальные вопросы динамики линейных классических ***ОС-***моделей рассмотрены в работах [5, 54-56,140,160,283,284], а также будут представлены ниже. Целый ряд весьма интересных свойств линейных классических ***ОС-***моделей исследовался и японскими математиками [124] посредством алгебраических методов с использованием понятий *аддитивной* группы и *коммутативного* кольца, а также понятий и методов динамических систем. В работе [140] ***L-***класс линейных классических ***ОС-***моделей исследовался средствами *линейной* алгебры. До сих пор не удалось обнаружить отличного от представленного теоремой ***40*** другого множества *классических* ***ОС-***моделей *(кроме приводимой ниже интересной гипотезы)*, обладающих свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура. Однако удалось получить общую характеристику такого класса структур [75], тесно связанную с проблемой ***неконструируемости*** в классических ***ОС-***моделях.

<u>Теорема 41</u>. Необходимым (но не достаточным) условием обладания классической d-ОС (d≥1) свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных конфигураций является наличие для нее неконструируемости типа НКФ-1 при отсутствии в ней неконструируемости типов НКФ и НКФ-3.

Данный результат представляет собой своего рода тест *(необходимое условие)* для проверки классических ***ОС-***моделей на предмет обладания ими свойством ***универсальной*** воспроизводимости, а также иллюстрирует важный аспект взаимосвязи максимальной конструируемости и неконструируемости в классических ***ОС-***моделях. При этом, результат теоремы ***41*** позволяет получить решение следующего весьма важного вопроса, связанного также с конструктивными возможностями ***ОС-***моделей**:** ***может ли классическая ОС-модель удваивать любую конечную КФ, заданную в том же самом А-алфавите?***

Занимаясь вопросами поиска математического аппарата, изоморфного развивающейся биологической организации, нами были предложены в этом качестве параллельные τ_n-

грамматики и ***A*-**алгоритмы**,** а также проведен их анализ с точки зрения биологических интерпретаций [1,3-5,33,46,54-56,88]. В частности, исследовался логический парадокс Розена, связанный с феноменом самовоспроизведения в формальных развивающихся системах. Суть данного парадокса сводится к тому, что модели самовоспроизведения должны включать как собственно саму систему воспроизведения, так и некоторое специфическое окружение ***(****среду****)*****.** Например, алгоритмы ***Маркова,*** определенные в некотором ***A*-**алфавите, не могут удваивать произвольное конечное слово в том же алфавите**.** Вполне резонно предположить, что подобный результат имеет место как для τ_n**-,** так и для ***A*-**алгоритмов. Относительно ***A*-**алгоритмов показано [3,5], что проблема удвоения слов решается путем введения одного дополнительного символа $b \notin A$**.** Более того, детальные исследования в этом направлении позволили сформулировать следующую весьма важную гипотезу**,** представляющую большой теоретический интерес**.**

Пусть ***P*** будет продукцией над конечным словом ***s*** в некотором конечном алфавите ***A*,** которая перерабатывает данное слово в новое ***s*`-**слово согласно некоторого алгоритма, использующего исключительно ***A*-**алфавит. Схема ***R*** представляет собой конечное множество P_k**-**продукций ***(k=1..n)*** совместно с алгоритмом их применения к любому ***s*-**слову в ***A*-**алфавите. Тогда ***F(R,A)*** будем называть *формальной системой* в ***A*-**алфавите со схемой ***R*.** В данной терминологии данная гипотеза принимает следующий вид**: *не существует формальной системы F(R,A), удваивающей произвольное конечное слово в A-алфавите*.** Гипотеза остается открытой и ее решение в общем случае представляется нам достаточно сложным, между тем, для случая классических ***OC*-**моделей данная проблема имеет решение в том смысле, что отрицательное ее решение получено, а именно.

<u>Теорема 42</u>. Не существует классической OC-модели с произвольными A-алфавитом и индексом соседства, удваивающей каждую конечную конфигурацию, заданную в том же самом конечном A-алфавите.

Данный результат является непосредственным следствием более общего результата теоремы ***41,*** устанавливая своего рода ограничение на универсальную воспроизводимость конечных ***КФ*** в классических ***OC*-**моделях. Из результатов раздела ***6.5*** можно убедиться в возможности решить данную проблему в среде классической ***1-OC*** с ***A*-**алфавитом**,** который расширен только на один символ. Доказательство является неконструктивным и читателю в качестве весьма интересного упражнения рекомендуется определить классическую ***1-OC*** с алфавитом $A^*=A\cup\{\alpha\}$ $(\alpha \notin A)$**,** удваивающую произвольную конечную конфигурацию**,** заданную в том же самом конечном ***A*-**алфавите.

Рассматривая универсальную воспроизводимость как максимальные конструктивные возможности классических ***OC*-**моделей по генерации ими конечных ***КФ*,** интересно не только попытаться выявить новые классы структур с таким свойством, но и исследовать классы структур, обладающих таким ***(****или подобным ему****)*** свойством в значительной мере. Так, был определен [54] класс ***G*** структур с *небинарным* алфавитом и *связным* шаблоном соседства размера ***n*,** для которых каждая сплошная ***(****не имеющая внутри себя* ***0*-****состояний покоя****)*** конечная ***КФ*** размера $m \geq n$ является самовоспроизводящейся по Муру. Еще один класс ***LG*** структур, ***ЛФП*** которых получены на основе ***ЛФП*** структур из классов ***L*** и ***G*,** обладают весьма высокой степенью воспроизводимости конечных ***КФ*.** Новые интересные классы структур, обладающих достаточно ***высокой*** степенью воспроизводимости конечных ***КФ*,** можно получать на основе композиций конечного числа ***ГФП*** из указанных классов ***L*** и ***LG*.** Исследования на основе специальной симуляционной программы для ***ЕС ЭВМ*** [85]**,** показали, что такого типа структуры обладают весьма высокими воспроизводящими показателями конечных ***КФ*** определенных типов.

Еще один класс ***OC*-**моделей, обладающих достаточно высокой степенью воспроизводимости конечных ***КФ*,** можно определить на основе специальной алгебраической систе-

мы, введенной нами для полиномиального представления ***a-***значных логических функций [3,5]. Изучение целого ряда классов *дискретных параллельных* динамических систем ***(ДПДС),*** включая ***ОС-***модели, тесно связано с исследованием свойств ***ЛФП,*** представляющих собой ***a-****значные логические функции* ***(a-ЗЛФ).*** Среди различных подходов к исследованию таких функций особое место занимает алгебраический подход, при котором каждая ***a-ЗЛФ*** может быть представлена полиномом по ***(mod a)*** максимальной степени ***n(a-1)*** над полем ***A,*** и наоборот, где ***a-ЗЛФ*** есть любое отображение $R^{(n)}: A^n \to A$**.** Однако в случае *составного* числа ***a*** далеко не все ***a-ЗЛФ*** могут быть представлены в такой полиномиальной форме, а точнее «*почти все*» функции не имеют такого полиномиального представления. А так как ***A-***алфавит в классической ***ОС-***модели может быть произвольным, то возникает проблема распространения алгебраического метода исследований ***ЛФП*** на общий случай ***A-***алфавита внутренних состояний. В связи с этим, возникает интересная и важная со многих точек зрения проблема**: *можно ли определить алгебраическую систему (AC), которая допускала бы полиномиальное представление a-ЗЛФ в A-алфавите при составном a-числе подобно случаю простого a-числа*.** В связи с этим, нами была определена ***AC,*** в которой «*почти все*» ***a-ЗЛФ*** имеют полиномиальное представление для случая составного ***a-***модуля [84]. Предлагаемая ***AC*** определяется следующим образом. Выбирается алфавит системы A_a=***{0,1,...,a-1}*** и на нем определяется обычная бинарная операция сложения по ***(mod a).*** Одновременно на A_a определяется бинарная операция ***#-***произведения согласно таблице умножения ***(***табл. ***5).*** Легко убедиться в том, что операция ***#-***произведения на множестве $A_a \backslash \{0\}$ образует *конечную циклическую* группу $A^{\#}$ степени ***(a - 1).*** Относительно определенной таким образом ***AC*** имеет место следующий основной результат, формулируемый теоремой ***43*** [5,84,88].

Таблица 5

#	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	a-6	a-5	a-4	a-3	a-2	a-1
0	0	0	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	a-4	a-3	a-2	a-1	0	a-1
2	0	2	3	4	5	6	.	.	.	.	.	a-3	a-2	a-1	0	a-1	1
3	0	3	4	5	6	7	.	.	.	.	.	a-2	a-1	0	a-1	1	2
4	0	4	5	5	7	8	.	.	.	.	.	a-1	0	a-1	1	2	3
5	0	5	6	7	8	9	.	.	.	.	.	0	a-1	1	2	3	4
6	0	6	7	8	9	10	.	.	.	.	.	a-1	1	2	3	4	5
....	...	...	...	...	..	...	.	.	.	.	.	...	...	....	....	...	....
....	...	...	...	...	..	...	.	.	.	.	.	...	...	....	....	...	....
a-3	0	a-3	a-2	a-1	1	2	.	.	.	.	.	a-9	a-8	a-7	a-6	a-5	a-4
a-2	0	a-2	a-1	1	2	3	.	.	.	.	.	a-8	a-7	a-6	a-5	a-4	a-3
a-1	0	a-1	1	2	3	4	.	.	.	.	.	a-7	a-6	a-5	a-4	a-3	a-2

<u>Теорема 43</u>. Существует алгебраическая система <A_a; +; #>, в которой «почти каждая» a-ЗЛФ, определенная в A_a-алфавите (a – составное), представима в форме полинома $\mathbf{P}_{\#}(n)$ ***по (mod a), где:***

1) (+) – традиционная операция сложения по (mod a);

2) (#) – операция произведения, определяемая в соответствии с таблицей 5;

$$P_{\#} = \sum_{j=1}^{a^n-1} c_j \# X_1^{d_{j_1}} \# X_2^{d_{j_2}} \# \ldots \# \# X_n^{d_{j_n}} \pmod a - \text{a polynom}$$

3) ***which is not containing dyadic expressions of the following kind :*** ***(34)***

$$p_d \# X_j^d + B_d \# X_j^{a-d-1} \quad (0 \le d_{i_j} \le a-1;\ \sum_{j=1}^{n} d_{i_j} \ge 1;\ X_j,\ c_j \in A_a;$$

$$p_d + B_d = a;\ p_d, B_d \ge 1;\ X_j^p = X_j \# X_j \# \ldots \# X_j;\ j = 1..n;\ j = 1..a^n - 1;$$

$$\leftarrow - - - p - - - \rightarrow \quad d = 1..[(a-2)/2]$$

Данный результат сыграл важную роль в исследованиях *ДПДС* для случая алфавита A_a ***(a - составное)*** и позволил получить целый ряд весьма интересных результатов по ***ТОС***-проблематике, часть из которых рассматривается ниже. При этом, теорема ***43*** дает вполне удовлетворительное аналитическое представление ***a-ЗЛФ*** в случае *составного* ***a***-модуля. Например, даже такая простая логическая функция как:

$$R_1(x)=\begin{cases}0, & if \quad x=0;\\ 2, & if \quad x=1;\\ 1, & else\end{cases}$$

определенная в алфавите A_6, не может быть представлена полиномом по ***(mod 6)***, тогда как в ***АС*** $<A_6; +; \#>$ ее представление имеет следующий простой вид: $R_1(y)= P_{\#}(1) = y^2 + y^3 \ (mod\ 6)$. Целый ряд других интересных примеров подобного характера, а также сравнительный анализ определенной выше ***АС*** и классической алгебраической системы вида $<A_a; +; x>$, в которой операции ***(+)*** и ***(x)*** являются соответственно обычными бинарными операциями сложения и умножения по ***(mod a)***, можно найти в [5,56,84,88].

На основе введенной выше ***АС*** можно определить еще один интересный тип классических ***ОС***-моделей, обладающих достаточно высокой степенью воспроизводимости конечных ***КФ***. В свете вышесказанного определяем для классической ***1-ОС ЛФП*** следующими параллельными подстановками, а именно:

$$x_1x_2x_3 \dots x_n \to x_1^1 = 0, \quad if \quad (\forall k)(x_k = 0)$$
$$x_1x_2x_3 \dots x_n \to x_1^1 = \prod_{k=1}^{n} \#\, \delta(x_k), \quad else; \quad x_1^1, x_k \in A \quad (k = 1..n) \qquad (35)$$
$$\delta(x_k)=\begin{cases}x, & if \quad x \neq 0\\ 1, & else\end{cases}$$

где ***#***-произведение определяется согласно табл. ***5***. Рассмотрим при сделанных предположениях ***S(a,m)***-множество всех конечных ***КФ***, имеющих вид $c=\square x_1x_2x_3 \dots x_m\square$ при $x_k \in A\backslash\{0\}$ ***(j=1..m)***. Очевидно, мощность таким образом определенного ***S(a,m)***-множества равна $(a-1)^m$, тогда как мощность множества $\Sigma(a,m)$ всех конечных ***КФ*** ***m***-длины есть $(a-1)^2 * a^{m-2}$. Следовательно, плотность множества ***S(a,m)*** относительно $\Sigma(a,m)$-множества определяется выражением $\Xi(a,m)=S(a,m)/\Sigma(a,m)=(1-1/a)^{m-1}$, асимптотическое поведение которого характеризуется следующими определяющими соотношениями, а именно:

$$\lim_{m \to \infty} \Xi(a,m) = 0 \qquad \lim_{m \to \infty} \Xi(a,m) = 1$$
$$\lim_{m \to \infty} \Xi(a,m) = \lim_{a \to \infty} \Xi(a,m) = e^{-1/p}, \quad если \ \lim_{m,a \to \infty} a/m = p = const \qquad (36)$$

Из данных соотношений можно убедиться, что в ряде важных случаев плотность ***S(a,m)***-вполне достаточна, чтобы рассматривать составляющие его конечные ***КФ*** *самовоспроизводящимися*, определяя новый класс ***ОС***-моделей, в значительной степени обладающих свойством воспроизводимости конечных ***КФ***. На основе детального анализа параллельных подстановок (**35**) можно показать, что соответствующая им ***ЛФП (ГФП)*** классической ***ОС***-модели обладает ***НКФ*** и ***НКФ-3*** уже видов соответственно $c_b=010$ и $c_1=\square 1\square$ при отсутствии неконструируемости типа ***НКФ-1***; тогда как каждая ***КФ*** $c \in S(a,m)$ является в такой структуре самовоспроизводящейся в смысле Мура. Этот результат не противоречит теореме ***41***, ибо рассматриваемый класс ***ОС***-моделей характеризуется наличием для них свойства *существенной*, а не универсальной воспроизводимости по Муру конечных ***КФ***. Из анализа целого ряда классических структур, обладающих в значительной мере свойством воспроизводимости по Муру конечных ***КФ***, можно предположить, что *необхо-*

димое условие сводится к тому, чтобы ***ЛФП*** классической ***ОС-***модели, обладающая данным свойством, определялась параллельными подстановками следующего общего вида

$$x_1x_2x_3 \ldots\ldots x_n \Rightarrow x^*_1 = \Phi(x_1x_2x_3 \ldots\ldots x_n) \qquad x_k \in A \;\; (k = 1 \,..\, n)$$

где **Φ-**функция базируется только на операциях, образующих на ***A-***множестве или его подмножествах конечные циклические группы соответствующей степени. Дальнейшее изучение структур указанного типа позволит, на наш взгляд, существенно обобщить и расширить имеющиеся на сегодня в этом направлении результаты. Наряду с продолжением изучения классических ***ОС-***моделей, обладающих свойством универсальной воспроизводимости по Муру, целесообразно определить ряд других интересных с теоретической и прикладной точек зрения классов структур, наделенных некоторым достаточно общим присущим им свойством и охарактеризовать эти классы в терминах новых либо ранее уже исследованных понятий и категорий.

В свете данного вопроса весьма интересным нам представляется исследование ***CSA-***класса ***ОС-***моделей с *симметрическими* ***ГФП (ЛФП).*** Проведенный анализ целого ряда ***1-ОС*** из ***CSA-***класса на основе как сугубо теоретических подходов, так и посредством компьютерного исследования в среде пакета ***Mathematica*** [93] позволил сформироваться предположению, что среди структур ***CSA-***класса существует бесконечное множество таких, которые обладают свойством или универсальной по Муру, или существенной воспроизводимости конечных ***КФ.*** При этом, вполне убедительной нам представляется следующая интересная гипотеза**:** ***каждая классическая 1-ОС с симметрической ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***(*** $n \geq 2$***), не обладающая неконструируемостью типа НКФ (НКФ-3) при наличии для нее НКФ-1, обладает свойством универсальной или существенной по Муру воспроизводимости конечных КФ.*** Следовательно, можно предположить, что в основе *существенной воспроизводимости* конечных ***КФ*** в классических ***ОС-***моделях в значительной мере лежит *симметричность* ***ГФП*** и отсутствие для них неконструируемости ***НКФ-***типа. Нетрудно убедиться, что множество ***CSA*** всех таких ***ГФП замкнуто*** относительно операции *композиции*, а в более общей формулировке гипотеза принимает следующий основной вид.

<u>Гипотеза</u>. Каждая классическая d-ОС ($d \geq 1$***) с симметрической ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***(*** $n \geq d+1$***), обладающая НКФ-1 при отсутствии для нее НКФ и НКФ-3, обладает свойством универсальной либо существенной воспроизводимости по Муру конечных конфигураций.***

В случае доказательства данной гипотезы мы получаем хорошо *определенный* ***CSA-***класс ***ОС-***моделей, обладающих указанным общим свойством**;** при этом, в одномерном случае такой класс является рекурсивным**,** т.е. функция определения принадлежности произвольной одномерной ***ОС-***модели ***CSA-***множеству рекурсивна и для нее существует конструктивный разрешающий алгоритм. Доказательство гипотезы позволило бы дать весьма интересную характеристику класса ***ОС-***моделей, обладающих свойством универсальной воспроизводимости конечных конфигураций в смысле Мура. Следует отметить, что определенным подтверждением гипотезы является и результат теоремы ***40.*** Согласно теоремы ***4*** доля классических ***d-ОС,*** не обладающих ***НКФ (НКФ-3),*** стремится к ***1*** при росте размера ***ШС*** и/или мощности ***A-***алфавита структуры**.** Между тем**,** класс ***ОС-***моделей**,** удовлетворяющих условиям вышеуказанной гипотезы вполне представителен**.** Так**,** уже для классических бинарных ***1-ОС*** мощность данного класса не менее $N(n) = 2^{2^{n-3}}$**;** данную оценку можно получить**,** рассматривая классические ***1-ОС, ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ которых задаются следующими определяющими соотношениями, а именно**:**

$$\begin{cases} (\forall < x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} >)(\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \neq \sigma^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^*_n)) \\ (\forall < x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n >)(\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sigma^{(n)}(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)) \\ x_1, x^*_k \in A = \{0, 1, 2, \ldots, a-1\}; \;\; k = 1..(n-1); \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что определенные таким образом классические ***1-ОС*** обладают полностью *симметричными* ***ЛФП*** и не обладают ***НКФ*** и ***НКФ-3*** [90]. Нетрудно убедиться, что общее число допустимых линейных ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_n)=\sum\beta_k x_k \ (mod\ a);\ \beta_k, x_k \in A;\ (k=1..n)$ для случая ***1-ОС*** с ***ШС*** размера ***n*** составляет $M(n)=a^{n-2}(a-1)^2$**.** В случае классических ***1-ОС*** для каждого целого $a>1$ существует ***n-***размер ***ШС,*** начиная с которого число структур с *нелинейными* симметричными ***ЛФП,*** не обладающими ***НКФ (НКФ-3),*** будет расти быстрее числа структур с *линейными* симметричными ***ЛФП*** [90]**.** В частности, для бинарных ***1-ОС*** $M(n)=2^{n-2}$ и указанное соотношение имеет силу, начиная уже с ***n=5.*** На первый взгляд, класс ***ОС-***моделей, определяемых полностью симметричными ***ЛФП,*** не обладающими ***НКФ (НКФ-3)*** при наличии для них ***НКФ-1,*** исчерпывает всевозможные структуры, характеризуемые свойством ***универсальной воспроизводимости*** конечных конфигураций по Муру. Однако, как будет показано ниже, данное утверждение скорее всего неверно и класс структур с указанным свойством может оказаться немного шире.

Для целей компьютерного исследования *динамики* ***1-***мерных классических ***ОС-***моделей с симметрическими ***ЛФП (ГФП)*** была создана простая модульная ***Math-***процедура, позволяющая определять воспроизводимость в смысле Мура произвольной конечной ***КФ*** в зависимости от локальной функции перехода. Данная ***HS***[***LTF***, ***CF***, ***P***]**-**процедура имеет три формальных параметра, позволяющие определять фактические значения для**:** ***LTF*** **–** локальной функции перехода, задаваемой параллельными подстановками**;** ***CF*** **–** начальной конечной ***КФ*** из ***C(A,ϕ)-***множества**;** ***P*** **–** числа копий начальной ***КФ*.** Выполнение данной ***Math-***процедуры в случае *успешного* завершения анализа возвращает исследуемую на воспроизводимость конечную ***КФ*** с количеством ее копий**,** а также требуемое для этого количество шагов анализируемой структуры и финальную ***КФ,*** на которой достигнуто заданное ***P-***число копий. В приводимом примере рассмотрены фрагменты применения ***HS-***процедуры для исследования *динамики* конечных ***КФ*** в классических ***1-ОС*** с ***ЛФП,*** определяемыми списками параллельных подстановок ***LTF2*** и ***LTF3*** соответственно в алфавитах ***B***={***0,1***} и ***A***={***0,1,2***}**.** Анализ показывает, что структуры**,** определяемые такими ***ЛФП,*** обладают ***НКФ-1*** при отсутствии для них ***НКФ (НКФ-3).*** Однако, следует иметь в виду, что эта ***Math-***процедура предполагает использование достаточно производительных классов персональных компьютеров.

```
HS[LTF_List, CF_String, P_Integer]:= Module[{n=0, k, C1, Co, Cfo, CFf, H, t=0, Z},
n=StringLength[First[First[LTF]]]; C1= ""; Co= "0"; Do[C1=C1<>Co, {k, 1, n-1}];
      CFo=C1<>CF<>C1; CFf=""; Label[St]; T1=TimeUsed[];
      Do[CFf=CFf<>StringReplace[StringTake[CFo, {k, k+n-1}], LTF],
      {k,1,StringLength[CFo]+1-n}]; t++; T2=TimeUsed[];
      If[T2-T1>=15, Goto[Q], 7]; Goto[C]; Label[Q];
Print["Steps: "<>ToString[t]<>"; CFfin: "<>CFf]; Z=Input["Continue(y/n)?"];
If[Z==y, Goto[C], 7]; Return["Job is canceled in step: "<>ToString[t]]; Label[C];
If[H=Length[StringPosition[CFf, CF]]; H>=P, Goto[Fin], CFo=C1<>CFf<>C1; CFf=""];
Goto[St]; Label[Fin]; Print["Initial configuration: "<>CF<>" is "<>ToString[H] <>"-
reproductable!"]; Print["Steps: "<>ToString[t]<>"; CFfin: "<>CFf]]
      LTF3:= {"000"->"0","001"->"2","002"->"1","010"->"2","011"->"1","012"->"0",
      "020"->"1","021"->"0","022"->"2","100"->"2","101"->"1","102"->"0","110"->"1",
      "111"->"0","112"->"2","200"->"1","201"->"0","202"->"2","120"->"0","121"->"2",
      "122"->"1","210"->"0","211"->"2","212"->"1","220"->"2","221"->"1","222"->"0"};
      HS[LTF3, "2122221", 13];
Initial configuration: 2122221 is 18-reproductable!
Steps: 198; CFfin: 21222210021222210021222210021...212222100212222100212222
```

```
LTF2:= {"0000"->"0","0001"->"1","0010"->"0","0011"->"1","0100"->"0",
"0101"->"1","0110"->"1","0111"->"0","1000"->"1","1001"->"0","1010"->"1",
"1011"->"0","1100"->"1","1101"->"0","1110"->"0","1111"->"1"};
HS[LTF2, "11110010111", 3];
```

Initial configuration: ***11110010111*** *is* ***3****-reproductable!*
Steps: **256;** *CFfin*: **111100101110000001110101100101...000011110000000111110010111**

Для понимания принципа реализации и выполнения ***HS***-процедуры вполне достаточно знакомства с пакетом ***Mathematica*** в объеме книги [93]. Экспериментальное исследование динамики конечных ***КФ*** посредством ***HS***-процедуры позволило получить целый ряд весьма интересных типов поведения воспроизводящихся по Муру конечных ***КФ***. В частности, для стуруктуры, определяемой ***ЛФП LTF3***, количества ***N*** копий воспроизводящихся конечных ***КФ*** вычисляются по следующей простой формуле, а именно:

$$N(k)=\begin{cases}2\times 3^{k-1}, & \text{if } k \text{ is odd}\\ 3^{k-1}, & \text{if } k \text{ is even}\end{cases},\quad (k=1,2,3,\ldots)$$

где ***k –*** порядковый номер в последовательности воспроизводящихся конечных ***КФ***. Количество всех симметрических ***1-ОС*** для заданных ***A–***алфавита и ***X–***индекса соседства легко вычисляется по следующей простой формуле, а именно:

$$N(n,a)=a^{(a^n+a^{r(n)}-2)/2};\quad r(n)=\begin{cases}n/2, & \text{if } n \text{ is even}\\ (n+1)/2, & \text{if } n \text{ is odd}\end{cases}$$

Ряд интересных вопросов по динамическим свойствам симметрических ***ГФП*** рассматривается нами несколько ниже. Во множестве ***GSA*** естественно выделяется изолированная относительно операции композиции ***VS***-полугруппа всех *симметрических* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ $(n \geq d+1)$, не обладающих неконструируемостью ***НКФ***-типа. На наш взгляд, именно ***VS***-полугруппа представляет особый интерес в связи с вопросом характеризации ***ОС***-моделей, обладающих свойством универсальной либо существенной воспроизводимости конечных ***КФ***. Для генерации последовательности ***КФ*** $<c_0>[\tau^{(n)}]$ в классических ***1-ОС*** можно использовать ***Math***-процедуру ***HSd***[***L, CF, P***]. Данная ***HSd***[***L, CF, P***]-процедура имеет три формальных параметра, позволяющие определять фактические значения для ***L*** - локальной функции перехода, задаваемой параллельными подстановками; ***CF*** - начальной конечной ***КФ*** из ***C(A,ϕ)***-множества; ***P –*** числа шагов структуры, через которое производится запрос санкции на продолжение процесса генерации последовательности.

```
HSd[L_List, CF_String, P_Integer]:= Module[{n, k, C1, Co, CFo, CFf, H, t=0, z, m=0},
n=StringLength[First[First[L]]]; C1= ""; Co= "0"; Do[C1=C1<>Co, {k, 1, n-1}];
CFo=C1<>CF<>C1; CFf= ""; Print["Initial configuration: "<>CF]; Label[St];
      Do[CFf=CFf<>StringReplace[StringTake[CFo, {k, k+n-1}], L], {k, 1,
StringLength[CFo] + 1 - n}]; t++; m++; If[t>=P, Goto[Q], 49]; Print[ToString[m]<>":
"<>CFf]; Goto[C]; Label[Q]; t=0; Print["Step: "<> ToString[m]<>"; CFm: "<>CFf];
Z=Input["Continue(y/n)?"]; If[z==y, Goto[C], 7]; Return["Work is terminated in step:
"<>ToString[m]]; Label[C];
      CFo=C1<>CFf<>C1; CFf=""; Goto[St]];      HSD[LTF3, "1022", 5]
```

Initial configuration: **1022**
1: 220221
==========
Step: **5; CFm: 21102000012201**
6: 1021011002012022
==========

Step: **15; Cfm: 20120220000000000000000000001021011**
19: 22022100011011200000000000011011200022022 1
Work is terminated in step: 20

В отличие от предыдущей ***HSd-***процедура на основе заданной параллельными подстановками ***(L) ЛФП*** классической ***1-ОС*** из начальной конечной ***CF-КФ*** генерирует последовательность **<*CF*>[$\tau^{(n)}$]**,** запрашивая через каждые ***P-***шагов санкцию на продолжение работы. Для уяснения принципа организации и выполнения процедуры вполне достаточно знакомства с пакетом ***Mathematica*** в объеме книги [93]**.** При этом, следует отметить, что пакет включает ***Math-***модуль «***Cellular.m***»**,** поддерживающий несколько простых функций работы с классическими ***1-ОС (Cellular Automata)***, однако принцип организации вышеприведенных двух ***Math-***процедур представляется нам более эффективным для построения программных средств исследования классических ***1-ОС.*** В настоящее время для целей компьютерного исследования *динамики* классических ***ОС-***моделей в среде пакета ***Mathematica*** нами разработан целый ряд модулей и процедур**.** При этом следует отметить, что последние версии пакета предлагают более развитые встроенные средства для программного симулирования классических ***ОС-моделей*** [536].

Ввиду достаточно сложной динамики уже целого ряда классических ***1-ОС*** даже в случае бинарного ***B-***алфавита внутренних состояний единичных автоматов метод компьютерного моделирования с полным основанием можно отнести к основным составляющим аппарата исследования ***ОС-***моделей. Данный метод позволяет не только эмпирически исследовать динамику ***ОС-***моделей и достаточно эффективно отображать ее визуально, но и предоставляет хорошие возможности на его основе формулировать гипотезы, ряд из которых уже получили теоретическое обоснование**;** другие стимулировали ряд весьма интересных исследований. Наряду с вышеупомянутыми, нами был разработан ряд специальных программных средств различных сложности и назначения для целей компьютерного исследования разнообразных аспектов ***ТОС*** [1,3,5,8,9,54-56,78,79,85,90,97-99, 112,116-118], прежде всего, динамики классических ***1-*** и ***2-***мерных ***ОС-***моделей. В настоящее время в рамках одного из направлений активности ***ТТТ*** разрабатываются программные средства компьютерного исследования ***ОС-***моделей в среде известных математических пакетов ***Mathematica*** и ***Maple,*** которые уже позволили получить целый ряд весьма интересных результатов, гипотез и наметили некоторые пути дальнейших исследований по ***ТОС-***проблематике. В частности, упомянутый метод позволил сформулировать и в значительной мере апробировать весьма интересную *гипотезу* о существовании подполугруппы полугруппы одномерных симметрических ***ГФП,*** не обладающих ***НКФ*** при наличии для них ***НКФ-1,*** для которых имеет место свойство универсальной воспроизводимости конечных конфигураций. В настоящее время данная проблематика исследуется достаточно интенсивно и в этом направлении уже получен целый ряд весьма интересных результатов [90]. Для компьютерного исследования ***ОС-***моделей целым рядом других исследователей были созданы программные симуляторы того или иного назначения и уровня сложности [88,90,167,174,185-187,243,250,253,255,329,399-401,536]**,** часть из которых кратко рассматривается и в разделе ***6.6*** настоящей монографии.

Исследование вопросов самовоспроизводимости в ***ОС-***моделях в ряде случаев сталкивается с проблемами алгоритмической разрешимости. Так, ***А. Лейч*** рассмотрел проблемы самовоспроизведения и фертильности для одного *подкласса* недетерминированных ***ОС-***моделей, используя теорию рекурсивных функций, и доказал их неразрешимость [306]. При этом, во многих случаях степень неразрешимости для *индекс-*множеств рассмотренных им подклассов ***ОС-***моделей оказалась больше единицы. Его доказательство алгоритмической неразрешимости этих проблем базируется на использовании перечислимостей, эквивалентных известным нумерациям ***Геделя.***

Наряду с продолжением изучения классических ***OC-***моделей, обладающих свойством *универсальной воспроизводимости* по Муру**,** весьма целесообразно определить ряд других интересных с теоретической и прикладной точек зрения классов структур, наделенных некоторым общим присущим им свойством и охарактеризовать эти классы в терминах новых или уже исследованных понятий. Так, например, с ***L-***классом линейных классических ***1-OC*** дополнительно можно связать одно интересное свойство, присущее всем структурам класса **–** возможность генерировать строки обобщенного треугольника Паскаля [12]. Несколько подробнее речь об этом будет идти в последней главе книги.

Между тем**,** использование нестандартных подходов позволило выявить ряд достаточно интересных классов ***OC-***моделей, обладающих свойством ***существенной*** воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ.*** В частности, например, определим одну полезную модификацию логической ***XOR-***операции над целыми положительными числами следующим образом**:** ***операция x XOR1 y над двумя целыми положительными числами x, y определяется как побитная XOR-операция без переноса в старшие разряды над бинарными эквивалентами данных чисел; при этом, длина бинарного представления определяется длиной представления максимального числа,*** например**:**

$$12\ XOR119 \equiv \begin{bmatrix} 01011_{12} \\ 10011_{19} \end{bmatrix} \equiv 11000 \equiv 24$$

В частности, для множества чисел {***0,1,2,***3} таблица ***XOR1-***операции определяется нижеследующими таблицами, а именно**:**

XOR1	***000***	***001***	***010***	***011***
000	***000***	***001***	***010***	***011***
001	***001***	***000***	***011***	***010***
010	***010***	***011***	***000***	***001***
011	***011***	***010***	***001***	***000***

XOR1	***0***	***1***	***2***	***3***
0	***0***	***1***	***2***	***3***
1	***1***	***0***	***3***	***2***
2	***2***	***3***	***0***	***1***
3	***3***	***2***	***1***	***0***

Несложно убедиться, что множество ***A={0,1,2,3, …, h} (h=2k+1; k=0,1,2, …)*** относительно ***XOR1-***операции образует конечную аддитивную абелеву группу с нейтральным ***0-***элементом, для которой любой элемент обладает единственным обратным ему элементом, совпадающим с ним самим. В качестве программной реализации ***XOR1-***операции можно использовать процедуру ***&XOR1,*** запрограммированную в среде ***CKA Maple*** [97-118] и обеспечивающую выполнение ***XOR1-***операции над любым конечным множеством положительных целых чисел, задаваемых в качестве фактических операндов.

```
> `&XOR1` := proc()
local a, b, c, k, j;
   if nargs = 0 then error  "factual arguments are missing"  elif
      {seq(type(args[k], 'nonnegative'), k = 1 .. nargs)}  <> {true}  then
      error  "factual arguments must be positive integers"
   elif nargs = 1 then return  args else  c := ""  end if;
   a := map(convert, sort([seq(convert(args[k], 'binary'), k = 1 .. nargs)]), 'string');
   b := [seq(cat("0" $ (k = 1 .. length(a[-1]) - length(a[j])), a[j]), j = 1 .. nops(a))];
   for k to length(b[1])  do
     if type(add(parse(b[j][k]), j = 1..nops(b)), 'odd') then c:=cat(c, "1") else c:=cat(c, "0") end if
   end do;
   convert(c, 'decimal', 'binary')
end proc:
> `&XOR1`(3,1), 3 &XOR1 1, `&XOR1`(19,12,66), 19 &XOR1 12 &XOR1 66;   ⇒  2, 2, 93, 93
> h:= 32:  M:=matrix(h, h, []):  for k to h do for j to h do M[k,j]:= `&XOR1`(k-1, j-1) end do
   end do;  evalm(M);
```

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	21	20	23	22	17	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	22	23	20	21	18	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8	23	22	21	20	19	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6	25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2	29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
21	20	23	22	17	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
22	23	20	21	18	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
23	22	21	20	19	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Выше представлен исходный текст процедуры ***&XOR1*** и примеры ее применения. Так, в частности, вывод таблицы ***XOR1-***операции для множества ***A={0,1, ..., 31}*** позволяет установить ее структурную организацию, представляющую и самостоятельный интерес.

Экспериментально-теоретический анализ классических ***1-ОС*** показал [88], что при сделанных предположениях ***классическая 1-ОС с алфавитом A={0,1,2, ..., h} (h=2k+1; k=0,1, 2, ...), чья ЛФП определяется соотношением вида*** $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_n) = \&XOR1(x_1,x_2, ..., x_n)$, ***обладает свойством существенной воспроизводимости в смысле Мура конечных КФ.***

```
> TestL := proc(S::string, n::posint, m::posint)
local a, b, c, k, j, t;
   c := cat("0" $ (k = 1 .. m - 1));  a, t, b := cat(c, S, c), 0, "";
   do
      for k to length(a) - m + 1 do b:= cat(b, `&XOR1`(seq(parse(a[k + j]), j = 0..m - 1))) end do;
      if n <= nops(Search2(b, {S})) then break  else assign('a' = cat(c, b, c), 't' = t + 1)  end if
   end do;   print(S, n, t)
end proc:
> TestL("221213", 32, 3);  ⇒  «221213», 32, 11
```

В частности, для тестирования данного типа структур может быть использована процедура ***TestL,*** реализованная в среде упомянутой ***CKA Maple*** и чей исходный текст приведен выше. Вызов процедуры ***TestL(S,n,m)*** возвращает исходную строку ***S*** состояний ***ОС***

с ***ШС*** размера ***m,*** количество ***n*** вхождений копий ***S*** в строку, сгенерированную на шаге, указанном третьим значением результата. Проведенные эксперименты показали, что в таким образом определенной классической ***1-ОС*** существует довольно широкий набор типов конечных ***КФ***, обладающих свойством воспроизводимости в смысле Мура. Более того, показано [88,90], что в определенной степени подобная картина имеет место и для случая классических ***2-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура.

Для тестирования произвольных ***1-ОС*** с алфавитом ***A={0,1, ..., a-1}*** ***(2≤ a ≤10)*** и индексом соседства ***X={0,1,2,3, ..., n-1}*** могут оказаться достаточно полезными нижеследующие две процедуры, реализованные в программной среде пакета ***Maple*** [97-118]**.** Так, процедура ***Θ(G,x1,...,xn)*** обеспечивает бинарную **Θ-**операцию ***Θ(G,x,y)=Θx,y,*** заданную нижеследующей операционной таблицей, над конечным кортежем операндов **–** элементов ***A-***алфавита. Вызов ***Θ(G,x1,...,xn)*** процедуры обеспечивает возврат результата применения операции **Θ** к операндам $x_1,...,x_n$ $\{x_j \in A;\ j=1..n\}$. Практически, таблица задается ***G-***массивом размерности ***axa,*** в соответствии с нижеследующей таблицей, а именно**:**

Θ	***0***	***1***	***2***	***.....***	***a-1***
0	$\Theta_{o,o}$	$\Theta_{o,1}$	$\Theta_{o,2}$	***.....***	$\Theta_{o,a-1}$
1	$\Theta_{1,o}$	$\Theta_{1,1}$	$\Theta_{1,2}$	***.....***	$\Theta_{1,a-1}$
2	$\Theta_{2,o}$	$\Theta_{2,1}$	$\Theta_{2,2}$	***.....***	$\Theta_{2,a-1}$
.....	***.....***	***.....***	***.....***	***.....***	***.....***
a-1	$\Theta_{a-1,o}$	$\Theta_{a-1,1}$	$\Theta_{a-1,2}$	***.....***	$\Theta_{a-1,a-1}$

Если количество фактических аргументов менее ***2*** или аргументы, начиная со второго, содержат значения не из ***G-***массива, инициируется ошибочная ситуация, в противном случае возвращается вышеуказанный результат. Тогда как вызов ***TestP(G, S, n, m)*** второй процедуры возвращает количество итераций ***1-ОС*** с индексом соседства ***X={0,1, ..., m-1}***, которые потребовались для генерации из начальной ***КФ S*** состояний-символов из ***A-***алфавита конфигурации, содержащей не менее ***n*** вхождений начальной блочной ***КФ S.*** В случае прерывания выполнения процедуры по ***stop-***клавише при затянувшемся вычислении через глобальную ***VGS-***переменную возвращается количество итераций ***ГФП*** на момент прерывания. Таблица для *бинарной* **Θ-**операции задается в виде массива первым ***G-***аргументом. Наконец, третья процедура ***KrArt(G, n, m, p, h),*** имея первый аргумент ***G*** аналогичным случаю процедуры ***TestP,*** располагает четырьмя дополнительными аргументами для обеспечения тестирования на ***воспроизводимость*** генерируемых псевдослучайным образом начальных ***КФ***, а именно: ***n –*** определяет алфавит ***A={0,1, ..., n-1}*** состояний-символов, ***h –*** индекс соседства ***X={0,1, ..., h-1}***, ***p –*** число вхождений блочной ***КФ*** и ***m –*** максимальная длина тестируемых начальных ***КФ.*** Исходные тексты процедур и примеры их применения представлены ниже. Для понимания организации этих простых процедур вполне достаточно знакомства с ***Maple*** в объеме, например, книг [97-118].

```
> Θ := proc(G::array)
local a, k;
  if nargs = 0 or {seq(belong(args[k], G), k = 2 .. nargs)} <> {true} then
    error "summands are invalid or are missing"
  elif nargs = 2 then return args[2]  else
    a := args[2];
    for k from 3 to nargs do a := G[a, args[k]] end do
  end if;
    a
end proc:
```

```
> TestP := proc(G::array, S::string, n::posint, m::posint)
local a, b, c, k, j, t;
global VGS;
   c := cat("0" $ (k = 1 .. m - 1));
   a, t, b, VGS := cat(c, S, c), 0, "", 0;
   do
      for k to length(a) - m + 1 do b := cat(b, Θ(G, seq(parse(a[k + j]), j = 0 .. m - 1)))
      end do;
      if n <= nops(Search2(b, {S})) then break
      else assign('a' = cat(c, b, c), 't' = t + 1)
      end if;
      VGS := VGS + 1
   end do;
   t
end proc:
> C :=array(0..2,0..2): C[0,0]:=0: C[0,1]:=2: C[0,2]:=1: C[1,0]:=2: C[1,1]:=0: C[1,2]:=1: C[2,0]:=1:
  C[2,1]:=2: C[2,2]:=0:   TestP(C, "102212011121", 25, 2);    ⇒   8
> KrArt := proc(G::array, n::posint, m::posint, p::posint, h::posint)
local a, b, c, d, k;
   assign(a = rand(0 .. n), b = rand(2 .. m));
   do
      c := cat("", parse(cat("", seq(a(), k = 1 .. b()))));
      for k from length(c) by -1 to 1 do
         if c[k] <> "0" then break end if
      end do;
      c := c[1 .. k];
      if c <> "" then lprint(c); lprint(TestP(G, c, p, h))
      end if
   end do
end proc:
> KrArt(C, 2, 12, 6, 2);
"2021222111"
6
"22100020001"
6
"10222"
6
"22022002"
8
"110100122011"
8
"1001200001"
8
"21110111"
9
"10020212"
6
"1010201221"
5
"1201"
```

```
4
"2121"
4
"12121112"
6
"120212221121"
6
"2021112"
5
"10022"
6
"10200210002"
6
"2200011112"
8
"22222201121"
9
"120222"
8
"1001"
5
"2121"
4
"110201"
5
"1112121"
5
"22011012"
5
"120212001121"
6
"1201"
4
"120202"  –  Warning, computation interrupted
```

Симуляционный подход с использованием указанных средств позволил определить ряд типов ***1-ОС,*** обладающих свойством ***существенной*** воспроизводимости конечных ***КФ,*** а также ряд других довольно интересных динамических свойств такого класса структур. Несмотря на всю их простоту, они в совокупности с другими зарекомендовали себя как эффективные средства при исследовании указанных вопросов. В частности, в результате подобного экспериментального исследования была обнаружена ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства, для которой алфавит $A=\{0,1,2\}$ и $ЛФП\ \sigma^{(2)}(x,y) = x\Theta y$, а **Θ**-операция

Θ	***0***	***1***	***2***
0	***0***	***2***	***1***
1	***2***	***0***	***1***
2	***1***	***2***	***0***

определяется вышеприведенной таблицей. Несложно убедиться, что данная структура не обладает неконструируемостью ***НКФ-***типа, тогда как каждая ***КФ*** вида $c=\square x_1x_2\ ...\ 21\square$ $\{x_1,x_2\in A\}$ для нее является ***НКФ-1,*** что с очевидностью следует из попытки определения для нее предшественника c^{-1}, а именно**:**

c^{-1} =	.....	.....	.....	.....	2	1	2	2	2	.....
c^{-1} =	.....	.....	.....	.....	0	1	2	2	2	.....
c^{-1} =	.....	.....	.....	.....	1	0	2	2	2	.....
c^{-1} =	–	–	–	–	–	–	1	1	1	.....
c^{-1} =	–	–	–	–	–	2	0	0	0	.....
c =	□	x_1	x_2	.....	2	1	0	0		.....

Экспериментальное исследование вышеуказанной классической ***1-ОС*** подтвердило наличие для нее свойства ***существенной воспроизводимости*** по Муру конечных ***КФ.***

До сих пор мы рассматривали классические ***ОС-***модели в свете их *максимальных* генерационных возможностей относительно множества ***всех*** конечных ***КФ*** безотносительно самого порядка генерации. Однако, к данной проблеме непосредственно примыкает и вопрос о возможностях генерации ***ОС-***моделью наперед заданных историй конечных ***КФ,*** т.е. множества ***КФ*** $<c_o>[\tau^{(n)}]$ в его динамике. А именно, вопрос ставится следующим образом**:** ***существует ли для заданной истории конфигураций*** $\Omega=\{c_o \to c_1 \to c_2 \to c_3 \to \ldots c_k \to \ldots\}$ $c_o \in C(A,d,\phi)$***, заданных в А-алфавите, ГФП*** $\tau^{(n)}$***, определенная в том же конечном А-алфавите и генерирующая ее, т.е.*** $<c_o>[\tau^{(n)}] = \Omega$**?**

Нетрудно убедиться, что в общем случае ответ на данный вопрос отрицателен. В качестве простого примера достаточно рассмотреть историю конфигураций для классической ***1-ОС:*** $c_t=\square\alpha 0^t c`_t 0^t \alpha\square$; $\alpha \in A\backslash\{0\}$, $c_t, c`_t \in C(A,\phi)$ $(t=0,1,2,...)$ и 0^t **–** отрезок ***t-***длины из единичных автоматов в ***0-***состояниях. В качестве упражнения читателю предлагается показать, что не существует классической ***1-ОС=***$<Z^1, A, \tau^{(n)}, X>$**,** генерирующей ***КФ-***последовательности указанного вида. Такого типа ***КФ-***последовательности *(и их обобщения на* ***d****-мерный случай****;*** $d>1$*)* характеризуются тем, что на их основе можно доказывать невозможность целого ряда *динамических* феноменов классических и даже полигенных ***ОС-***моделей. В алгоритмическом же контексте проблема определения возможности генерации произвольной **Ω-**истории конечных ***КФ*** посредством некоторой классической ***ОС-***модели алгоритмически неразрешима [55]. В плане исследования фундаментальных свойств ***ОС-***моделей было бы весьма желательным определить и исследовать другие плодотворные понятия *универсальных* свойств структур, отличные от *воспроизводимости* конечных ***КФ*** и *вычислимости***,** рассматриваемой ниже. С вопросами более практического подхода к реализации самовоспроизводящихся промышленных автоматов можно ознакомиться в интересной научно-популярной книге [302], тогда как в целом ряде работ [536] можно ознакомиться с другими интересными обсуждениями самовоспроизводимости в ***ОС.*** В свете бурно развивающихся нанотехнологий данная проблематика представляется нам весьма актуальной, свидетельством чему является рост к ней интереса [536].

3.3. Универсальные и самовоспроизводящиеся конечные конфигурации для однородных структур на разбиении

Однородные структуры на разбиении ***(ОСнР),*** определенные в разделе ***1.2*** и уже частично рассмотренные выше, представляют особый интерес для целей физического моделирования, допуская относительно несложное программирование такого фундаментального свойства как ***обратимость динамики.*** В этой связи относительно класса ***ОСнР-***моделей возникают вопросы о возможности существования для них универсальных и само-

воспроизводящихся в смысле Мура конечных конфигураций, в определенной мере характеризующих экстремальные конструктивные возможности такого типа структур.

Предположим, что для некоторой ***ОСнР-***модели существует конечное множество ***универсальных*** конечных ***КФ (УКФ)*** $G=\{c_k \in C(A,d,\phi) \mid k=1 \,..\, p\}$, а именно:

$$\tau^{(m)}:\begin{cases} c_1 \Rightarrow c_1^1 \Rightarrow c_1^2 \Rightarrow c_1^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_1^k \Rightarrow \ldots \\ c_2 \Rightarrow c_2^1 \Rightarrow c_2^2 \Rightarrow c_2^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_2^k \Rightarrow \ldots \\ ========== \\ c_p \Rightarrow c_p^1 \Rightarrow c_p^2 \Rightarrow c_p^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_p^k \Rightarrow \ldots \end{cases} \quad (\alpha)$$

где $\tau^{(m)}$ ***– ГФП ОСнР-***модели**.** В данном случае можно утверждать о существовании для нее минимального множества такого, что выполняется следующее определяющее соотношение $\bigcup_k < c_k > \left[\tau^{(m)}\right] = C(A,d,\phi)$**.** Но тогда из минимальности ***G-***множества ***УКФ*** и детерминированности ***ГФП*** структуры непосредственно следует необходимость (α) выполнения соотношения $(\forall q,v)(q \neq v \rightarrow c_q \neq c_v \;\&\; c_q \notin < c_v > [\tau^{(m)}])$**.** Следовательно, ***G-***множество должно содержать неконструируемые ***КФ.*** С другой стороны, наличие для ***ОСнР-***модели неконструируемости эквивалентно *(как следует из результатов главы* **2)** наличию для нее пусть и рекурсивного, но бесконечного множества ***НКФ,*** что противоречит конечности ***G-***множества ***УКФ.*** Следовательно имеет место результат, аналогичный рассмотренному случаю классических ***ОС-***моделей**:** ***Структура d-ОСнР не может обладать конечным множеством УКФ.***

Предположим теперь, что существуют ***d-ОСнР,*** обладающие свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ.*** Следовательно, для данных моделей должны отсутствовать ***НКФ*** и ***C(A,d,∞)-***множество бесконечных ***КФ*** должно быть замкнутым, т.е. для моделей должны отсутствовать ***НКФ-1*** в контексте терминологии классических ***ОС-***моделей. Но тогда достаточно простой анализ динамики такого типа моделей ***ОСнР*** показывает, что относительно каждой конечной c_o***-КФ*** граф состояний будет иметь следующий вид**:** $\tau^{(m)}: \ldots \Rightarrow c_{-k} \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_{-1} \Rightarrow c_o \Rightarrow c_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c_k \Rightarrow \ldots$ $(k=0, \pm1; \pm2; \ldots)$, в котором все *состояния****-КФ*** различны и являются самовоспроизводящимися по Муру**.** В качестве примера можно привести следующую простую структуру $ОСнР=<Z^1, A, 2, \Psi^{(2)}, \Xi>$**,** определение которой полностью соответствует разделу ***1.2,*** достаточно прозрачно и особых дополнительных пояснений не требует. Между тем, уже класс таких простых моделей ***ОСнР*** обладает свойством универсальной вычислимости.

Рассмотрим вопрос моделирования произвольной однородной структуры на *разбиении* $ОСнР=<Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi>$ классической структурой $ОС=<Z^1,A,\tau^{(n)},X^*>$ с *переменным* X^****-***индексом соседства, применение входящих в который подиндексов определяется координатами единичного автомата моделирующей структуры. Не нарушая общности**,** пусть теперь с учетом блочной переразметки два последовательных шага *моделируемой* структуры $ОСнР=<Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi>$ *(симулирующие один шаг моделирующей структуры)* над произвольной ***КФ*** принимают в общем случае нижеследующий простой вид, а именно**:**

разметка	*динамика КФ с учетом j-переразметки* Z^1*-пространства*											*t*
.....		.....										..
j=0	...	s_{k-2}	s_{k-1}	s_k	s_{k+1}	s_{k+2}	s_{k+3}	s_{k+4}	s_{k+5}	...		*0*
j=1	...	S'_{k-2}	s'_{k-1}	s'_k	s'_{k+1}	s'_{k+2}	s'_{k+3}	s'_{k+4}	s'_{k+5}	...		*1*
j=2	...	s''_{k-2}	s''_{k-1}	s''_k	s''_{k+1}	s''_{k+2}	s''_{k+3}	s''_{k+4}	s''_{k+5}	...		*2*
.....		.....										..

$$s_{k+p}, s`_{k+p}, s''_{k+p} \in A \;\; (p = 0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots)$$

$$\begin{cases} x'_{k-1} = f^1_{k-1}(x_{k-2}, x_{k-1}) & x'_k = f^1_k(x_k, x_{k+1}) \\ x'_{k+1} = f^1_{k+1}(x_k, x_{k+1}) & x'_{k+2} = f^1_{k+2}(x_{k+2}, x_{k+3}) \\ x'_{k+3} = f^1_{k+3}(x_{k+2}, x_{k+3}) & x'_{k+4} = f^1_{k+4}(x_{k+4}, x_{k+5}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_k = f^2_k(x'_{k-1}, x'_k) = f^2_k(f^1_{k-1}(x_{k-2}, x_{k-1}), f^1_k(x_k, x_{k+1})) = F^2_k(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \\ x''_{k+1} = f^2_{k+1}(x'_{k+1}, x'_{k+2}) = f^2_{k+1}(f^1_{k+1}(x_k, x_{k+1}), f^1_{k+2}(x_{k+2}, x_{k+3})) = F^2_{k+1}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}) \end{cases}$$

С учетом сказанного и в виду определения ***ОСнР-***модели **(**раздел ***1.2)*** несложно убедиться, что ***s,s',s"-***состояния единичных ***(k+p)-***автоматов в *моделируемой* ***ОСнР-***структуре связаны системой функциональных дискретных уравнений, представленной выше. Из нее несложно усмотреть, что моделирующая $ОС=<Z^1,A,\tau^{(n)},X^*>$ должна располагать переменным индексом соседства $X^*=<X_k=\{-2,-1,0,1\}, X_{k+1}=\{-1,0,1,2\}>$**,** применение той либо иной компоненты $\{X_k | X_{k+1}\}$ которого определяется координатой единичного ***(k+p)-***автомата структуры ***(p=0; ±1; ±2; ±3; ...).*** Таким образом, имеет место следующий результат**:** ***в общем случае структура $ОСнР=<Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi>$ на разбиении 2-моделируется структурой $ОС=<Z^1,A,\tau^{(4)},X^*>$ с переменным индексом соседства, применение каждой из двух компонент которого определяется только координатой текущего единичного автомата структуры.*** Естественно, что в ряде конкретных случаев индекс соседства моделирующей структуры, оставаясь *переменным***,** вместе с тем состоит из более простых компонент **–** *подиндексов***,** определяющих меньшие шаблоны соседства. Подобный подход к моделированию структур ***ОСнР*** на основе ***ОС*** позволяет осуществлять весьма простую их компьютерную реализацию. В качестве данного типа ***ОСнР-***моделей, допускающих для их симулирования значительно более простые множества *подиндексов***,** образующих *переменный индекс* соседства в симулирующих их классических ***ОС-***моделях, рассмотрим следующий достаточно простой пример.

Локальную блочную функцию $\Psi^{(2)}$ такой ***ОСнР-***модели определяем параллельными блочными подстановками вида**:** $\Psi^{(2)} : xy \Rightarrow \{x+y \ (mod\ a)\}y;\ x, y \in A$**.** Нетрудно убедиться, что определенное такой ***ЛБФ*** отображение $\Psi^{(2)} : A^2 \to A^2$ является *взаимно однозначным***,** а структура ***ОСнР*** в целом ***2-***моделирует структуру ***1-ОС,*** определенную в том же ***A-***алфавите, но с *переменным* индексом соседства, зависящим от координаты единичного ***k-***автомата Z^1***-***пространства $X_{2k}=\{0,1\}$ и $X_{2k+1}=\{0,1,2\}$ $(k=0,\pm1;\pm2;...)$**,** и линейными ***ЛФП*** соответственно следующего весьма простого вида, а именно**:**

$$\sigma^{(2)}_{2k}(x,y) = x + y \ \ (mod\ a), \qquad \sigma^{(3)}_{2k+1}(x,y,z) = x + y + z \ \ (mod\ a);\ \ x,y,z \in A \ \ (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

При сделанных предположениях можно показать [90]**,** что определенная таким образом ***ОСнР-***модель обладает свойством универсальной воспроизводимости конечных ***КФ*** и ее динамика является полностью *обратимой***.** В более общем виде имеет место следующий интересный результат**:** ***для каждого целого $d \geq 1$ существуют структуры на разбиении d-ОСнР, обладающие свойством универсальной воспроизводимости конечных КФ, чья динамика является полностью обратимой.*** Однако в настоящее время данный вопрос не является достаточно проработанным и требует дальнейшего исследования, аналогичного случаю классических ***ОС-***моделей.

В качестве иллюстрации приведем пример структуры $ОСнР=<Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi>$**,** для которой $A=\{0,1\}$ и ***ЛБФ*** определяется параллельными блочными подстановками вида**:** $\Psi^{(2)} = \{00 \Rightarrow 00,\ 01 \Rightarrow 11,\ 10 \Rightarrow 10,\ 11 \Rightarrow 01\}$**.** Ниже приведен фрагмент генерации истории ***КФ*** $c = \square 1011 \square$ в среде эквивалентной данной ***ОСнР-***модели ***ОС-***модели в ***прямом*** и в среде мо-

дели ***ОСнР*** в ***обратном*** порядках **(***с учетом блочной переразметки***).** Данный пример достаточно прост и каких-либо дополнительных пояснений не требует.

Генерация истории с-КФ в среде ОС (вперед) и в среде ОСнР (обратно)																								***t***
.....																		.....						....
						...	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0		-8
Генерация обратной						...	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0		-7
истории из начальной						...	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*		-6
КФ со=□1011□ в среде						...	...	..	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*		-5
ОСнР-модели с учетом						...	...	..	..	..	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*		-4
блочной перекоммутации								..	..	..	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*		-3
однородного Z^1-пространства модели										..	..	..	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*		-2
										..	..	..	..	..	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*		-1
...	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	..		*X*
										..	..	..	..	..	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*		*0*
Генерация истории КФ эквивалентной											..	..	..	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*		*1*
ОСнР-модели классической ОС-моделью;										..	..	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*		*2*
один шаг ОС-модели соответ-						...	..	..	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*		*3*
ствует двум шагам						...	...	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*		*4*
ОСнР-модели					...	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*		*5*
...	...	...	...	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*		*6*
...	...	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*		*7*
0	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*		*8*
.....																		.....						....

Таким образом**,** в отличие от случая классических ***ОС-***моделей феномен ***универсальной*** воспроизводимости по Муру конечных ***КФ*** в которых непосредственно связан с существованием неконструируемости типа ***НКФ-1,*** т.е. отсутствием согласно нашего понимания **(***см***.** *определение* ***12)*** обратимости динамики**,** для случая же ***ОСнР-***моделей характерно наличие феномена универсальной воспроизводимости по Муру конечных ***КФ*** при необходимости полной обратимости динамики моделей. Более того, в рамках данного класса ***ОС-***моделей можно наблюдать весьма интересный феномен**:** ***динамика самовоспроизводящихся конечных КФ в обратимой ОСнР-модели инвариантна относительно времени, т.е. каждая конечная КФ является самовоспроизводящейся в смысле Мура и в прямом, и в обратном направлениях временной шкалы.***

Следовательно, *универсальная воспроизводимость* для класса ***ОСнР-***моделей инвариантна относительно хода течения времени, иллюстрируя принципиальную возможность «заглянуть» как в будущее, так и в прошлое истории каждой конечной ***КФ.*** Между тем, закономерность воспроизведения копий произвольной конечной ***КФ*** в такого типа линейных ***ОСнР-***моделях значительно сложнее поддается количественной оценке [90], чем в случае *классических* линейных ***ОС-***моделей, характеризуемых общим для них свойством универсальной воспроизводимости конечных ***КФ.*** Хотя при рассмотрении ***обобщенного*** класса линейных классических ***ОС-***моделей**,** представленных выше**,** также в ряде случаев встречаются определенные затруднения Здесь же вполне уместно упомянуть еще об одной интересной проблеме существования ***ОСнР-***моделей**,** ***удваивающих*** произвольную конечную ***КФ.*** Аналогично случаю классических ***ОС-***моделей здесь имеет место отрицательный результат [90]**:** ***Не существует ОСнР-модели, удваивающей произвольную конечную КФ, определенную в том же самом А-алфавите модели.*** При этом, доказательство данного результата оказалось существенно более сложным, чем в аналогичном случае для классических ***ОС-***моделей. Поэтому для изучения динамики ***ОСнР-***моделей довольно широко используются средства компьютерного симулирования [536]**.**

Глава 4. Проблема сложности конечных конфигураций в классических однородных структурах

Сложность во всей своей общности является одним из наиболее интригующих и неопределенных понятий современного естествознания. На наш взгляд, в значительной мере именно ***интуитивная*** сущность этого понятия является тому причиной. Например, наиболее фундаментальной проблемой развития является понимание того, как система может самоусложняться и насколько большой должна быть для этого сложность исходной системы. Одной из трудностей в решении этой весьма грандиозной во многих отношениях проблемы является отсутствие удовлетворительной *меры сложности*. Вполне возможно, что к понятию сложности единого подхода просто не существует, хотя в этом направлении и делаются попытки. Исследования в этом направлении чрезвычайно желательны. В свете же использования *классических* ***ОС-***моделей в качестве формальной *основы* моделирования в биологии развития и исследовании параллельных дискретных динамических систем вопросы, связанные с понятиями сложности в ***ОС-***моделях, представляются весьма актуальными. Особую актуальность данной проблематике придает то обстоятельство, что ***ОС-***модели находят все более широкое применение в качестве концептуальных моделей пространственно-распределенных систем, из которых физические системы представляются наиболее интересными [5,128,143-145,149,150,157,185, 187,201,203,209,218,225,536]. В настоящей главе представлены наши основные результаты исследований по ***сложности*** конечных ***КФ*** в ***ОС-***моделях и связанных с ней вопросов.

Для формального моделирования различных дискретных процессов и явлений в среде классических ***d-ОС*** наибольший интерес представляет ***динамика*** начальных конфигураций. Действительно, некоторый моделируемый процесс представляется в динамике классической ***d-ОС*** соответствующей ***историей*** начальных конечных конфигураций. В этом плане само собой напрашивается вопрос о ***сложности*** конечных конфигураций, составляющих историю моделируемого в классической ***d-ОС*** процесса либо явления. В настоящее время известны три основных подхода к определению понятия «***количество информации***», ассоциированного с понятием сложности конечных объектов**:** ***комбинаторный, вероятностный*** и ***алгоритмический,*** базирующийся на теории рекурсивных функций и абстрактных автоматов. В рамках алгоритмического подхода ***А.Н. Колмогоров*** впервые определил относительную сложность некоторого конечного объекта ***А*** ***(****по отношению к объекту* ***В)*** минимальной длиной программы вывода объекта ***А*** из ***В.*** При этом в качестве представителей сравниваемых объектов ***А.Н. Колмогоров*** выбрал их *бинарные* номера в некоторой формальной нумерации, тогда как в качестве представителей программ их вывода **–** *программы работы* соответствующих машин Тьюринга [257].

Предложенный нами подход к определению *сложности* конечных ***КФ*** на основе ***ОС-***аксиоматики также по сути своей является алгоритмическим**,** но отличается от подхода ***А. Н. Колмогорова*** [5,9,56,68-73,82,83,90]. Сущность данного подхода к определению понятия ***сложности*** конечных ***КФ*** состоит в оценке трудоемкости генерации произвольной конечной ***КФ*** из некоторой примитивной ***КФ*** $c_p \in C(A,d,\phi)$ ***(****например,* c_p***=□1□** *для* ***1-ОС)*** посредством *конечного* числа ***ГФП*** из некоторого фиксированного множества функций G_f, которое будем называть ***базовым.*** В настоящей главе вводится определение понятия ***сложности*** конечных ***КФ*** на основе ***ОС-***аксиоматики и приводится ряд интересных результатов, с ним связанных. Однако для строгого определения понятия сложности нам понадобится ряд фундаментальных результатов по *динамике* конечных конфигураций как в классических, так и в полигенных ***ОС-***моделях [5,88,90,536].

Проблема неконструируемости имеет место как для моногенных (*глава* **2**), так и для полигенных ***OC-***моделей. Во втором случае данная проблема известна как проблема ***полноты*** и представляет собой следующий вопрос: ***Может ли произвольная конечная КФ быть сгенерирована из заданной примитивной КФ посредством конечной последовательности ГФП полигенной OC-модели?*** Данной проблемой занимался целый ряд исследователей, получивших немало весьма интересных результатов в данном направлении. Завершил решение ***проблемы полноты*** следующий важный результат ***А. Маруока*** и ***М. Кимура*** [244,245,536].

<u>Теорема 44</u>. Любую ненулевую d-мерную КФ $c \in C(A,d,\phi)$ можно сгенерировать из примитивной КФ $c_p \in C(A,d,\phi)$ некоторой конечной последовательностью ГФП полигенной d-OC ($d \geq 1$).

Проблема ***полноты*** в определенной мере характеризует конструктивные возможности полигенных ***OC-***моделей и ее положительное решение доказывает широкие возможности данного класса структур по генерации конечных ***КФ.*** Действительно, опираясь на результат теоремы ***44,*** показано [90], что из любой ненулевой ***d-***мерной конфигурации $c \in C(A,d,\phi)$ посредством конечной последовательности ***ГФП*** полигенной ***d-OC*** можно сгенерировать любую наперед заданную конечную ***КФ*** $c^* \in C(A,d,\phi)$.

Из результатов ***А. Маруока*** и ***М. Кимура*** следует, что ***любая КФ в полигенной структуре d-OC ($d \geq 1$) может быть сгенерирована из начальной примитивной конечной КФ*** $c_p \in C(A,d,\phi)$ ***посредством применения к ней некоторой конечной последовательности d-мерных ГФП из некоторого фиксированного (базового)*** G_f***-множества функций.*** Наряду с сугубо теоретическим данный результат представляет и значительный прикладной интерес, особенно в системах обработки и хранения различного рода изобразительной информации (*например, в картинных базах данных*), а также в системах кодирования/декодирования информации [5,9,83,88,90,92,132,135,146,190,360,371,536].

В системах обработки, хранения и передачи различного рода изображений, компьютерной графике, картографии и целом ряде других важных приложений значительный интерес представляет проблема компактного представления ***d-***мерных конфигураций (*дискретных изображений*). На основе возможности генерации в полигенных ***OC-***моделях произвольных конечных ***КФ c*** из некоторой примитивной ***КФ*** c_p за конечное количество применения к ней ***ГФП*** из некоторого фиксированного множества G_f ***d-***мерных глобальных функций τ_q ($q=1..m$) можно записать общее правило вывода конфигурации в следующем вполне очевидном виде, а именно:

$$c_p \tau_{j_1}^{p_1} \tau_{j_2}^{p_2} \tau_{j_3}^{p_3} \tau_{j_4}^{p_4} \ldots \tau_{j_h}^{p_h} = c; \quad c_p W = c; \quad \tau_{j_1}^{p_1} \in G_f; \quad k = 1..h \qquad (37)$$

где p_j – кратность ***ГФП*** τ_{jk} в ***W-***цепочке вывода. Тогда ввиду соотношения (**37**) каждая ***d-***мерная ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ получает достаточно компактное линейное представление ***(Des)*** следующего очевидного вида:

$$Des(c) = p_1 * j_1 * p_2 * j_2 * p_3 * j_3 * \ldots * p_h * j_h$$

которое, на наш взгляд, может быть значительно компактнее обычного описания ***КФ c,*** особенно в случае высокой ее размерности и большого размера. Если теперь выбирать некоторые взаимно однозначные представления для значений p_j, j_k ($k=1..h$) и маркера-*разделителя* (*), то для значения ***Des(c)*** можно получить взаимно однозначное бинарное представление $Des(c) = b_1 b_2 \ldots b_u$ ($b_1=1$, $b_v \in \{0,1\}$, $v=2..u$), т.е. бинарная величина ***Des(c)*** соответствует некоторому десятичному числу ***M=M(c,W).*** Таким образом, число ***M*** есть функция двух переменных: кодируемой конечной ***c-КФ*** и строки ***(W)*** в цепочке вывода

ее из некоторой примитивной c_p-***КФ*** (**37**). Пусть теперь $M_{\#}(c)$ будет произвольным числовым представлением ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ (*согласно общей для всех* ***d****-мерных конечных* ***КФ*** *процедуры кодирования*) и $M(c)=min_W M(c,W)$. Предположим, что для любого $M_{\#}(c)$ величина $M_{\#}(c)/M(c)$ – растущая функция для «***почти всех***» конечных ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$. Данное предположение хорошо согласуется с нашими современными представлениями об общих принципах функционирования развивающихся систем: ***в основе развивающихся систем лежит скорее сама программа развития, чем полное описание развитой системы.*** На наш взгляд, именно данная проблема достаточно важна и перспективна со многих точек зрения в плане дальнейших более детальных проработок.

С проблемами ***сложности*** конечных ***КФ*** и ***полноты*** в ***ОС***-моделях можно естественным образом связать и более *прикладную* проблему представления и хранения информации в *картинных базах данных* (***КБД***), в которых информацией являются не числа и символы, а целые **2**- и **3**-мерные изображения (*картины*) различной природы [5]. Такие ***КБД*** представляют большой интерес для многих приложений в медицине, картографии, фотографии, геодезии и других областях. Очень сложной здесь является проблема компактного представления и обработки такого типа информации. В этом плане представляется весьма перспективным использование генерирующих возможностей классических и полигенных ***ОС***-моделей, когда достаточно представительные множества конечных ***КФ*** могут задаваться *только* ограниченным числом ***ГФП*** с алгоритмом их применения к некоторым ***базовым*** простым ***КФ***, позволяющим генерировать любые картины из данных множеств. Такой подход заслуживает самого пристального внимания, учитывая перспективы развития вычислительной техники высокопараллельного действия на основе вычислительных ***ОС***-моделей [376], позволяющих производить обработку изображений в режиме реального времени [536].

Возвращаясь к результату теоремы **44**, следует отметить, что, с другой стороны, имеет место следующий фундаментальный результат [54-56], характеризующий *динамические* свойства классических ***ОС***-моделей и в значительной мере продолжающий результаты предыдущей главы по общей проблеме существования *универсальных* ***КФ*** для ***ОС***-моделей. Более того, данный результат можно даже рассматривать как прямое следствие результатов теорем **37** и **38** (*глава* **3**), легко получаемое на их основе, а именно.

<u>Теорема 45</u>. Для любого конечного A-алфавита не существует конечных множеств d-мерных КФ $c_k \in C(A,d,\phi)$ ***и ГФП*** $\tau_k^{(n_k)}$, ***определенных в том же самом конечном A-алфавите, таких, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:***

$$\bigcup_k < c_k > [\tau_k^{(n_k)}] = C(A,d,\phi) \qquad (k = 1..p)$$

Нами дано несколько вариантов доказательства теоремы **45**, с которыми можно ознакомиться, например, в [54-56]. Теоремы **44** и **45** позволяют подвести строгую математическую основу под наше понятие ***сложности*** конечных ***КФ*** на основе ***ОС***-аксиоматики, а также под целый ряд других результатов в данном направлении. В частности, из теоремы **45** следует, что даже полигенные ***ОС***-модели не являются конечно аксиоматизируемыми формальными системами, т.е. ***невозможно*** определить конечное множество ***КФ*** (*аксиом*), из которого можно было бы вывести посредством конечного множества ***ГФП*** (*правил вывода*) все $C(A,d,\phi)$-множество конечных ***КФ***. Переходим теперь непосредственно к определению понятия сложности конечных ***КФ*** на основе ***ОС***-аксиоматики, представляющего большой как теоретический, так и гносеологический интерес.

Предположим теперь, что G_f – конечное множество ***d***-мерных ***ГФП***, заданных в ***A***-алфафавите, на основе которого за конечное число шагов можно генерировать из некоторой

примитивной ***КФ*** $c_p \in C(A, d, \phi)$ *любую* конечную ***c-КФ,*** т.е. существуют следующие правила вывода конечных конфигураций из некоторой c_p-примитивной, а именно**:**

$$c = c_p \tau_1^{m_1} \tau_2^{m_2} \tau_3^{m_3} \ldots \tau_n^{m_n} \quad (\tau_k \in G_f ; \tau_j \neq \tau_{j+1}; k = 1..n; j = 1..n-1) \qquad (38)$$

где m_k **–** кратность применения ***ГФП*** $\tau_k \in G_f$ ***(k=1..n).*** В этом случае будем говорить, что конечная ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ генерируется из примитивной ***КФ*** $c_p \in C(A,d,\phi)$ по крайней мере за $r = \Sigma_k m_k$ шагов ***ГФП*** $\tau_k \in G_f$ ***(k=1..n).*** В качестве *примитивной* можно, например, выбирать ***КФ*** вида $c_p = \square 1 \square$ для случая одномерных ***ОС-***моделей. При этом, две произвольные ***ГФП*** $\tau_i, \tau_j \in G_f$ полагаются *различными* $(\tau_i \neq \tau_j)$ тогда и только тогда, когда имеет место следующее соотношение $(\exists c \in C(A,d))(c\tau_i \neq c\tau_j)$**.** Если в цепочке вывода (**38**) существует ***(n-1)*** пар *различных* ***ГФП*** $<\tau_i, \tau_j>$ ***(j=1..n-1),*** то будем говорить, что в *цепочке генерации* ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ из примитивной c_p***-КФ*** существует ***(n-1)*** уровней L_k**,** определяемых следующей ***сигнализирующей*** бинарной функцией, а именно**:**

$$L_k = \begin{cases} 1, & if\ \tau_k \neq \tau_k \\ 0, & else \end{cases} \qquad (k = 1..n-1)$$

Следующая диаграмма (рис. ***20)*** иллюстрирует вышеописанный процесс *генерации* произвольной конечной ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ из некоторой примитивной c_p***-КФ.*** В основу приводимой диаграммы положен процесс генерации *конечных* ***КФ*** из некоторой фиксированной примитивной ***КФ*** в соответствии с вышеуказанными правилами (**38**).

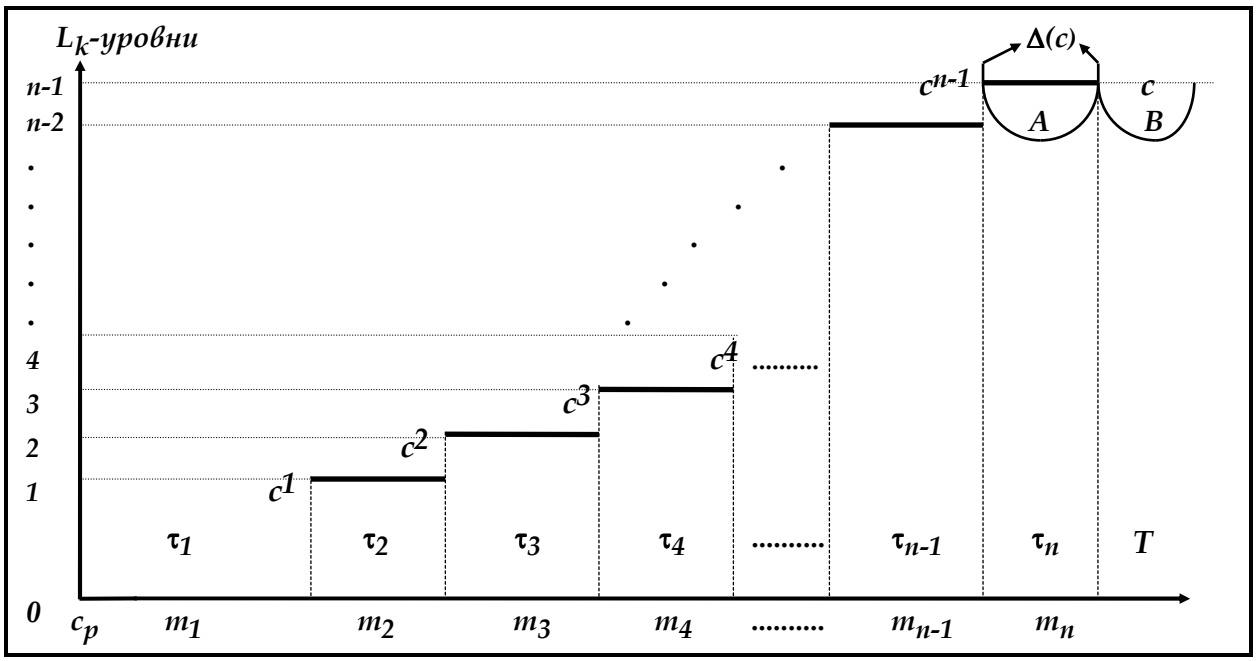


Рис. 20. Диаграмма, поясняющая оптимальную стратегию вывода произвольной конечной конфигурации $c \in C(A,d,\phi)$ [***оптимальный OS(c)-граф вывода***]**.**

Следует отметить, что приведенная выше диаграмма (рис. ***20)*** может служить в качестве достаточно хорошей иллюстрации для многих исследований, связанных с вводимым понятием сложности конечных ***КФ*** в ***ОС-***моделях. С учетом сказанного ***сложность*** произвольной конечной ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ $(d \geq 1)$ может быть определена следующим образом.

<u>Определение 16</u>. Сложность (SL) произвольной конечной конфигурации $c \in C(A,d,\phi)$ для $d \geq 1$ ***на основе ОС-аксиоматики вычисляется по следующей общей формуле, а именно:***

$$SL(c) = \min_{\tau_k \in G_k} \prod_{k=1}^{n-1} p_k^{m_k} \quad (39)$$

где p_k - k-е простое число и m_k определяется из цепочек генерации (38) конечных конфигураций полигенной ОС-модели.

Суть данного понятия *сложности* базируется на результатах теорем **44** и **45**, которые утверждают (*с одной стороны*) о возможности генерации любой конечной ***КФ*** в *полигенной* ***d-ОС*** из некоторой *начальной* примитивной c_p***-КФ*** и (*с другой стороны*) о невозможности определения *конечных* множеств начальных конечных ***КФ*** и глобальных функций классической ***d-ОС***, в совокупности генерирующих все ***C(A,d,ϕ)***-множество ***(d ≥ 1)*** конфигураций. На основе данного определения был получен ряд важных свойств конечных ***КФ*** в классических и полигенных ***ОС***-моделях, характеризующих их относительно введенного понятия ***сложности*** [5,9,10,41,53-56,88]. Ряд результатов в этом направлении представляет следующая важная теорема, имеющая целый ряд интересных приложений как в теоретическом, так и в прикладном аспектах ***ТОС***-проблематики.

<u>Теорема 46</u>. Для каждого целого d ≥ 1 множество всех d-мерных конечных КФ содержит конфигурации любой наперед заданной сложности относительно любого конечного базового G_f-множества d-мерных ГФП, определенных в некотором конечном A-алфавите классической ОС-модели.

Из данной теоремы следует, что как бы мы не определили конечное *базовое* G_f-множество, все еще будут существовать относительно него в ***C(A,d,ϕ)***-множестве конфигурации любой наперед заданной сложности. Другие более специфические свойства введенного понятия сложности конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях и интересные следствия из них можно найти в работах [5,9,10,41,53-56,88]. На основе теоремы **46** и ряда других наших результатов в этом направлении можно получить и результат, играющий весьма важную роль как для исследования динамических свойств классических ***ОС***-моделей, так и для дальнейшего развития самого понятия *сложности* конечных ***КФ***, соотнесенного с *базовой* концепцией ***ОС***-моделей [5,53-56,88,90,536].

<u>Теорема 47</u>. Для любой размерности d ≥ 1 существуют ГФП τ ∉ G_f, генерирующие из КФ c ∈ C(A,d,ϕ) ограниченной сложности конфигурации сколь угодно большой сложности в смысле определения 16.

Теорема утверждает, что если ***ГФП***, составляющие базовое G_f-множество, генерируют конечные ***КФ*** только *ограниченной* сложности, то посредством ***ГФП***, не входящих в выбранное *базовое* множество, можно генерировать *конечные* ***КФ*** сколь угодно большой сложности. Результат данной теоремы породил целый ряд интересных вопросов, одним из которых является вопрос о количестве ***КФ*** *одной и той же сложности* относительно заданного *базового* G_f-множества. Следующий важный результат [53-56,88,90] позволяет в значительной степени прояснить данный вопрос.

<u>Теорема 48</u>. Существует бесконечное число базовых G_f-множеств d-мерных ГФП, определенных в A-алфавите, относительно каждого из которых имеются бесконечные множества конечных КФ одной и той же сложности в смысле определения 16.

Результат теоремы **48** позволяет решить целый ряд весьма интересных вопросов, поставленых в наших работах [1,3]. Детальное изучение *базового* G_f-множества, используемого в определении понятия *сложности* конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях, и свойств составляющих его ***ГФП*** позволяет существенно прояснить не только новые свойства введенного понятия сложности, но и предоставит в наше распоряжение достаточно эффективный аппарат исследования динамики ***ОС***-моделей как *классических*, так и *полигенных*, а в це-

лом ряде случаев и *недетерминированных*. Так, например, весьма важно исследовать минимальное базовое G_f-множество, содержащее возможно наименьшее число **ГФП**. Исследуя проблему полноты в полигенных **ОС**-моделях, **А. Маруока** и **М. Кимура** дали конструктивное доказательство существования **базового** G_f-множества (теорема **44**), но при этом ими не использовалась оптимизационная техника. В общем случае детальное исследование *базовых* G_f-множеств *глобальных функций перехода* пока отсутствует, тогда как для более узкого класса *бинарных* одномерных **ОС**-моделей получен целый ряд интересных результатов [5,53-56,88,90] в данном направлении, а именно.

Теорема 49. Существует минимальное базовое G_f-множество, содержащее только четыре 1-мерные бинарные ГФП; по меньшей мере одна ГФП из этого множества обладает неконструируемостью типа НКФ-1. По отношению к минимальному базовому G_f-множеству одномерных бинарных ГФП существуют бесконечные множества конечных КФ одной и той же сложности.

Данный результат в определенной мере переносит результат предыдущей теоремы на случай минимальных базовых G_f-множеств и метод его доказательства [73] оказывается полезным при выводе следующей интересной теоремы, имеющей целый ряд достаточно важных приложений [82,83,90] при изучении динамики классических **ОС**-моделей.

Теорема 50. Существуют минимальные базовые G_f-множества 1-мерных ГФП в бинарном алфавите, по отношению к каждому из которых имеются бесконечные множества функций $\tau_k^{(n_k)}$ того же класса и КФ $c_k \in C(B,\phi)$ ($B=\{0,1\}$) таких, что последовательности $<c_k>[\tau_k^{(n_k)}]$ содержат конечные КФ любой наперед заданной сложности. Не существует конечного базового G_f-множества 1-мерных бинарных ГФП, по отношению к которому каждая последовательность $<c>[\tau^{(n)}]$ ($c \in C(B,\phi)$; $\tau^{(n)} \notin G_f$) содержала бы бинарные конечные КФ только ограниченной сложности.

Теорема **50** позволяет получить ответ на целый ряд вопросов [76] и глубже выявить суть введенного понятия сложности конечных **КФ** относительно **ОС**-аксиоматики. В данной связи следует отметить, что понятие *сложности* алгоритма зависит как от самой концепции алгоритма, так и от его конкретной реализации. Единого, устоявшегося уточнения к настоящему моменту не существует. Поэтому и результаты, связанные со сложностью алгоритмов, могут иметь существенно различный характер. Так, например, сложность нормального алгоритма Маркова определяется длиной записи всех его формул подстановок, а под сложностью машины Тьюринга обычно понимают произведение количества внутренних состояний и символов алфавита внешней ленты. В рамках данного определения любую функцию алгебры логики от n переменных можно реализовать нормальным алгоритмом со сложностью порядка $2n$ и машиной Тьюринга со сложностью порядка $2^n/n$. С другой стороны, определяя **сложность** структуры $d\text{-}OC=<Z^d,A,\tau^{(n)},X>$ как произведение $dxnxa$, нетрудно убедиться, что любая функция алгебры логики от n переменных реализуется соответствующей классической **1-ОС** со сложностью $2n$. Таким образом, само понятие *сложности* существенно влияет на сравнительные характеристики различных классов алгоритмов. Поэтому *концептуальной* основе сравниваемых алгоритмов следует уделять самое принципиальное внимание [5,54-56,88,90,536].

Понятие *сложности* описания алгоритма используется, в основном, при уточнении вопроса о том, какова *минимальная* сложность алгоритма, генерирующего тот или иной конечный объект. Эту *минимальную* сложность часто называют просто *сложностью конечного* объекта (*при конкретном уточнении понятия* **сложности** *описания алгоритма*). Как уже отмечалось, определение *сложности* конечных объектов X впервые было предложено **А. Н. Колмогоровым**. Оказывается, что между сложностью $K(X)$ по **Колмогорову**, сложнос-

тью $M_q(X)$ этих же конечных X-объектов, выражаемой через *длину* изображения нормального алгоритма Маркова в q-буквенном алфавите, и сложностью $s=T_q(X)$, выражаемой числом *внутренних* состояний машины Тьюринга (MT^s_q) с q-буквенным *внешним* алфавитом, существуют асимптотически точные соотношения, а именно:

$$M_q(X) = K(X)/\log_2 q \qquad T_q(X) = K(X)/(q-1)\log_2 K(X)$$

Предложенный нами подход позволяет оценивать сложность $A(X)$ таких конечных объектов, как конечные ***КФ*** в ***ОС***-моделях. Было бы весьма интересным установить зависимость между алгоритмическими *сложностями* $K(X)$, $M_q(X)$, $T_q(X)$ и $A(X)$ конечных объектов, определяемых одномерными *конечными* ***КФ*** в произвольном A-алфавите. В основу установления такой *зависимости* может быть положен метод моделирования классических одномерных ***ОС*** машинами Тьюринга и/или нормальными алгоритмами Маркова. Однако, здесь следует учитывать ряд существенных моментов, связанных с упомянутыми выше концептуальными обстоятельствами [5,54-56,88,90].

Выше уже отмечалась определенная *аналогия* между понятиями сложности $K(X)$ конечных объектов по ***А. Колмогорову*** и сложности $A(X)$ конечных ***КФ*** из $C(A,d,\phi)$-множества. Оба подхода к понятию сложности являются ***алгоритмическими,*** однако между ними имеются и существенные различия. В частности, один из результатов ***А.Н. Колмогорова*** в этом направлении гласит, что: ***машина Тьюринга с постоянной программой работы может печатать на своей выходной ленте бинарные слова только ограниченной сложности.*** В случае же нашего понятия $A(X)$-сложности имеет место совершенно иная картина, в основе которой лежат следующие основные соображения, а именно.

Рассмотрим множество M всевозможных бинарных слов вида $c=0^n b 0^m$ при $(n,m \geq 0)$, $b \in C(B,\phi)$, $B=\{0,1\}$. Очевидно, $C(B,\phi) \subset M$, а при $m=n=0$ $M \equiv C(B,\phi)$. С другой стороны, множества M и $C(B,\phi)$ относительно сложности входящих в них бинарных слов эквивалентны, т. к., генерируя из некоторого начального слова (*конфигурации*) соответствующее слово $b \in C(B,\phi)$, ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ генерирует и все сопутствующие ему слова вида $c=0^n b 0^m$ $(n,m \geq 0)$, и наоборот. Это хорошо согласуется с таким естественным предположением, что сложность любой части конечного объекта не может превышать сложности всего объекта в целом. Нетрудно теперь определить машину Тьюринга MT^B_q при $B=\{0,1\} \cup \{\#$ – *пустой символ*$\}$, которая начинает работу с пустой лентой и последовательно порождает все бинарные представления чисел натурального ряда, среди которых находятся также все конечные бинарные ***КФ*** из $C(B,\phi)$-множества. Программа работы MT^B_q не меняется в течение всего времени своего выполнения и состоит в реализации алгоритма сложения по $(mod\ 2)$. Но тогда на основе вышеприведенного результата ***А.Н. Колмогорова*** легко заключить, что все бинарные слова, печатаемые на выходной ленте такой MT^B_q, имеют ограниченную сложность. На основе же нашего подхода к определению сложности конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях можно сделать вывод, что $C(B,\phi)$-множество содержит *бинарные* конечные ***КФ*** любой наперед заданной сложности. Суть такого различия состоит в следующем.

Нетрудно убедиться, что существует принципиальное *различие* между порождающими возможностями машин Тьюринга и *полигенными* ***1-ОС*** относительно понятий сложности $K(X)$ и $A(X)$, которое лежит в основе определения обоих понятий *сложности конечных* объектов. Если согласно своего определения машины Тьюринга (MT) генерируют последовательности символов из A-алфавита (*в частности, бинарные слова*) на *выходной* ленте, используя при этом S-алфавит внутренних состояний конечного автомата (*устройства управления* MT), то функционирование классических ***1-ОС***, используемых на каждом шаге полигенной ***ОС***-модели, полностью определено в едином A-алфавите. Таким образом, если выход MT^A_q определен только в A-алфавите выходной ленты, используя

для целей генерации символы в расширенном ***A∪S-***алфавите, то выход *классической* либо *полигенной* ***ОС-***модели определяется сугубо в ***A-***алфавите, а не в каком-либо его расширении. Вышеприведенные соображения позволяют лучше прояснить сущность имеющихся различий в ряде ***А.Н. Колмогорова*** и наших результатов по *сложности конечных* объектов, определяемой алгоритмическим путем. Несколько детальнее данный вопрос рассматривается в главе ***6.*** Таким образом, в рамках собственной аксиоматики полигенные ***ОС-***модели могут генерировать конечные объекты-конфигурации сколько угодно большой сложности в смысле определения ***16.*** Данные различия еще раз акцентируют вопрос на самой сути аксиоматики понятия сложности в целом [536].

При доказательстве теорем ***48-50*** существенно использовались понятие минимального базового G_f-множества и некоторые динамические свойства входящих в него *глобальных* функций перехода. Поэтому, вполне уместно представить более детальные свойства таких *минимальных базовых* множеств, принимая во внимание их важность с точки зрения дальнейших исследований более глубоких свойств динамики ***ОС-***моделей. Мы ограничиваемся случаем *бинарных полигенных* ***1-ОС, С(B,ϕ)-***множеством конечных *бинарных* ***КФ*** и ***ГФП*** $\tau_k^{(n}{}_k)$, определяемых соответствующими им локальными функциями перехода согласно следующим параллельным подстановкам, а именно:

000	⇒	***0***	***0***	***0***
001	⇒	***1***	***1***	***1***
010	⇒	***0***	***1***	***0***
011	⇒	***1***	***0***	***0***
100	⇒	***0***	***1***	***1***
101	⇒	***1***	***0***	***1***
110	⇒	***1***	***1***	***0***
111	⇒	***0***	***0***	***0***
		(a)	***(b)***	***(c)***

00	⇒	***0***
01	⇒	***1***
10	⇒	***1***
11	⇒	***1***
		(d)

(40)

С учетом сделанных предположений имеет место следующий весьма важный результат [5,45,54-56,90], характеризующий ***ГФП*** минимального базового G_f-множества для одномерного бинарного случая полигенных ***ОС-***моделей, а именно.

<u>Теорема 51</u>. Минимальное базовое G_f-множество содержит четыре одномерные бинарные ГФП, соответствующие ЛФП которых определяются параллельными подстановками (40.a-d); составляющие G_f-множество ГФП обладают типами неконструируемости согласно табл. 6. Минимальное базовое G_f-множество для одномерного небинарного случая состоит из ГФП, обладающих НКФ и/или НКФ-1,НКФ-2 и, возможно, НКФ-3.

Таблица 6

ЛФП\НКФ	***НКФ***	***НКФ-1***	***НКФ-2***	***НКФ-3***
(40.a)	***нет***	***есть***	***нет***	***нет***
(40.b)	***нет***	***есть***	***нет***	***нет***
(40.c)	***есть***	***есть***	***нет***	***нет***
(40.d)	***есть***	***нет***	***есть***	***есть***

Выбор в качестве минимального базового G_f-множества ***ГФП,*** определяемых ***ЛФП*** с параллельными подстановками ***(40.a-d),*** обоснован в работе [54] и ввиду его громоздкости здесь не приводится. При этом, показывается, что не существует G_f-множества *одномерных бинарных* ***ГФП,*** определяемых ***ЛФП*** с простейшим индексом соседства ***X={0,1},*** которое можно было бы выбрать в качестве *минимального базового.* В *минимальном базовом* G_f-множестве, ***ГФП*** которого определяются ***ЛФП*** с параллельными подстановками ***(40.a-d),***

первые две ***ГФП (40.a-b)*** множества реализуют *перевертыши* [53] соответственно дефекта ***1*** и ***3*** и принадлежат *изолированной* полугруппе относительно операции композиции ***ГФП,*** обладающей целым рядом весьма интересных свойств относительно *динамики* генерируемых ими конечных и бесконечных конфигураций. Ниже данный вопрос будет рассмотрен детальнее. Рассмотрим наличие типов неконструируемости для составляющих G_f-множество ***ГФП,*** во многом определяющих *динамику* конечных ***КФ*** относительно данных глобальных функций перехода однородных структур.

На основе параллельных подстановок ***(40.a),*** определяющих ***ЛФП (ГФП)*** бинарной классической ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, нетрудно убедиться, что такая структура не обладает ***ВСКФ,*** а значит, ***НКФ*** и ***НКФ-3.*** Вместе с тем, для нее существуют ***НКФ-1*** уже вида $c=\square 11\square$. Рассмотрим произвольную ***КФ*** $c\in C(B,\phi)$ и определим для нее допустимость в качестве предшественника ***КФ*** $c`\in C(B,\infty)$, что определяет наличие или отсутствие для структуры неконструируемости типа ***НКФ-2,*** а именно:

$$c` = ...111111\ \ 0\ \ x_2y_5\ .....\ y_my_{m+1}y_{m+2}..... \qquad (41)$$

$$c\ = ...\square 1x_2x_3x_4x_5\ .....\ x_m1\square.....;\ \ x_k, y_k\in B=\{0,1\}\ \ \ (k=2\ ..\ \infty)$$

На основе параллельных подстановок ***(40.a)*** нетрудно убедиться, что для определенной выше структуры каждая ***КФ*** $c\in C(B,\phi)$ имеет по крайней мере $c`$-предшественника вида (**41**) из $C(B,\infty)$-множества, т.е. структура согласно определения ***4*** не обладает ***НКФ-2.***

На основе ***ЛФП,*** определенной параллельными подстановками ***(40.b),*** *бинарной* классической ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, нетрудно убедиться, что для такой структуры отсутствуют ***ВСКФ,*** а значит ***НКФ*** и ***НКФ-3.*** Вместе с тем, структура согласно теоремы ***18*** обладает неконструируемостью типа ***НКФ-1*** (*например*, $c=\square 1\square$). Повторяя теперь предыдущие рассуждения для случая ***ЛФП (40.a),*** убеждаемся, что и для рассматриваемой однородной структуры отсутствует неконструируемость типа ***НКФ-2.***

На основе ***ЛФП,*** определенной параллельными подстановками ***(40.c),*** бинарной классической ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, нетрудно убедиться, что такая структура обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа уже на *блочной* ***КФ*** вида $c_b=111$, а также ***НКФ-1*** уже вида $c=\square 11\square$, что легко доказывает попытка определения для нее допустимых типов $c`$-предшественников. С другой стороны, предположим теперь, что произвольная конечная ***c-КФ*** имеет $c`$-предшественника только из $C(B,\phi)$-множества, а именно:

$$c'' = ...\square 1x_2x_3x_4x_5\ .....\ x_m1\,|\,011111...$$

$$c` = ...\square 1x_2x_3x_4x_5\ .....\ x_m1\,|\,\square$$

$$c\ \ = ...\square 10\ y_3y_4y_5\ .....\ y_m1\,|\,\square$$

Но тогда на основе параллельных подстановок ***(40.c)*** легко сконструировать для нее из $c`$-предшественника и c''-предшественника из $C(B,\infty)$-множества. Следовательно, таким образом определенная бинарная ***1-ОС*** не обладает ***НКФ-2*** и ***НКФ-3.*** Наконец, *бинарная* классическая ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$, определенная ***ЛФП (40.d),*** обладает ***НКФ*** уже на блочных ***КФ*** вида $c_b=010$ и ***НКФ-3,*** например, вида $c=\square 1\square$. С другой стороны, данная структура не обладает ***НКФ-1,*** ибо для каждой ***КФ*** $c^*\in C(B,\infty)$, как легко заметить, $c^*\tau^{(2)}\in C(B,\infty)$. Следовательно, определенная таким образом структура обладает свойством неконструируемости типа ***НКФ-2.***

Приведем теперь конструктивное доказательство того, что невозможно определяющее соотношение теоремы ***45,*** лежащее в основе понятия сложности конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях, при условии, что в качестве ***ГФП*** $\tau_k^{(n_k)}$ $(k=1\ ..\ p)$ взяты функции, определяемые ***ЛФП*** с параллельными подстановками ***(40.a-d),*** т.е. рассмотренные выше функции нашего *минимального* ***базисного*** G_f-множества. Согласно вышесказанного ***ГФП, ЛФП*** кото-

рых определены параллельными подстановками ***(40.a-c)***, обладают неконструируемостью типа ***НКФ-1;*** в качестве примеров такого типа ***КФ*** можно положить соответственно c^a=□*11*□, c^b=□*1*□ и c^c=□*11*□**.** Более того, можно показать, что в качестве ***НКФ-1*** для ***ЛФП***, определяемой параллельными подстановками ***(40.b)***, является и ***КФ*** $c^{`b}$=□*11*□**.** Итак, каждая из первых трех функций G_f-множества обладает общим множеством ***НКФ-1*** уже вида ***GSA*** = $\{c_m$=□*110*^{m}*11*□ | $m \geq 3\}$**.** С другой стороны, для четвертой ***ГФП*** G_f-множества, ***ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками типа ***(40.d)***, любая ***КФ*** вида c=□*1*$x_2x_3...x_k0^px_{k+p+1}...x_m$*1*□ $x_j \in B$ $(j=2\ ..\ m)$ за ***(p-1)*** шагов переводится в ***сплошную*** (*не содержащую внутри себя* ***0-****состояний)* ***КФ*** длины $m+p$, где p – максимальная длина нулевого отрезка автоматов, составляющих исходную ***c-КФ;*** точнее, начиная с $n=m+p$, каждая ***КФ*** $c\tau_d^{(2)n}$ будет ***сплошной*** конфигурацией**.**

Таким образом, использование в определяющем соотношении (теорема ***45)*** первых трех ***ГФП*** из *минимального базового* G_f-множества при любом конечном наборе c_k $(k=1..v)$ конечных *начальных* ***КФ*** оставляет нереализованным по крайней мере бесконечное ***GSA***-множество конечных ***КФ.*** Но тогда в виду отмеченного свойства четвертой ***ГФП*** из G_f-множества поглощать ***0-***состояния конечных ***КФ*** невозможно генерировать *бесконечное* ***GSA***-множество ***КФ*** при любых начальных ***КФ*** из $C(B,\phi)$-множества. Следовательно, определяющее соотношение (теорема ***45)*** невозможно при условии использования в качестве ***ГФП*** $\tau_k^{(n_k)}$ функций из минимального базового G_f-множества. Таким образом, определенное четырьмя вышеуказанными ***ГФП*** G_f-множество действительно является *минимальным базовым.* В частности, каждая конечная ***КФ*** $c_m \in GSA$ генерируется из примитивной ***КФ*** c_p=□*1*□ последовательностью ***ГФП*** из G_f-множества вида $c_m=c_p\tau_d^m\tau_c\tau_d$, где ***ГФП*** τ_x определяется ***ЛФП*** с параллельными подстановками вышеуказанного вида ***(40.x;*** $x \in \{a,b,c,d\}$***).*** Результат теоремы ***51*** позволил решить ряд проблем из нашей монографии [5]***;*** он может быть использован для исследования проблемы сложности одномерных конечных ***КФ*** в произвольном ***A-***алфавите [54-56,88]. В частности, на основе результатов данной теоремы можно дать более простое обоснование введенного понятия сложности конечных ***КФ*** в одномерном бинарном случае. Результат такого обоснования принимает форму следующей теоремы [54,86,90], представляющей также и важный самостоятельный интерес в качестве составляющей аппарата исследования ***OC-***моделей.

<u>Теорема 52</u>. Любая одномерная бинарная КФ $c \in C(B,\phi)$ ***монотонно генерируется из примитивной КФ*** c_p=□*1*□ ***посредством ГФП из некоторого фиксированного конечного GS-множества. В то же самое время не существует конечной системы пар*** $\{c_k,\tau_{jk}^{(n_k)}\}$ ***таких, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:***

$$\bigcup_k < c_k > \left[\tau_{j_k}^{(n_k)}\right] = C(B,\phi); \quad c_k \in C(B,\phi) \quad (n_k \in \{2,3\}; \quad j_k \in \{0,1,2,3\}; \ k = 1\ ..\ p)$$

Множество GS бинарных глобальных функций может быть выбрано в качестве базового G_f***-множества, относительно которого определяется само понятие сложности одномерных бинарных конечных конфигураций.***

Следует отметить, что результат данной теоремы обобщается и на случай произвольного ***A-***алфавита внутренних состояний единичных автоматов *одномерной* ***OC-***модели [90]. Более того, на основе данного результата могут быть даны более простые и, в целом ряде случаев, конструктивные доказательства предыдущих теорем главы, а также получены другие интересные результаты по *сложности* конечных ***КФ*** в бинарных ***1-OC*** [54-56]. При этом, первая часть теоремы ***52*** может быть существенно улучшена, а именно, имеет

место следующий основной результат [90], представляющий определенный интерес для самой теории как классических, так и полигенных ***ОС***-моделей [536].

<u>Теорема 53</u>. В качестве конечных систем пар $\{c_k, \tau_{jk}^{(n_k)}\}$ ***предыдущей теоремы может быть выбрана такая система пар, в которых каждая ГФП представляет собой произвольную композицию конечного числа функций из GS-множества. Существуют подмножества C(B,ϕ)-множества всех конечных бинарных одномерных конфигураций (мощности в среднем 3/4 от мощности всего C(B,ϕ)-множества), которые не могут генерироваться посредством конечного числа пар {конфигурация, ГФП} следующего вида, а именно:*** $\{c_k, \tau_k^{(n_k)}\}$ $(c_k \in C(B,\phi);\ k = 1 .. p)$.

В ряде случаев систему пар $\{c_k,\tau_k^{(n_k)}\}$ $c_k \in C(B,\phi)$ в формулировках теорем ***52*** и ***53*** можно использовать в эквивалентной форме, полагая $(\forall k)(c_k \equiv c_p = \square 1 \square)$, т.е. использовать *единую* примитивную c_p***-КФ*** $(k=1..m)$. Действительно, нетрудно убедиться, что для каждой ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ можно указать ***ГФП*** $\tau_c^{(h_c)}$ в том же ***A***-алфавите такую, что $c_p\tau_c^{(h_c)} = c$. Следовательно, для конечной системы пар $\{c_k,\tau_k^{(n_k)}\}$ существует эквивалентная ей *(в смысле множества генерируемых конечных* ***КФ****)* система пар вида: $<c_p, \{\tau_k^{(n_k)}\}\cup\{\tau_k^{(h_k)} \mid k=1 .. m\}>$, где ***ГФП*** $\tau_k^{(h_k)}$ такова, что имеет место соотношение $c_k=c_p\tau_k^{(h_k)}$ $(k=1..m)$. Данный подход позволяет унифицировать множество начальных c_k***-КФ*** системы пар образующих, смещая основной акцент на конечное множество базовых ***ГФП***. С учетом сказанного, соответствующим образом модифицируются формулировки теорем ***52, 53*** и, в первую очередь, упрощается сам вид определяющего соотношения основной теоремы ***45***. Вместе с тем, обе эквивалентные формы указанного соотношения имеют свои преимущества в теоретических исследованиях по динамике ***ОС***-моделей. Наиболее же наглядно данный момент проявляется в случае использования введенного нами понятия ***A(X)***-сложности конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях и полученных на его основе результатов в качестве *аппарата* исследования динамических свойств как *классических*, так и *полигенных* ***ОС***-моделей. Следует отметить, что проблема ***сложности*** конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях, несмотря на представленные выше и целый ряд других результатов, имеет целый ряд открытых вопросов и перспективных направлений для дальнейшего исследования [5,7-9,11,54-56,88], требующих своего решения с различных точек зрения.

В заключение раздела целесообразно остановиться на двух принципиально различных подходах к определению понятия *сложности* конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях, а именно: ***конфигурационном*** и ***блочном***, суть которых вкратце отмечалась в разделах ***3.1 – 3.2***. Прежде всего, под *конфигурационной* сложностью понимается возможность ***ОС***-модели или совокупности моделей генерировать множество всех конечных конфигураций из одной или конечного множества начальных конечных конфигураций. В рамках определения ***16*** и базирующейся на нем теоремы ***46*** следует, что для каждого целого $d \geq 1$ множество всех ***d***-мерных конечных ***КФ*** содержит конфигурации ***любой*** наперед заданной сложности относительно любого конечного базового G_f-множества ***d***-мерных ***ГФП***, определенных в некотором конечном ***A***-алфавите классической ***ОС***-модели. Из данного результата следует, что как бы мы не определили конечное *базовое* G_f-множество все еще будут существовать относительно него в $C(A,d,\phi)$-множестве конфигурации *любой* наперед заданной сложности. Совершенно иная картина вполне допустима в случае определения ***блочной*** сложности, когда принимается во внимание существенно более общая возможность генерации классической ***ОС***-моделью не конечных ***КФ*** вида $c=\square h x_1...x_n h \square$ [$\square$ – *бесконечная* ***0****-конфигурация;* $x_j \in A,\ j=1..n;\ h \in A\setminus\{0\}$], а *блочных* конфигураций – конфигураций конечных блоков $<x_1...x_n>$ $\{x_j \in A,\ j=1..n\}$ единичных автоматов. При таком под-

ходе вполне реально совершенно иная ситуация. Проиллюстрируем суть различий на примере простой бинарной ***1-ОС*** с характеристическим номером ***120***, чья ***ГФП*** определяется ***ЛФП*** следующего вида, а именно:

$$000 \to 0 \quad 001 \to 1 \quad 010 \to 1 \quad 011 \to 1 \quad 100 \to 1 \quad 101 \to 0 \quad 110 \to 0 \quad 111 \to 0$$

Как уже отмечалось, данная ***1-ОС*** не обладает *неконструируемостью* типа ***НКФ (НКФ-3)***, обладая неконструируемостью типа ***НКФ-1***, например, вида $c^*=\square 10x_1...x_n1\square$ $\{x_j \in B=\{0,1\}, j=1..n\}$. Данное утверждение легко доказывает следующее рассуждение. Так как ***1-ОС*** не обладает неконструируемостью ***НКФ-***типа, то *произвольная* конечная ***КФ*** c^* будет иметь предшественника по меньшей мере из множества $C(B,1,\phi)$. Пусть такой предшественник c^{-1} имеет нижеследующий простой вид, а именно:

$c^{-1}=$	□	0	0	1	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	y_2	.....	y_n	1	□
$c^{-1}\tau^{(3)}=c^{**}=$	□	1	1	x_o	x_1	x_2	.....	x_n	1	□

где $y_k, x_j \in B=\{0,1\}, j=0..n, k=2..n$. Несложно усмотреть, что конечный предшественник не в состоянии сгенерировать ***КФ*** требуемого вида c^*, а генерируемая им ***КФ*** c^{**} будет начинаться всегда с префикса «***11***». Следовательно, каждая ***КФ*** вида $c^*=\square 10x_1...x_n1\square$ будет для рассматриваемой структуры ***НКФ-1***, имея предшественников только из множества $C(B,1,\infty)$. Более того, данная структура не обладает и неконструируемостью ***НКФ-2*** типа, что доказывается нижеследующими весьма простыми рассуждениями, а именно:

$c'=$	.....	.....	.....	.....	y'_{n-1}	y'_n	0	1	1	1	.....
$c^{-1}=$	.....	.....	.....	.....	y_{n-1}	y_n	1	0	0	0	.....
$c'\tau^{(3)}=c^{-1}\tau^{(3)}=c^*=$	□	1	x_1	.....	x_{n-1}	x_n	1	0	0	0	.....

Предполагая, что произвольная конечная ***КФ*** c^* имеет предшественника c^{-1} только из множества $C(B,1,\phi)$, несложно определить для нее и ***КФ*** c' из множества $C(B,1,\infty)$, для которой справедливо соотношение $c'\tau^{(3)}=c^*$, т.е. любая конечная ***КФ*** относительно данной ***1-ОС*** имеет предшественника как из множества $C(B,1,\phi)$, так и из множества $C(B,1,\infty)$, что и подтверждает вывод об отсутствии для структуры неконструируемости типа ***НКФ-2***.

С учетом вышесказанного и вида ***ЛФП*** рассматриваемой ***1-ОС*** можно показать, что для структуры существует бесконечное множество ***НКФ-1*** $\left\{c_1^j\right\}(j=1..\infty)$, которое в совокупности генерируют все множество $C(B,1,\phi)$ конечных конфигураций (η). Таким образом, множество ***НКФ-1*** структуры с характеристическим номером ***120*** генерирует множество $C(B,1,\phi)$ всех конечных конфигураций, а именно:

$$\tau^{(3)}:\begin{cases} c_1^1 \to c_2^1 \to c_3^1 \to c_4^1 \to ... \to c_k^1 \to ... \\ ========== \\ c_1^j \to c_2^j \to c_3^j \to c_4^j \to ... \to c_k^j \to ... \\ ========== \end{cases} \qquad (\eta)$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\left\langle c_1^j\right\rangle\left[\tau^{(3)}\right]=C(B,1,\phi);\quad (\forall k,j)\left(k\neq j\to\left\langle c_1^k\right\rangle\left[\tau^{(3)}\right]\bigcap\left\langle c_1^j\right\rangle\left[\tau^{(3)}\right]=\varnothing\right)$$

Более того, как уже отмечалось ранее, полученные нами результаты компьютерных экспериментов с данной структурой в сочетании с некоторыми теоретическими, базирующимися на динамических свойствах ***1-ОС***, обусловленных наличием в них неконструируемости типа ***НКФ-1*** при отсутствии ***НКФ (НКФ-3)*** и ***НКФ-2***, позволили сформулировать следующее довольно интересное предположение, а именно [88]: ***для классической***

бинарной 1-ОС с характеристическим номером 120 каждая конечная КФ является самовоспроизводящейся в смысле Мура, одновременно генерируя при этом все конечные блочные КФ. В случае положительного ответа мы получаем не только пример довольно простой бинарной ***ОС-***модели**,** обладающей свойством ***универсальной воспроизводимости*** в смысле Мура конечных конфигураций, но и пример структуры, для которой любая конечная конфигурация генерирует ***все*** множество ***блочных*** конфигураций**.** Проведенные нами и другими исследователями компьютерные эксперименты склоняют нас к мысли о справедливости указанного предположения, однако теоретического подтверждения получить пока не удалось**,** чему в немалой степени способствует и псевдостохастический характер динамики генерируемых структурой последовательностей ***КФ*** [88].

Справедливость приведенного предположения еще раз наглядно проиллюстрирует существенность различий как между ***универсальными конечными КФ*** и ***блочными КФ***, генерируемыми классическими ***ОС-***моделями, так и между нашим подходом к определению сложности конечных ***КФ*** в классических ***ОС-***моделях и подходом ***А.Н. Колмогорова*** к определению сложности конечных объектов. В частности, генерируемость в ***1-ОС*** с номером ***120*** всех *блочных* ***КФ*** из произвольной начальной есть некий аналог генерации машиной Тьюринга последовательности бинарных слов ***ограниченной*** сложности [260].

Большое значение ***проблема сложности*** конечных ***КФ*** в ***ОС-***моделях имеет не только в плане исследования их как некоторых формальных дедуктивных систем, но и в случае *погружения* в них развивающихся систем клеточной организации и их отдельных феноменов. В этом случае данная проблема имеет самое непосредственное отношение к вопросу ***сложности*** самоорганизующихся биологических клеточных систем, что весьма актуально для современной биологии развития. Ведь до сих пор при кибернетическом исследовании биологии развития мы не имеем удовлетворительного подхода к вопросу оценки сложности развивающихся биологических систем. И наш математический подход в этом направлении может оказаться достаточно плодотворным и перспективным. Таким образом, представленные здесь результаты **(***наряду с другими нашими результатами по проблеме сложности конечных* ***КФ*** *в* ***ОС-****моделях)* не только в целом формируют собственно проблематику и решают целый ряд основных ее задач**,** но и поднимают ряд открытых вопросов и достаточно перспективных направлений исследований**,** представляющих значительный интерес как для теоретических**,** так и прикладных аспектов проблематики ***ОС-***моделей в целом.

Полученные нами результаты по проблеме сложности конечных ***КФ*** в ***ОС-***аксиоматике позволяют, в определенной мере, прояснять суть самого понятия сложности**,** зависящего от используемой аксиоматики**.** Так, в аксиоматиках *классических* и *полигенных* ***ОС-***моделей существуют *бинарные* конечные ***КФ*** любой сколь угодно большой сложности, тогда как в другой аксиоматике **(***например**,** *в аксиоматике* ***А.Н. Колмогорова)*** все бинарные конечные слова могут иметь только ограниченную сложность. Следовательно, по-видимому, не существует абсолютного понятия *сложности* как произвольных конечных объектов, так и понятия сложности вообще**;** т.е. само понятие *сложности* носит в значительной мере относительный аксиоматический характер. Подобно рассмотренному случаю классических ***ОС-***моделей и для ***ОСнР-***моделей вполне естественным образом вводится понятие сложности конечных ***КФ***, базирующееся на аналоге теоремы ***45*** [5,8-10,54,536]. При этом, большинство представленных выше результатов по сложности конечных ***КФ*** непосредственно переносится и на класс однородных структур ***ОСнР*** на разбиении, играющих достаточно важную роль в качестве среды физического моделирования, наряду с симулированием и исследованием весьма широкого класса пространственно-распределенных динамических систем**.** С основными вопросами теории данного класса ***ОС-***моделей можно ознакомиться в работах [8-10,54-56,88,90,150-152,268,273,536], ряд результатов по которой приводится и в настоящей монографии.

Глава 5. Параллельные формальные грамматики и языки, определяемые однородными структурами (ОС-моделями)

Теория формальных грамматик (ТФГ) занимает центральное место в математической лингвистике, так как именно она предоставляет средства для исследования собственно функционирования *языка***.** Вместе с тем, она выделяется среди других разделов математической лингвистики большей сложностью аппарата **(***сходного с аппаратом теории алгоритмов и общей теории абстрактных автоматов***,** *с которыми имеет немало точек соприкосновения и пересечения***)** и значительно большей сложностью возникающих в ней математических задач. Формальные грамматики наиболее хорошо изученных типов представляют собой системы**,** позволяющие *порождать* или *распознавать* множества цепочек, интерпретируемых обычно как множества грамматически правильных предложений некоторых формальных *языков***,** а также сопоставлять входящим в эти множества цепочкам описания их синтаксической структуры в терминах систем составляющих или деревьев подчинения [162,163,389,390,536].

Математическое значение порождающих грамматик определяется тем, что они представляют собой одно из средств эффективного задания множеств слов. Класс формальных языков, порождаемых произвольными грамматиками, совпадает с классом рекурсивно-перечислимых множеств. Особый интерес с данной точки зрения представляют формальные грамматики классической *иерархии* ***Хомского*** [389]. В этой связи приобретает существенное значение изучение классов абстрактных автоматов, эквивалентных тем или иным классам формальных грамматик, т.е. описывающих те же формальные языки. В частности, например, *автоматные* грамматики эквивалентны конечным автоматам, *контекстно-свободные* **–** автоматам с *магазинной* памятью и *контекстно-зависимые* **–** *линейно* ограниченным машинам Тьюринга, т.е. таким машинам, которые перерабатывают каждое слово, не выходя за пределы того участка внешней ленты, где записано *входное* слово. Кроме грамматик ***Хомского*** на сегодня существует ряд иных интересных с той или иной точки зрения видов *формальных* грамматик, предназначенных для описания множеств слов и других объектов, из которых в последние годы особое внимание привлекают параллельные формальные грамматики, предоставляющие эффективные средства для лингвистического описания ряда важных параллельных объектов [536].

Как уже отмечалось выше, ***ТФГ*** весьма тесно примыкает к теории абстрактных автоматов. Следовательно, изучение *динамики* ***ОС-***моделей с точки зрения формальных грамматик представляет несомненный интерес. Более того, теория параллельных формальных грамматик может быть успешно использована не только в создании теории параллельного программирования и архитектур вычислительных систем высокопараллельного действия новых поколений, но и при создании лингвистической основы для описания динамики пространственно-распределенных систем клеточной природы [5,7-10, 32,59,60,71,75,80,86,162,163,233]. Поэтому, с целью изучения языков, генерируемых классическими ***ОС-***моделями, нами в ***1974*** были введены формальные параллельные грамматики, названные τ_n**-**грамматиками [32]. В основном изучались τ_n**-**грамматики, определяемые классическими и недетерминированными одномерными ***ОС*****,** однако подобный подход может быть распространен и на случай ***d-ОС (d ≥ 2)*****,** и другие типы структур, отличных от вышеуказанных [5,54-56,88,90,536].

При таком подходе *классические* ***ОС-***модели можно рассматривать как формальные параллельные грамматики, которые не используют нетерминальных символов и вывод в которых осуществляется абсолютно *параллельным* образом. Такие грамматики подобны

хорошо известным системам ***А. Линденмайера (L-****системам)* и могут быть успешно использованы для формального лингвистического описания многих параллельных дискретных процессов и динамики систем клеточной природы [136,163,233,251,265,336,338]. Ниже нами достаточно детально и на содержательном уровне проводится обсуждение τ_n-грамматик в соответствии с традициями ***ТФГ,*** в результате чего читатель получает целый ряд важных характеристик такого класса формальных *параллельных* грамматик. На основе результатов изложения показывается, что *традиционный* подход к созданию параллельных языков программирования для вычислительных ***ОС-***моделей, пожалуй, не позволит создавать действительно высокоэффективное параллельное программное обеспечение, использующее высокую степень распараллеливания вычислений, допускаемую такими моделями управления и обработки информации.

Неформально *параллельные* τ_n-грамматики вводятся следующим образом. По аналогии с основными понятиями ***ТФГ*** алфавит ***А*** внутренних состояний единичного автомата классической ***1-ОС*** называется *алфавитом* τ_n-грамматики, ***ЛФП*** структуры определяет множество *параллельных продукций* или *правил вывода* грамматики, начальная ***КФ –*** *аксиому* и порождаемые из нее конечные ***КФ –*** *слова* языка, определяемого *параллельной* τ_n-грамматикой. Подобно обычной грамматике в ***ОС-***модели из начальной ***КФ (****аксиомы)* выводятся посредством ***ЛФП (****правил вывода)* новые ***КФ (****слова языка)****.* Между тем, между обычными формальными грамматиками и параллельными τ_n-*грамматиками* имеются два весьма важных и существенных отличия, а именно**:**

♦ правила вывода в формальной τ_n-*грамматике* применяются *одновременно* и *абсолютно параллельным* образом**;**

♦ в ***А-***алфавите формальной τ_n-*грамматики* не делается никаких различий между *терминальными* и *нетерминальными* символами.

В ***ТФГ*** *формальный* язык определяется как множество всех терминальных слов, генерируемых из *аксиомы* посредством правил вывода грамматики. Аналогичным же образом определяется $L(\tau_n)$-*язык* как множество всех *конечных* ***КФ (****слов)****,* генерируемых из начальной ***КФ (****аксиомы)* одновременным применением *параллельных подстановок*, определяющих ***ЛФП,*** ко всем символам в каждой текущей ***КФ (****слове)****.* А так как ***ЛФП*** структуры взаимно однозначно определяет ее ***ГФП,*** то под *правилами вывода* в формальной параллельной τ_n-*грамматике* часто понимается *глобальная функция перехода* структуры ***(ГФП).***

Определенные таким образом *параллельные* формальные τ_n-грамматики подобны упомянутым ***L-***системам и могут быть использованы для лингвистического описания ряда *дискретных* развивающихся систем и параллельных процессов. Для дальнейшего изложения нам понадобится ряд определений**;** предполагается при этом, что читатель знаком с основами ***ТФГ.*** При изложении материала настоящей главы будут использоваться общепринятые терминология и обозначения теории формальных грамматик [389].

5.1. Основные свойства параллельных языков, определяемых классическими однородными структурами

В настоящем разделе будут представлены основные понятия и свойства *формальных* параллельных языков, определяемых *одномерными* классическими ***ОС-***моделями. Нами в традициях ***ТФГ*** достаточно детально изучены τ_n-грамматики и определяемые ими па-

раллельные формальные языки, что нашло отражение в работах [5,7-10,32,53,59,60-63, 71-73]. Следуя традициям ***ТФГ***, мы определяем $L(\tau_n)$-язык как *множество* всех слов (*конечных* ***КФ***), выводимых из *аксиомы* $c_0 \in C(A,\phi)$ (*начальной* ***КФ***) посредством применения к ней правил вывода $\tau^{(n)}$ (***ГФП*** *классической* ***1-ОС***). Более формально параллельные τ_n-*грамматика* и $L(\tau_n)$-*язык* определяются следующим образом, а именно.

Определение 17. Параллельная τ_n-грамматика представляется упорядоченным кортежем $\tau_n = <n, A, \tau^{(n)}, c_0>$, где составляющие его компоненты имеют следующий смысл:

1) n – индекс грамматики (размер шаблона соседства некоторой классической 1-ОС);
2) A – алфавит грамматики (внутренние состояния автоматов в 1-ОС);
3) $\tau^{(n)}$ – правила вывода грамматики (глобальная функция перехода в 1-ОС);
4) c_0 – аксиома грамматики (начальная конечная КФ в классической 1-ОС).

Формальный *параллельный* $L(\tau_n)$-*язык*, определяемый τ_n-грамматикой, представляет собой множество всех *слов* (*конечных* ***КФ***), *выводимых* (*генерируемых*) из ***аксиомы*** $c_0 \in C(A,\phi)$ (*начальной* ***КФ***) посредством применения к ней *правил вывода* $\tau^{(n)}$ (*т.е.* ***ГФП*** *классической* ***1-ОС***), т.е. определяющим здесь является соотношение $L(\tau_n) \equiv <c_0>[\tau^{(n)}]$.

Как уже отмечалось выше, *существенной* чертой τ_n-грамматики является используемый ею *сугубо* параллельный принцип переработки слов, что отличает ее от традиционных формальных грамматик. Данный *параллелизм* отражает основные прикладные мотивации как со стороны вычислительных и биологических наук, так и целого ряда высоко абстрагированных моделей реального физического мира, функционирующих во времени и пространстве. Более того, τ_n-грамматики не используют в отличие от традиционных грамматик *нетерминальных* символов (*носящих роль символов, расширяющих алфавит формальной грамматики*). Определяя таким образом параллельные τ_n-грамматику и $L(\tau_n)$-язык, получаем возможность исследовать динамику классических ***1-ОС*** в рамках ***ТФГ***, что позволяет взглянуть на нее с нетрадиционной стороны. Результаты исследования классических и недетерминированных ***1-ОС*** с точки зрения ***ТФГ*** представлены в цикле наших работ (*см. обзоры в* [5,7-10,32,53,59,61,86]), а также в работах ряда других исследователей [162,163,184,233,251,254,264]. Если же не оговаривается противного, то на протяжении настоящего раздела будут рассматриваться параллельные τ_n-грамматики и соответствующие им $L(\tau_n)$-языки, определяемые $<Z^1,A,\tau^{(n)},X>$-моделями с алфавитом $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ внутренних состояний и индексом соседства вида $X=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Классическим подходом к математической характеристике некоторого класса *формальных* языков является исследование свойства его *замкнутости* относительно традиционных в ***ТФГ*** операций. Существуют две основные причины для рассмотрения этих операций относительно параллельных $L(\tau_n)$-языков. Во-первых, на этом пути имеется возможность глубже прояснить различия между семейством $L(\tau_n)$-языков и традиционными семействами формальных языков. Во-вторых, до сих пор не до конца определено и само множество *операций*, естественных для семейства $L(\tau_n)$-языков. Следующий основной результат [32,59] определяет поведение $L(\tau_n)$-языков относительно традиционных операций, рассматриваемых в классической теории формальных грамматик [389,390].

Теорема 54. Языки $L(\tau_n)$ незамкнуты относительно операций итерации, объединения, дополнения, пересечения, произведения, гомоморфизма и конечного преобразования, но замкнуты относительно операции инверсии.

Ю. Дассов в [233] исследовал параллельные τ_n-грамматики и ассоциированные с ними $L(\tau_n)$-языки относительно четырех новых теоретико-множественных операций и показал, что $L(\tau_n)$-языки незамкнуты также относительно и этих, интересных с биологической точки зрения операций. Вышеупомянутые результаты были получены конструктивными методами, состоящими в построении соответствующих примеров $L(\tau_n)$-языков. К существенным чертам τ_n-грамматик можно отнести также и тот немаловажный факт, что большинство подходов из стандартных методики и аппарата исследований ***ТФГ*** неприменимо к рассматриваемому классу параллельных грамматик и требует использования новых нетрадиционных подходов. Так, например, использование методов теории рекурсивных функций позволило решить некоторые вопросы теории параллельных τ_n-грамматик [5]. Данный подход базируется на введенном понятии ***G***-нумерации, относительно которой устанавливается взаимно однозначное соответствие между частично рекурсивной словарной функцией $\tau^{(n)} : C(A,\phi) \to C(A,\phi)$ и частично рекурсивной числовой функцией $F_n(m): N \to N^* \subseteq N$. В этом случае исследование параллельной τ_n-грамматики и ассоциированного с ней $L(\tau_n)$-*языка* сводится к изучению соответствующей им указанной числовой функции $F_n(m)$ и области ее значений. В рамках данного подхода был исследован ряд свойств самой числовой $F_n(m)$-функции, для которой удалось получить верхнюю оценку ее сложности, выражаемую следующим результатом, а именно: ***любая числовая $F_n(m)$-функция мажорируется подходящей примитивно рекурсивной функцией $W(n,m)$.***

Данный результат хорошо согласуется с тем фактом [10], что ***словарная функция, определяемая параллельным отображением $\tau^{(n)} : C(A,\phi) \to C(A,\phi)$, является примитивно рекурсивной.*** При этом, остается еще много вопросов, связанных с применением методов и результатов теории рекурсивных функций к проблемам исследования *динамических* свойств классических ***OC***-моделей, но в нынешнем состоянии данный подход оказывает существенную помощь в этом направлении. Так, например, используя вышеописанный подход, мы получили чрезвычайно простое доказательство следующего довольно интересного результата из теории конечных автоматов [9]**:** ***функция, определяемая конечным автоматом, безошибочно предсказывающим среду, является примитивно рекурсивной.*** Для случая параллельных $L(\tau_n)$-языков данный подход позволяет получить следующие интересные результаты [5,32,54-56,88,90,536].

<u>Теорема 55</u>. В общем случае не существует конечного множества $L(\tau_n)$-языков, объединение которых образует дополнение некоторого языка того же класса; и дополнение конечного множества $L(\tau_n)$-языков не может быть снова формальным параллельным языком того же класса.

Из представленных результатов следует, что семейство $L(\tau_n)$-языков проявляет весьма сильный *иммунитет* к ***замыканию*** относительно традиционных для ***ТФГ*** операций и ряду других операций, представляющих значительный интерес с точки зрения как самой ***ТФГ***, так и многих ее приложений. В этом плане интересно сравнить между собой ***L***-*системы* и τ_n-*грамматики*. Прежде всего, языки ***L***-семейства в большинстве своем в отличие от $L(\tau_n)$-языков обладают *полным иммунитетом* по отношению к традиционным операциям замыкания. Этот феномен объясняется скорее отсутствием нетерминального алфавита, чем присущим им свойством высокого параллелизма правил вывода. В результате проведенного анализа вполне естественным напрашивается вывод, что причина такого различия ***L***-систем и τ_n-грамматик, на наш взгляд, сводится к следующему.

L*-системы** допускают изменение *длины* перерабатываемого слова не только на его концах, но и за счет вставки **(удаления***)** подслов внутри его. Тогда как в случае τ_n-грамматики *невозможно* произвести вставку *внутрь* перерабатываемого слова даже одного символа **(***раздвижка слов***),** а увеличивать его длину можно только на концах слова. Вообще говоря, если τ_n-грамматика жестко привязана к системе координат, определяемой однородным Z^d-пространством, то ***L*-система** имеет значительно больше степеней свободы при выводе слов соответствующего параллельного ***L*-языка**.

Вычислительные возможности параллельных τ_n-грамматик **(*n* ≥ 2)** *эквивалентны* возможностям универсальной машины Тьюринга, т.е. класс параллельных τ_n-грамматик обладает свойством *универсальной* вычислимости. Об этом вычислительном свойстве ***OC*-моделей** говорилось выше и детальнее будет рассматриваться в связи с вопросами моделирования. Наряду с этим показано [32], что каждый конечный непустой язык генерируется подходящей τ_n-грамматикой, тогда как для каждого значения ***n*-*индекса*** грамматики существуют *бесконечные* регулярные языки **(***и даже конечные***),** которые не могут генерироваться τ_n-грамматиками, но могут генерироваться τ_{n+1}-грамматиками. Таким образом, по порождающим возможностям параллельных *языков* τ_n-грамматики образуют иерархию согласно ***n*-индекса** грамматики. Более того, существуют нерекурсивные $L(\tau_n)$-языки и регулярные языки, не являющиеся $L(\tau_n)$-языками**;** $L(\tau_n)$-языки имеют непустые пересечения с языками *Клини***,** *контекстно-свободными* и *контекстно-зависимыми* языками [389,390]. Как следствие вышеуказанных различий, семейство $L(\tau_n)$-языков совершенно отлично от традиционных семейств формальных языков в *иерархии* Хомского **–** оно содержит некоторые *неконтекстно-свободные* языки и даже *нерекурсивные* языки при отсутствии в нем целого ряда классов *регулярных* языков [5,10,32,56,59,88,90,536].

Общепризнанным методом понимания порождающих возможностей некоторого класса генерирующих формальных систем является *сравнение* его с теперь классической иерархией Хомского. Одним из основных доводов в пользу этого служит тот факт, что *иерархия Хомского* наиболее детально исследована в ***ТФГ*.** В этой связи ряд наших результатов [5,10,32,56,59] посвящен установлению взаимосвязи $L(\tau_n)$-языков с традиционными языками в иерархии ***Хомского***, из которых основными классами **(***в порядке возрастания их сложности***)** являются *регулярные* **(***языки Клини***),** *контекстно-свободные***,** *контекстно-зависимые* **(*НС*-*языки*),** *рекурсивные* и *рекурсивно перечислимые* языки**.** Было показано, что все $L(\tau_n)$-языки образуют *собственное* подмножество множества всех языков Линденмайера **(*L*-*языков*),** а $L(\tau_n)$-языки являются собственном *подклассом* класса $L(T_n)$-*языков***,** определяемых недетерминированными T_n-грамматиками, рассматриваемыми ниже. Основной здесь наш результат устанавливает соотношение между семействами *параллельных* формальных $L(\tau_n)$- и $L(T_n)$-языков**,** определяемых параллельными τ_n- и T_n-грамматиками соответственно *классических* и *недетерминированных* ***1*-*OC*,** в рамках *иерархии* Хомского**.** Для лучшего понимания места $L(\tau_n)$-языков в иерархию дополнительно включены и подобные им **<*k*, *p*>-**языки ***Линденмайера*** [5,10,32,56,59,88,90,536].

Нижеследующая теорема ***56*** определяет место $L(\tau_n)$- и $L(T_n)$-***языков*** в классической иерархии Хомского относительно основных традиционных формальных языков. Довольно много интересных свойств $L(\tau_n)$-языков относительно различных операций над ними представлено в работах [5,8,32,59,60,233,536] и в цитируемых в них многочисленных ссылках на оригинальные источники.

<u>Теорема 56</u>. Нижеследующая диаграмма (рис. 21) устанавливает соотношения между семействами параллельных формальных языков $L(\tau_n)$ и $L(T_n)$, определяемых соответ-

ственно классическими и недетерминированными одномерными ОС-моделями, в рамках традиционной иерархии Хомского.

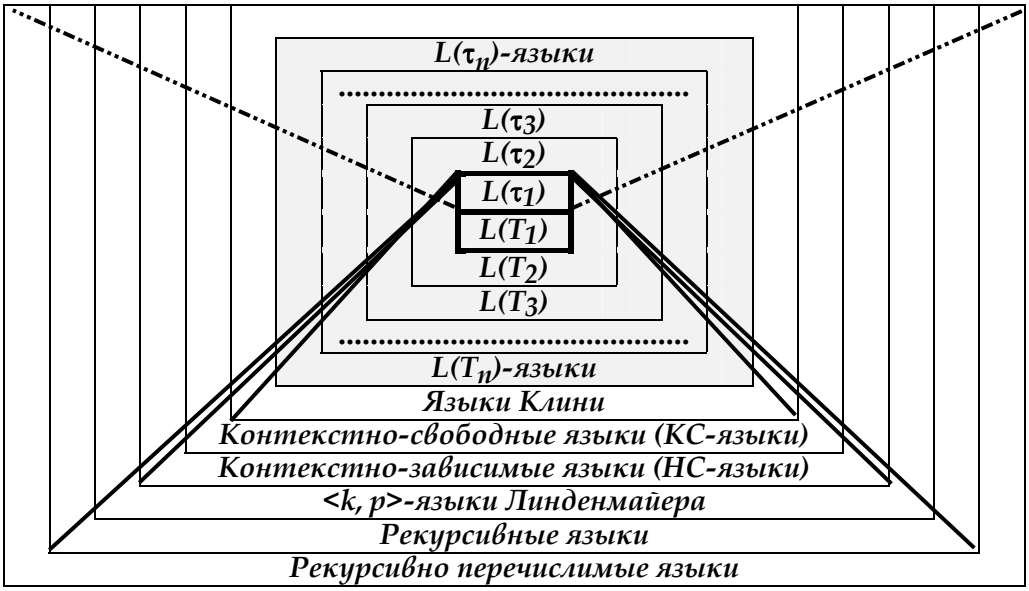


Рис. 21. Местоположение формальных языков $L(\tau_n)$ и $L(T_n)$ в иерархии Хомского.

Традиционным в ***ТФГ*** подходом является определение для некоторого класса порождающих грамматик класса *распознавателей* или акцепторов, допускающих языки, генерируемые этими грамматиками. Очевидно, что хорошая автоматная модель для семейства формальных языков задает ему достаточно строгую характеристику. При этом, относительно такой модели, вообще говоря, следует сделать одно существенное замечание, а именно. Все приемлемые модели такого типа (*по крайней мере в их классическом смысле*) имеют в качестве управляющего устройства некоторый конечный автомат. И поэтому семейство допускаемых такой моделью формальных языков должно быть ***замкнутым*** относительно операции *пересечения* с *регулярными* множествами слов. Различные классы $L(\tau_n)$-языков также исследуются с такой «*программистской*» точки зрения. В этом направлении относительно $L(\tau_n)$-языков имеет место следующий основной результат [5,32].

<u>Теорема 57</u>. Класс всех параллельных $L(\tau_n)$-языков незамкнут относительно операции пересечения с регулярными множествами слов.

Таким образом, из данного результата следует, что по причине ***незамкнутости*** класса $L(\tau_n)$-языков относительно операции ***пересечения*** с регулярными множествами слов не представляется возможным найти для него автоматную *модель акцептора* в общепринятом смысле. Относительно $L(\tau_n)$-языков существует целый ряд других интересных вопросов, часть из которых будет рассмотрена ниже. Прежде всего, с точки зрения проблемы ***обратимости*** процессов, погружаемых в ***ОС***-модели, представляет определенный интерес вопрос о существовании $L^{-1}(\tau_l)$-языка, обратного параллельному $L(\tau_n)$-языку. При этом, $L^{-1}(\tau_l)$-язык понимается как множество всех слов $c_k \in C(A, \phi)$ таких, что каждая последовательность $K\Phi <c_k>[\tau^{(h)}]$ обязательно должна содержать *аксиому* исходной τ_n-грамматики. Нетрудно убедиться [32], что в случае наличия взаимной однозначности параллельного глобального отображения $\tau^{(n)}: C(A) \rightarrow C(A)$ этот вопрос всегда имеет положительное решение: для каждого $L(\tau_n)$-языка с такого типа параллельными правилами вывода соответствующей ему параллельной τ_n-грамматики существует ***обратный*** ему $L^{-1}(\tau_l)$-язык того же класса. В случае существования для ***ГФП*** неконструируемости

типов ***НКФ***, ***НКФ-3*** и/или ***НКФ-1*** также можно определять $L(\tau_n)$-языки, имеющие ***обратные*** им языки того же класса [32]. Однако в общем случае данный вопрос решается отрицательно, о чем свидетельствует следующий основной результат.

Теорема 58. Существуют параллельные формальные $L(\tau_n)$-языки, словарные множества $L^{-1}(\tau_h)$ для которых не являются языками того же класса.

Интересным представляется и исследование свойства оставаться $L(\tau_n)$-языком относительно операции *сужения* или *расширения* его на конечное подмножество слов S из $C(A,\phi)$-множества; $S \subset C(A,\phi)$. Для многих интересных случаев множества слов $L(\tau_n)$, $L(\tau_n)\cup S$ и $L(\tau_n)\setminus S$ являются параллельными формальными *языками* одного и того же класса – *языками*, генерируемыми параллельными τ_n-грамматиками, тогда как в общем случае имеет место следующий основной результат [5,32,57-60].

Теорема 59. Существует параллельный формальный $L(\tau_n)$-язык и конечное множество слов $S \subset C(A,\phi)$ такие, что множества слов $L(\tau_n)$, $L(\tau_n)\cup S$ и $L(\tau_n)\setminus S$ не могут быть формальными языками одного и того же класса.

Таким образом, результаты теорем ***57-59*** дают еще ряд примеров *незамкнутости* класса параллельных $L(\tau_n)$-языков относительно операций, характеризующих важные свойства *динамики* классических ***1***-мерных ***OC***-моделей, определяющих соответствующие им параллельные τ_n-грамматики. Так, например, из теоремы ***57*** можно сделать вывод, что для параллельных $L(\tau_n)$-языков *неприемлемы* традиционные автоматные модели акцепторов с центральным управлением, в качестве которого выступает конечный автомат. Теорема ***59*** позволяет, в частности, сделать вывод о том, что класс параллельных $L(\tau_n)$-языков весьма неустойчив даже относительно изменения его языков на конечные подмножества слов. Совместно с другими результатами по незамкнутости класса параллельных $L(\tau_n)$-языков относительно целого ряда важных теоретико-множественных *операраций* [32,57-60,233] теоремы ***57-59*** подтверждают сильный ***иммунитет*** данного класса параллельных формальных языков в этом направлении. Данный феномен существенно отличает класс параллельных $L(\tau_n)$-языков от традиционных семейств формальных языков, рассматриваемых в классической ***ТФГ*** [5,32,88,90,389,390,536].

Одним из возможных путей исследования структуры параллельных τ_n-*грамматик* является подход, состоящий в наложении частичных *ограничений* непосредственно на определения различных их компонент с последующим изучением *влияния* таких ограничений на порождаемые грамматиками языки. Целый ряд результатов в данном направлении представлен в нашей монографии [5] и работах [57-60]. Выше уже рассматривались свойства параллельных τ_n-грамматик и генерируемых ими $L(\tau_n)$-языков безотносительно к *внутренней* структуре слов, составляющих такие параллельные языки. В этой связи возникает следующий весьма интересный вопрос.

Бесконечную последовательность слов $S = \{c_k\}$ $(c_k \in C(A,\phi) \mid k=1, 2, 3, ...)$ будем называть ***формульной***, если каждое слово $c_k \in S \subset C(A,\phi)$ может быть структурно представлено в виде одной из конечного числа формул следующего общего вида, а именно:

$$C_k = C_{j_1}(k)C_{j_2}(k)C_{j_3}(k)C_{j_4}(k)\ldots C_{j_h}(k)\ldots C_{j_p}(k)$$
$$(\forall j_m)(\forall k)(C_k, C_{j_m}(k) \in C(A,\phi)); \quad j_m \in \{1,2,3,\ldots\}$$

Формульные последовательности слов являются примерами $L(\tau_n)$-*языков*, в которых составляющие их слова, в некотором смысле, содержат историю своего развития. Парал-

лельный $L(\tau_n)$-язык будем называть ***формульным,*** если соответствующая ему τ_n-грамматика генерирует *формульную* последовательность слов. Так, параллельная грамматика τ_2=<2, {0,1,2}, $\tau^{(2)}$, 120202> с параллельными подстановками вида {00 ⇒ 0, 01 ⇒ 2, 00 ⇒ 0, 43 ⇒ 1, 10 ⇒ 1, 03 ⇒ 4, 02 ⇒ 3, 13 ⇒ 1, 21 ⇒ 2, 04 ⇒ 0} генерирует формульный язык следующего вида $L(\tau_2)=\{c_{2k-1}, c_{2k}\}$, у которого слова определяются следующим образом:

$$\begin{cases} c_1 = 120202\,, \quad c_2 = 2021212 \\ c_{2k-1} = (12)\,c_{2k-3}\,, \quad c_{2k} = (20)\,c_{2k-2} \end{cases} \qquad (k = 2,3,4,\ldots)$$

В качестве интересного класса формульных языков можно привести $L(\tau_n)$-языки, генерируемые τ_n-грамматиками, определяемыми *линейными* классическими ***1-OC,*** рассмотренными в главе ***3.*** Можно показать [73], что каждый параллельный $L(\tau_n)$-язык, генерируемый соответствующей τ_n-грамматикой, определяемой классической *линейной* ***1-OC,*** является ***формульным.*** Это является еще одним видом *общей* характеристики порождающих возможностей такого класса ***OC***-моделей, обобщаемой и на ***d***-мерный случай. В качестве примера можно привести параллельный язык $L(\tau_n)=\{c_o=1, c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots\}$, генерируемый грамматикой τ_2=<2, {0,1}, $\tau^{(2)}$,1>, где $\tau^{(2)}$-правила определяются линейной локальной функцией $\sigma^{(2)}(x,y) = x+y \ (mod\ 2)$. Нетрудно убедиться, что структура c_k-слов в генерируемом такой τ_2-грамматикой языке определяется следующими рекуррентными формулами, а именно:

$$c_o = \square 1 \square; \qquad c_1 = \square 11 \square; \qquad c_{k+j} = \square c_j 0^{k-j-1} c_j \square; \qquad \{j=0\ldots(k-1),\ k=2^p,\ p=1,2,3,\ldots\}$$

где конструкция $c_j 0^m c_j$ обозначает *конкатенацию* слов c_j и слова из m **0**-символов. Читателю в качестве полезного упражнения рекомендуется проверить данное утверждение, а также обобщить его на случай алфавита $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ τ_2-грамматики. Таким образом, понятие ***формульности*** параллельных $L(\tau_n)$-языков оказывается достаточно хорошо характеризуемым классом *линейных* классических ***OC***-моделей. Легко показать, что любой конечный параллельный $L(\tau_n)$-язык является *формульным* и любой формульный $L(\tau_n)$-язык рекурсивен. Обратные же утверждения в общем случае не имеют места [32].

Введенное понятие ***формульности*** представляет несомненный интерес при исследованиях синтаксической структуры параллельных языков, генерируемых τ_n-грамматиками. Более того, это понятие тесно связано с использованием классических ***d-OC*** в качестве *среды* моделирования различных параллельных процессов, объектов и алгоритмов. В связи с чем возникает весьма актуальная проблема определения *формульности* произвольного параллельного $L(\tau_n)$-языка, являющаяся, на наш взгляд, алгоритмически неразрешимой. В связи с понятием формульности возникает и обратная проблема: ***Определить $L(\tau_n)$-язык заданной формульности,*** решаемая отрицательно уже для достаточно простых типов формульности. Так, например, следующее формульное множество слов $L=\{c_o, c_1, \ldots, c_m; c_k=c_{k-2}c_{k-1} \mid k \geq m\}$ не может быть параллельным $L(\tau_n)$-языком. Несмотря на ряд полученных результатов [5,32,57-60,82,83,90], на сегодня мы располагаем достаточно скудной информацией по проблеме формульности параллельных языков $L(\tau_n)$, поэтому работа в этом направлении представляет определенный интерес. Представив и обсудив основные свойства параллельных τ_n-грамматик и определяемых ими $L(\tau_n)$-языков, переходим к обсуждению их взаимосвязи с другими известными грамматиками, включая и параллельные грамматики других типов и классов.

5.2. Параллельные грамматики, определяемые ОС-моделями, и формальные грамматики других классов и типов

В связи с существованием целого ряда *классов грамматик* (*как традиционных*, *так и параллельных*) представляется интересным сравнить их возможности относительно порождаемых ими формальных языков. Данная методика является *одной* из наиболее естественных и традиционных в современной ***ТФГ***. Поэтому, введя параллельные τ_n-грамматики, вполне естественно сравнить их порождающие возможности с уже исследованными формальными грамматиками других типов и классов. Полученные в данном направлении результаты исследований позволяют не только получать интересные со многих точек зрения сравнительные оценки для нового класса параллельных грамматик, определяемых классическими ***ОС***-моделями, но и с несколько иной стороны оценивать сами параллельные τ_n-грамматики и генерируемые ими формальные параллельные языки.

Занимаясь вопросами разработки математического аппарата моделирования для биологии развития на клеточном уровне, ***Е.С. Щербаков*** ввел новый класс параллельных грамматик [261], получивших впоследствии название ***Sb(m)***-грамматик, определяемых следующим образом. В качестве правил вывода в таких ***Sb(m)***-грамматиках используются параллельные продукции следующего общего вида:

$$Sb: \begin{cases} x_1 x_2 x_3 \dots x_m \Rightarrow y_1 y_2 y_3 \dots y_p \\ 0\,0\,0\,0\,0 \dots 0 \Rightarrow 0\,0\,0\,0\,0 \dots 0 \end{cases} \qquad (42)$$
$$(x_k, y_j \in A;\quad k = 1..m;\ j = 1..p;\ 1 \le p \le m)$$

которые характеризуются одновременным применением к любому конечному слову в ***A***-алфавите. Так как длины правых частей *параллельных подстановок* в (**42**) в общем случае могут превышать ***1***, то при определении результата *применения* продукций к некоторому слову в ***A***-алфавите возможно возникновение *неоднозначности* в какой-либо его позиции. Поэтому к продукциям вывода (**40**) добавляется простая функция *выбора* следующего состояния, а именно:

$$W(h_1, h_2, h_3, \dots, h_v) \in A \qquad h_k \in A; \quad (k=1 \dots v;\ 1 \le v \le r) \qquad (43)$$

позволяющая в точке неопределенности выбирать из нескольких h_k состояний-претендентов единственное для данной конкретной неопределенности. При сделанных предположениях параллельная ***Sb(m)-грамматика*** вводится следующим образом.

<u>Определение 18</u>. Параллельная Sb(m)-грамматика есть упорядоченный кортеж следующего вида Sb(m) = <A, c_o, Sb, W>, в котором:

1) ***A – терминальный конечный непустой алфавит;***
2) ***Sb – параллельные продукции вывода вида (42);***
3) ***W – функция выбора состояния (43) в точке неоднозначности;***
4) ***c_o – аксиома параллельной грамматики.***

Множество слов, генерируемое такой Sb(m)-грамматикой, называется Sb(m)-языком.

Показано, что по порождающим языковым возможностям параллельные грамматики ***Sb(m)*** и τ_n эквивалентны, а именно, имеет место следующий основной результат [60].

<u>Теорема 60</u>. Для каждой параллельной Sb(m)-грамматики существует строго эквивалентная ей τ_n-грамматика [$n = max_k(m_k) + max_k(p_k) - 1$, ***если*** $m,p \ge 1$; ***и*** $n = 2m-1$ ***в противном случае***].

Результат данной теоремы ***60*** является еще одним существенным аргументом в пользу подтверждения достаточно высокой степени *общности* понятия классических ***1-ОС*** как грамматик с параллельными подстановками в качестве правил вывода. Ниже будет отмечено, что требование параллельного применения *изотонных* продукций в *изотонных структурных грамматиках* ***(ИСГ)*** приводит к понятию *параллельных грамматик* ***(ПГ).*** Так как длины правых частей параллельных продукций следующего вида**:**

$$X_1^k X_2^k X_3^k X_4^k \ldots X_{m_k}^k \Rightarrow Y_1^k Y_2^k Y_3^k Y_4^k \ldots Y_{n_k}^k$$
$$(X_j^k, Y_q^k \in A;\ j=1..m_k;\ q=1..n_k;\ k=1..p) \qquad (44)$$

в ***ПГ*** могут превышать ***1,*** то для устранения возможной *неоднозначности* при параллельном применении продукций вывода (**44**) к перерабатываемым грамматикой словам задается ***(****подобно случаю* ***Sb(m)****-грамматик****)*** функция ***W*** (**43**) однозначного выбора состояния. Используя теперь развитый нами подход [60], можно показать, что для любой ***ПГ*** с параллельными продукциями вида (**44**) при выполнении условия $(\forall k)(m_k = n_k)$ и ***W***-функцией однозначного выбора состояния существует строго эквивалентная ей параллельная τ_{2m-1}-грамматика $(m = max_k\{m_k\})$, заданная в том же самом ***A***-алфавите.

Более того, даже для достаточно широкого класса ***ПГ,*** заданных в ***A***-алфавите, с продукциями вывода вида (**44**) при выполнении условия $(\forall k)(m_k \geq n_k)$ можно в расширенном алфавите $A \cup \{\#\} (\# \notin A)$ определять параллельные τ_n-грамматики**,** эквивалентные в ***A***-алфавите исходным ***ПГ.*** В данном случае **#**-символ играет роль *пустого* символа, который под действием параллельных продукций ***ЛФП,*** соответствующих ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, постоянно удаляется из *конечных* слов генерируемого языка. Таким образом, ***ИСГ*** с параллельным применением *изотонных* продукций и ряд других типов ***ПГ*** строго эквивалентны соответствующим τ_n-грамматикам, определенным в том же самом ***A***-алфавите. Эти результаты снова подтверждают высокую степень *общности* классического понятия ***ОС***-моделей как порождающих формальных систем с абсолютно *параллельными* правилами вывода. К перечисленным выше результатам тесно примыкают и работы по пространственным грамматикам, чьи языки представляют собой не множества слов, а множества пространственных фигур ***(****областей****).*** Существует несколько способов обобщения фразо-структурных грамматик на грамматики с параллельными правилами вывода, позволяющими замещать одни подобласти фигуры на другие [5,32,88,90,536].

<u>Определение 19</u>. Изотонная структурная грамматика (ИСГ) задается упорядоченным кортежем следующего вида ИСГ = <N, T, #, P, c*>, в котором:

1) ***N – конечный непустой нетерминальный алфавит;***
2) ***T – конечный непустой терминальный алфавит*** $(T \cap N = \emptyset)$***;***
3) ***# – пустой символ изотонной структурной грамматики;***
4) ***P – конечное непустое множество изотонных продукций;***
5) ***c* – аксиома изотонной структурной грамматики.***

Изотонные продукции ***ИСГ*** для одномерного случая принимают вид (**44**), а ее алфавит **–** $A = T \cup N \cup \{\#\}$**.** В этом случае язык ***L(ИСГ)*** есть множество всех конечных слов, определенных в ***T***-алфавите и выводимых из ***c****-аксиомы* посредством *изотонных* ***P****-продукций* грамматики. В ***ИСГ*** **#**-символ выполняет роль *пустого* символа из теории автоматов. Изотонная продукция представляет собой отображение конфигурации конечного блока в новую конфигурацию того же блока. В одномерном случае на изотонные продукции $P \Rightarrow Q$ накладываются ограничения вида $|P| = |Q|$**.** Задавая определенным образом ***ИСГ*** и исследуя деревья вывода в ней, получаем следующий результат [5,8,9,55,88,90].

***Теорема 61**. Для каждой параллельной τ_n-грамматики существует эквивалентная ей ИСГ = <N, T, #, P, a*> с T = A и N = {a*, q_1, q_2, q_3, q_4}.*

Требование параллельного применения изотонных продукций в ***ИСГ*** приводит нас к рассмотренному выше понятию ***ПГ***. Используя теорему ***61***, можно показать, что класс всех параллельных τ_n-грамматик является собственным подклассом класса всех параллельных грамматик. По принципу действия к ***ИСГ*** с параллельными изотонными продукциями достаточно тесно примывают и *параллельные* грамматики, определяемые ***ОС*** *на разбиении* ***(ОСнР)***, которые уже рассматривались выше. Из их определения несложно убедиться, что они также составляют собственный подкласс класса всех параллельных грамматик и их исследование представляется достаточно интересным [83,88,90].

В самом общем случае грамматика *Хомского* является намного более широким понятием, чем активно исследуемые в классической ***ТФГ*** традиционные грамматики. А именно, грамматика ***Хомского*** есть упорядоченная четверка ***CG = <V, W, P, v>***, где:

1) ***V*** и ***W*** – конечные непустые непересекающиеся алфавиты ***($V \cap W = \varnothing$)***;
2) ***P*** – конечное непустое множество продукций вида $x \Rightarrow y$; ***x, y*** – произвольные слова в объединенном алфавите $V \cap W$;
3) $v \in V$ – аксиома формальной грамматики.

В свете сделанного определения представляется весьма интересным установление тех типов параллельных τ_n-грамматик, которые были бы эквивалентны грамматикам Хомского. Как уже отмечалось выше, под *эквивалентностью* двух формальных грамматик понимается совпадение определяемых ими языков. Пусть некоторая параллельная грамматика τ_n генерирует $L(\tau_n)$-язык, удовлетворяющий следующим определяющим условиям. Каждый $L(\tau_n)$-язык – последовательность слов $\{c_o\tau^{(n)t}\}$ ($c_o \in C(A, \phi)$ – аксиома грамматики и $t \geq 0$). Предположим, что для каждого целого $t \geq 0$ слово $\tau^{(n)t+1}$ по отношению к слову $\tau^{(n)t}$ может изменять по длине свой *левый* [*правый*] конец в интервале от $+(n-1)$ [0] до $-m$ [$-m$] символов. Подобный язык будем называть ***m-****левым* [***m-****правым*] $L(\tau_n)$-языком. С учетом сделанных предположений может быть сформулирован следующий достаточно интересный результат [5,32,83,88,90].

***Теорема 62**. Если $L(\tau_n)$-язык является 0-левым и (n-1)-правым языком, то существует грамматика Хомского CG=<V,W,P,v> с W=A и V={v, q_k | k=1 .. 7} такая, что имеет место следующее тождество $L(\tau_n) \equiv L(CG)$.*

В частности, нетрудно убедиться, что $L(\tau_n)$-языки, генерируемые *линейными* τ_n-грамматиками, определяемыми ***ОС***-моделями с линейными ***ЛФП***, относятся к классу ***0-****левых* и ***(n-1)-****правых* языков, что делает применимым к ним результат данной теоремы.

В рамках теории параллельных τ_n-грамматик может быть рассмотрена и формальная модель *асинхронных линейных структур* ***Р. Липтона***, играющая определенную роль в теории программирования, суть которой состоит в следующем. *Асинхронная грамматика* ***АГ = <A, P>*** состоит из конечного непустого ***A***-алфавита и конечного множества ***P***-продукций вида $x \Rightarrow y$, где ***x*** и ***y*** – конечные различные по содержанию, но равные по длине слова, заданные в ***A***-алфавите. Следовательно, асинхронная ***АГ***-грамматика есть некоторая формальная система переработки конечных слов в ***A***-алфавите, сохраняющая их длину. Продукции из ***P***-множества ***АГ***-грамматики моделируют изменения состояний автоматов в терминах их собственных состояний и состояний соседних им автоматов. Из определения ***АГ***-грамматики нетрудно убедиться, что каждая *асинхронная грамматика* определяет конечный язык. А так как любой конечный язык генерируется под-

ходящей τ_n-грамматикой, то класс всех ***АГ-***грамматик составляет *собственный* подкласс класса всех формальных параллельных τ_n-грамматик.

Так как класс параллельных $L(\tau_n)$-языков является *собственным подклассом* класса языков Линденмайера, генерируемых ***L-***системами, то возникает ряд принципиальных вопросов по более детальному установлению соотношений между обоими классами данных формальных языков [10,71-74,162,163]**.** ***Дж. Батлер*** рассмотрел одно такое соотношение, показав, что ***любая классическая 1-ОС моделируется в реальное время PD(m,n)-системой Линденмайера*** [163,251,254]. При этом, ***любая PD(m,n)-система моделируется подходящей классической 1-ОС в общем случае не в реальное время.*** Опираясь на результаты по вычислимости и моделируемости в классических ***d-ОС,*** рассматриваемые нами в последующих главах книги, можно доказать в данном направлении даже существенно более общий результат [5,72-74,536].

<u>Теорема 63</u>. Каждая L-система Линденмайера моделируется подходящей классической 1-ОС в общем случае не в реальное время, и наоборот.

Доказательство настоящей теоремы *неконструктивно* и базируется на теории рекурсивных функций, поэтому вопрос оптимизации основных параметров *моделируемой* и *моделирующей* систем может быть решен на основе оптимизационной техники моделирования в классических ***d-ОС,*** обсуждаемой в следующей главе книги и ряде других наших работ. На наш взгляд, параллельные τ_n-грамматики более удобны для моделирования на структурном уровне, тогда как ***L-****системы* лучше отвечают целям формального описания развивающихся биологических систем. Однако в обоих случаях возникают существенные затруднения при переходе к высшим размерностям [10,53,72-74,88]. Интересный сравнительный анализ обоих типов параллельных систем обработки информации в контексте их биологических приложений представлен в последней главе книги.

К проблематике параллельных τ_n-грамматик тесно примыкают и многочисленные работы по использованию ***ОС-***моделей в качестве *распознавателей* и работы по *пространственным* грамматикам. Прежде всего это относится к распознаванию в реальное время ***ОС-***моделями формальных языков. В данном направлении получен целый ряд весьма интересных результатов. Так, например, ***A.P. Смит*** [265] изучал классы ***1-*** и ***2-***мерных формальных языков, распознаваемых ***ОС-***моделями с ограничением по времени. Вопросы распознавания в реальное время в ***2-ОС*** с входными преобразованиями конечных конфигураций рассматривались ***Х. Нишио*** и ***С. Секи*** [135]. Интересные вопросы распознавания в реальное время формальных языков ***ОС-***моделями размерностей ***1*** и ***2*** и связанные с ними вопросы можно найти в интересной монографии ***Р. Фольмара*** [138]**.** ***A. Hemmerling*** рассматривал вопросы распознавания ***ОС-***моделями в *реальное* время некоторых формальных языков, ***T. Jebelean*** рассматривал ***ОС-***модели в качестве параллельных распознавателей формальных языков. Как показал ряд авторов ***(Smith, Dyer, Ibarra*** *и др.****)***, линейные, Дика и скобочные контекстно-свободные языки распознаются ***ОС-***моделями ***(****и даже с однонаправленным потоком информации****)*** в реальное время [536]**.** Более того показано, что недетерминированные ограниченные **(***ограничен вход, тогда как все другие единичные автоматы находятся в состоянии «покоя», оставаясь в нем в течение вычисления****)*** ***ОС-***модели могут распознавать контекстно-свободные языки в режиме реального времени. Однако для случая детерминированных ***ОС-***моделей вопрос пока открыт.

Как показали ***R. Sommerhalder*** и ***S. Westrhenen,*** если число шагов вычисления фиксировано **(***однако зависит от распознаваемого языка****)*****,** то множество языков**,** распознаваемых недетерминированной ***1-ОС*** совпадает с множеством *регулярных* языков. При этом, в данном случае распознавание определяется всеми единичными автоматами ***1-ОС*** в состояниях, отличных от состояния «*покоя*»**,** фиксирующих некоторое заключительное состояние. Данное понятие распознавания позволяет распознавать языки даже быстрее, чем

в *реальное* время. ***O. Ibarra*** и другие показали, что существуют неконтекстно-свободные языки, распознаваемые ***OC***-моделями за время ***O(log n)***, и что формальные языки, принимаемые ими за время ***O(log n)***, регулярны [536]. При этом, некоторые классы языков могут определяться как ограничением, так и расширением возможностей ***OC***-моделей, используемых для их распознавания либо принятия. Это обеспечивается определением четырех специальных условий, которым должна удовлетворять та или иная ***OC***-модель [536,565]. Соотношения между этими четырьмя классами ***OC***-моделей и их связью с традиционными классам формальных языков исследовались весьма интенсивно. Хороший обзор результатов и методов в данном направлении дан ***M. Mahajan***, там же можно найти некоторые дополнительные примеры языков согласно упомянутой классификации ***OC***-моделей и проблемы для дальнейшего исследования [536], тогда как характеристика наиболее важных из них представлена в обзоре [565]. В настоящее время немало число работ посвящено вопросам улучшения характеристик распознавания ***OC***-моделями различных типов и классов формальных языков как традиционных, так и специальных. Целый ряд весьма интересных работ посвящен использованию ***OC***-моделей в качестве ***генераторов*** специального вида языков, например, фрактального типа [154]. С работами в данном направлении можно ознакомиться в [166,173-176,211,240,265,297,404,536].

В последние годы значительное внимание привлекают и пространственные грамматики, чьи языки представляют собой множества пространственных фигур (*областей*), а не одномерных строк (*слов*). Так, ***П. Ванг*** и ***В. Гроски*** [263] рассмотрели взаимосвязь между ***OC***-моделями, *параллельными пространственными грамматиками* (***ППГ***) и *параллельными программируемыми пространственными грамматиками* (***ПППГ***), имеющими большие потенции как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Ими были исследованы общие возможности генерации *пространственных* языков посредством *параллельных* грамматик, определяемых ***OC***-моделями, ***ППГ*** и ***ПППГ***. Наряду с рядом весьма интересных результатов в данном направлении было, в частности, показано, что по порождающим языковым возможностям τ_n-грамматики и ***ППГ*** эквивалентны и существует конструктивный метод перехода от ***ППГ*** к параллельным грамматикам, определяемым классическими ***OC***-моделями. Много вопросов остается в данной области открытыми, но наиболее важными представляются вопросы расширения исследований по *параллельным* грамматикам, определяемым различными типами ***OC***-*моделей*. В следующем разделе результаты по параллельным τ_n-грамматикам обобщаются на случай ***недетерминированных*** одномерных ***OC***-моделей.

5.3. Параллельные грамматики, определяемые недетерминированными однородными структурами

Важным обобщением понятия параллельной τ_n-грамматики является недетерминированная T_n-грамматика, которая для каждого дискретного момента времени $t>0$ допускает один либо более (*но конечное число*) вариантов выбора параллельных правил вывода. Параллельная *недетерминированная* грамматика определяется следующим образом.

Определение 20. Параллельной недетерминированной T_n-грамматикой (НТГ) называется упорядоченная четверка следующего вида $T_n = <n, A, W_n, c_0>$, в которой:

1) ***n – индекс грамматики (максимальный размер шаблона соседства используемых одномерных ГФП);***
2) ***A – конечный непустой алфавит грамматики;***
3) ***W_n – допустимое конечное множество правил вывода (ГФП);***

4) c_o – аксиома грамматики (начальная конечная конфигурация).

Параллельным языком $L(T_n)$ будем называть множество всех слов, генерируемых из аксиомы $c_o \in C(A,\phi)$ посредством параллельных правил вывода из допустимого множества **ГФП** $W_n = \{\tau_1^{(n_1)}, \tau_2^{(n_2)}, \tau_3^{(n_3)}, ..., \tau_k^{(n_k)}\}$ $(n = max_j\{n_j\}; j = 1..k)$.

Из определений параллельных τ_n-грамматик и T_n-грамматик нетрудно заметить, что *первые* являются частным случаем вторых. Как и в случае τ_n-грамматик, будем рассматривать *недетерминированные* ***1-ОС***, определяющие соответствующие им параллельные T_m-грамматики. Один из наиболее важных результатов в теории конечных автоматов состоит в том, что класс формальных языков, определяемых *недетерминированными* конечными автоматами, совпадает с классом языков, порождаемых полностью определенными *детерминированными* конечными автоматами. В случае же параллельных τ_n- и T_m-грамматик имеет место совершенно иная картина, характеризуемая следующим основным результатом [5,32,71,88,90,536].

<u>Теорема 64</u>. Существуют $L(T_m)$-языки, не являющиеся $L(\tau_n)$-языками, но существуют и регулярные языки, не являющиеся ни $L(T_m)$-, ни $L(\tau_n)$-языками.

Таким образом, в отличие от случая конечных автоматов *недетерминизм* правил вывода для параллельных грамматик, определяемых недетерминированными ***ОС***-моделями, расширяет их порождающие языковые возможности. Рассмотрим теперь *порождающие* языковые возможности параллельных недетерминированных T_m-грамматик в зависимости от их W_n-правил вывода. При сделанных определениях и предположениях имеет место следующий основной результат [5,32,71,88,90,536].

<u>Теорема 65</u>. Любое конечное множество слов, определенных в А-алфавите, является и $L(T_m)$-языком для соответствующей параллельной недетерминированной T_m-грамматики. Для каждого целого числа $m \geq 2$ существуют бесконечные регулярные (даже конечные) множества слов, которые не могут быть порождены никакой параллельной недетерминированной T_m-грамматикой, но могут порождаться и соответствующей T_{m+1}-грамматикой и даже детерминированной параллельной τ_{m+1}-грамматикой.

Из результата данной теоремы следует, что *недетерминированность* сохраняет порождающие языковые возможности τ_n-грамматик относительно *регулярных* языков и для класса параллельных T_m-грамматик. Аналогично случаю *параллельных* τ_n-грамматик и для *недетерминированных* T_m-грамматик сохраняет силу весьма важный результат, характеризующий формальные $L(T_m)$-языки с «***програмистской***» точки зрения [71,88,90,536].

<u>Теорема 66</u>. Класс всех недетерминированных $L(T_m)$-языков незамкнут относительно операции пересечения с регулярными множествами слов.

Таким образом, и в случае недетерминированных параллельных T_m-грамматик невозможно определять приемлемую формальную автоматную модель *распознавателей* в общепринятом смысле, допускающих $L(T_m)$-язык. В принципе, подобный результат следовало ожидать, ибо, по нашему мнению, такая ситуация определяется, прежде всего, абсолютно *параллельным* способом применения в грамматике правил вывода, тогда как известные на сегодня традиционные автоматные модели распознавателей в своей основе базируются на сугубо последовательном принципе обработки с четко выраженным централизованным управлением. Тогда как ***ОС***-модели, будучи параллельными динамическими системами, исповедуют именно *децентрализованный* принцип управления.

Рассмотрим теперь вопрос ***замкнутости*** класса всех недетерминированных параллельных $L(T_m)$-языков относительно ряда традиционных для классической ***ТФГ*** операций. В разделе ***5.1*** отмечалось, что класс *всех* детерминированных $L(\tau_n)$-языков незамкнут относительно практически всех основных операций, рассматриваемых в качестве базовых в ***ТФГ*** [336,389,390,536]**.** Представляет большой интерес исследование этих вопросов также и для класса *недетерминированных* $L(T_m)$-языков. Полученные в данном направлении результаты выражает следующая основная теорема [5,61,88,90,536].

Теорема 67. Класс всех недетерминированных $L(T_m)$-языков замкнут относительно операции инверсии и незамкнут относительно операций пересечения, объединения, дополнения, произведения, конечного преобразования и гомоморфизма.

Следовательно, и здесь для *недетерминированных* $L(T_m)$-языков картина полностью аналогична случаю *детерминированных* $L(\tau_n)$-языков, однако данный вопрос требует дальнейшего исследования. Введем еще одну важную операцию ***(τ^*-операцию)*** над языками $L(T_m)$**.** Пусть подмножество слов $L \subset C(A,\phi)$ является $L(T_n)$-языком, а τ^* **–** произвольная ***ГФП,*** определенная в ***A***-алфавите. Определяем множество конечных слов как $\tau^*(L) = \{x \mid x=\tau^*(x`);\ x` \in L\}$**.** Возникает весьма интересный вопрос**:** ***всегда ли словарное множество $\tau^*(L)$, где L – произвольный недетерминированный $L(T_n)$-язык, снова будет языком того же класса?*** Ответ на данный вопрос отрицателен. Операции *левого* и *правого* деления ***L***-языка на конечное ω-*слово*, заданные в ***A***-алфавите, определяются и обозначаются соответственно следующим образом**:** $\omega\backslash L=\{x \mid \omega x \in L\}$ и $L\backslash\omega=\{x \mid x\omega \in L\}$. Показано [5,71], что класс всех *недетерминированных* $L(T_m)$-языков ***незамкнут*** относительно указанных двух операций**,** что и резюмирует следующая теорема**,** представляющая определенный интерес с точки зрения грамматических свойств T_m-моделей, как генераторов языков.

Теорема 68. Класс всех недетерминированных $L(T_m)$-языков незамкнут относительно τ^*-операции и операции левого (правого) деления на произвольное конечное слово, определенное в том же самом конечном A-алфавите.

Таким образом, приведенные результаты показывают, что класс всех *недетерминированных* параллельных $L(T_m)$-языков обладает таким же сильным иммунитетом к операции ***замкнутости*** относительно важнейших операций классической ***ТФГ,*** что и класс всех *детерминированных* $L(\tau_n)$-языков. В работе [53] показано, что класс всех $L(\tau_n)$-языков является *собственным подклассом* класса всех языков, порождаемых $<k, p>$-системами Линденмайера, а класс таких языков незамкнут относительно всех *основных* операций классической ***ТФГ.*** Следовательно, сужение $<k, p>$-класса ***L***-языков до класса $L(\tau_n)$-языков минимально расширяет множество *операций***,** относительно которых эти языки замкнуты. Представляется весьма интересным проследить в деталях влияние на этот факт расширения класса $L(\tau_n)$-языков до класса всех недетерминирванных $L(T_m)$-языков.

Среди всех *недетерминированных* $L(T_m)$-языков естественно вводится ***иерархия*** *сложности* в смысле множества порождаемых ими языков. На основе теоремы ***65*** легко получить и соотношение $(\forall m \geq 2)(\#L(T_{m-1}) < \#L(T_m))$**,** где $\#L$ **–** мощность произвольного ***L***-множества. Таким образом, множества формальных языков, определяемых параллельными недетерминированными T_m-грамматиками, упорядочиваются согласно значения ***m***-индекса грамматики, и среди них существует бесконечно много классов сложности в указанном выше смысле. А так как *недетерминированная* T_m-грамматика может порождать также и нерекурсивные формальные языки, то $L(T_m)$-язык имеет непустое пересечение с языками ***Клини,*** контекстно-свободными и контекстно-зависимыми языками. При этом, оче-

видно, что параллельные *детерминированные* $L(\tau_n)$-языки составляют ***собственный*** подкласс класса всех формальных недетерминированных $L(T_m)$-языков.

С другой стороны, на основании теоремы ***65*** существуют $L(\tau_n)$-языки, не являющиеся $L(T_m)$-языками при условии $m \le n-1$. При этом известно [32], что для каждой параллельной детерминированной τ_n-грамматики существует эквивалентная ей **<*k*, *p*>-**система Линденмайера **(*k*+*p*=*n*)**, тогда как обратное в общем случае неверно. Исходя из данного результата, легко доказать, что для каждой T_m-грамматики существует эквивалентная ей *недетерминированная* **<*k*, *p*>-**система ***Линденмайера* (*k*+*p*=*m*)**, тогда как обратное в общем случае неверно. Таким образом, параллельные *недетерминированные* $L(T_m)$-языки являются собственным *подклассом* класса всех языков, определяемых известными **<*k*, *p*>-**системами ***Линденмайера***. Исходя из вышесказанного, на рис. ***21*** представлены пересечения множеств недетерминированных $L(T_m)$-языков с множествами ряда известных в классической иерархии ***Хомского*** формальных языков.

На этом завершается представление *основных* полученных нами результатов по теории параллельных τ_n- и T_m-грамматик, определяемых соответственно классическими и недетерминированными одномерными ***ОС***-моделями. При этом, нами в настоящей книге не рассматривается целый ряд весьма важных и интересных вопросов, связанных с изучением ***ОС***-моделей в качестве ***акцепторов*** формальных языков. Данные вопросы достаточно интенсивно исследовались такими авторами, как ***A. Hemmerling, K. Culik. A.R. Smith, T. Jebelean, S. Kosaraju, M. Nordahl*** и ряд других; работы в этом направлении могут быть найдены в [536]. Прежде всего, данные исследования касались вопросов распознаваемости известных формальных языков в иерархии ***Хомского ОС***-моделями. Переходим теперь к обсуждению алгоритмических аспектов теории параллельных языков, определяемых ***ОС***-моделями рассмотренных выше типов.

5.4. Алгоритмические проблемы теории параллельных грамматик, определяемых классическими однородными структурами

Проблемы алгоритмической разрешимости играют чрезвычайно важную роль в современной математике. Данные проблемы относятся к так называемому классу ***массовых проблем***, для которых требуется установить наличие либо отсутствие общего разрешающего алгоритма. В теоретической и математической кибернетиках ***неразрешимые*** алгоритмические проблемы довольно часто возникают в задачах анализа динамики преобразователей дискретной информации **(***в частности***,** *бесконечных автоматов различного типа***)**, из которых в настоящей главе рассматриваются *лингвистические* аспекты ***ОС***-моделей. Действительно, в рамках *конечных* систем проблемы алгоритмической разрешимости не носят столь актуального характера, ибо в худшем случае многие решения можно получать **(***пусть и не столь эффективным***)** методом простого перебора соответствующих возможностей и вариантов. Большое место в теории порождающих грамматик занимают алгоритмические проблемы, в частности, проблемы существования алгоритмов, распознающих по формальной грамматике определенного класса или типа, обладает ли порождаемый ею формальный язык тем или иным указанным свойством.

В настоящее время не на все вопросы алгоритмической разрешимости в теории параллельных грамматик, определяемых ***ОС***-моделями, имеются ответы. В данном разделе представлены результаты решения ряда алгоритмических проблем для параллельных

***L*(τ_n)-** и ***L*(T_m)-**языков, характеризующих, в основном, конструктивные и динамические свойства соответствующих им однородных структур. Приведем теперь математические формулировки наиболее известных массовых проблем в данном направлении.

1. ***Проблема пустоты: Существует ли алгоритм, позволяющий определять, будет ли порождаемый произвольной формальной грамматикой язык пустым?***

2. ***Проблема полноты: Существует ли алгоритм, позволяющий определять существование возможности у произвольной формальной грамматики порождать язык, который содержит все непустые конечные слова, заданные в ее алфавите?***

3. ***Проблема конечности: Существует ли алгоритм, позволяющий определять, будет ли конечным язык, порождаемый произвольной формальной грамматикой?***

4. ***Проблема принадлежности: Существует ли алгоритм, позволяющий выявлять принадлежность произвольного конечного слова, заданного в алфавите произвольной формальной грамматики, порождаемому данной грамматикой языку?***

5. ***Проблема тождественности: Существует ли алгоритм для определения тождественности языков, порождаемых двумя произвольными грамматиками?***

6. ***Проблема простоты: Существует ли алгоритм, позволяющий определять, будет ли порождаемый произвольной формальной грамматикой язык регулярным, контекстно-свободным или контекстно-зависимым?***

7. ***Проблема формульности: Существует ли алгоритм для выявления формульности языка, порождаемого произвольной формальной грамматикой?***

8. ***Проблема существования предела: Пусть G – некоторая формальная грамматика. Если для нее существует слово $c^* \in L(G)$ такое, что для любого слова языка $c \in L(G)$ посредством правил вывода грамматики порождается и последовательность, содержащая c^*-слово, то вполне естественно определять c^*-слово, как предел процесса вывода в данной грамматике. Предел для случая параллельных грамматик, определяемых ОС-моделями, представляет собой своего рода точку устойчивости процесса вывода слов параллельного языка. Во многих случаях предел может быть только потенциально достижимым, например, в случае неограниченного роста длины выводимых в языке слов. С учетом сделанных предположений проблема сводится к вопросу наличия алгоритма для определения существования у языка L, порождаемого произвольной грамматикой, предела в указанном выше смысле.***

9. ***Проблема пустоты пересечения: Существует ли алгоритм, определяющий пустоту пересечения двух языков, порождаемых произвольной формальной грамматикой?***

10. ***Проблема существования: Существует ли алгоритм, определяющий, будет ли произвольное подмножество конечных слов, заданных в А-алфавите, некоторым языком произвольной формальной грамматики, заданной в том же самом алфавите?***

Без сомнения, представленные выше проблемы ***алгоритмической разрешимости*** являются наиболее важными математическими проблемами общей теории параллельных грамматик, определяемых ***ОС-***моделями, как, впрочем, и другими формальными системами. На основе ряда наших результатов исследований по ***ТОС-***проблематике можно сформулировать следующую основную теорему [5,32,54-56,71-74,88,90,536].

Теорема 69. Проблемы конечности, принадлежности, тождественности, существования предела, пустоты пересечения и существования являются алгоритмически неразрешимыми для параллельного L(τ_n)-языка, порождаемого произвольной параллельной τ_n-грамматикой. Это же справедливо и для случая L(T_m)-языков.

Тогда как *разрешимость* проблем ***пустоты*** и ***полноты*** легко следует соответственно из самого определения параллельного ***L*(τ_n)-**языка (*содержит, по меньшей мере, аксиому* τ_n-

грамматики) и простого следствия из теоремы ***36*** *(раздел* ***3.1****)*, устанавливающих *невозможность* генерации ***C(A,d,ϕ)-***множества из *конечного* множества начальных конечных ***КФ*** посредством какой-либо глобальной функции перехода, определенной в том же самом ***A-***алфавите и той же ***d-***размерности. В то же время полностью либо частично остаются открытыми сформулированные выше проблемы формульности и простоты. При этом, если проблема формульности остается полностью открытой, то относительно проблемы простоты имеется существенный результат, выражаемый следующей основной теоремой [5,54-56,88,90].

Теорема 70. Проблемы простоты для случая регулярных и контекстно-свободных параллельных $L(\tau_n)$-языков алгоритмически неразрешимы.

В свете результата данной теоремы вполне реальным представляется и *неразрешимость* проблемы ***простоты*** в *целом***.** Более того, из теоремы ***70*** и результатов исследований по конечным автоматам следует *неразрешимость* проблемы *эквивалентности* произвольной параллельной τ_n-грамматики в контексте порождаемых ею *языковых* возможностей *(недетерминированному)* конечному автомату, а также *(одностороннему недетерминированному)* автомату с магазинной памятью. Таким образом, проблема сопоставления параллельных $L(\tau_n)$-языков с известными традиционными *распознавателями* из иерархии Хомского ***алгоритмически неразрешима***, что представляет достаточно сильный результат в теории формальных параллельных τ_n-грамматик [5,54-56].

Подобно случаю параллельных $L(\tau_n)$-языков аналогичные массовые задачи на *разрешимость* существуют и для *недетерминированных* $L(T_m)$-языков. А так как класс всех $L(\tau_m)$-языков является собственным *подклассом* класса всех $L(T_m)$-языков, то это позволяет перенести приведенные выше результаты по алгоритмической разрешимости также на случай параллельных *недетерминированных* $L(T_m)$-языков. При этом следует иметь в виду, что *неразрешимость* массовой проблемы предполагает лишь отсутствие единого *разрешающего* ее алгоритма в его современном понимании. Тогда как для отдельных задач класса вполне возможны *индивидуальные разрешающие* алгоритмы. В случае *классических* ***OC-***моделей подобная ситуация является достаточно распространенным явлением. На этом завершается представление основных результатов теории параллельных грамматик, определяемых классическими и недетерминированными одномерными ***OC-***моделями, которые позволяют не только получать удовлетворительные лингвистические характеристики динамических свойств ***OC-***моделей, но и предоставляют новые средства исследования ***OC-***моделей в целом. Между тем, в данном направлении остается целый ряд открытых проблем и перспективных направлений исследования, основным из которых следует считать распространение теории параллельных грамматик данного типа на случай высших размерностей [536].

К проблеме существования непосредственно примыкает и более частная для бесконечных ***OC-***моделей *проблема идентификации* ***OC-***модели по известным результатам ее динамики. Суть ее сводится к определению ***OC-***модели в *терминах* ее ***ЛФП*** по известным порождаемым ею последовательностям $\Omega_k=<c_k>[\tau^{(n)}]$, т.е. *конструктивное* определение вида ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ по известным генерируемым соответствующей ей ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ Ω_k-последовательностям ***(k=1..v)*** конечных ***КФ.*** Данная проблема аналогична случаю *классической* теории конечных автоматов, когда в экспериментах с конечным автоматом *(как черным ящиком)* выясняется его внутренняя логическая организация, т.е. ***таблица,*** определяющая в общем случае *выход* автомата по его *входу* и *внутреннему состоянию***.** Эксперимент состоит в подаче на вход автомата входных последовательностей символов *(слов)* и анализа выдаваемой им выходной последовательности символов**;** т.е. в результате экспери-

мента производится идентификация автомата по результатам анализа его реакции на входные последовательности слов. При этом, теория конечных автоматов имеет дело с целым рядом различного типа и назначения экспериментов по идентификации логической внутренней структуры конечного автомата либо отдельных ее составляющих. Довольно подробное обсуждение данной проблематики можно найти, например, в работах [226,266,281,282,536].

Проблема *идентификации* в случае бесконечной ***ОС-***модели сводится к определению ее ***ЛФП*** по генерируемой структурой последовательности $\mathbf{\Omega_k}=<c_k>[\tau^{(n)}]$ конфигураций, т.е. по ее конкретным истории или конечному числу историй. При этом предполагается известной ***d-***размерность искомой ***ОС-***модели, определяемая размерностью генерируемых ею конфигураций. И в этом случае проблема идентификации сводится к установлению *внутренней логической* структуры ***ОС-***модели по ее поведению**:** *вход* **(***текущая* ***КФ*** *структуры* **–** *глобальное внутреннее состояние***)** под действием ***ГФП (ЛФП)*** переводится в следующее *внутреннее* состояние, отождествляемое с *выходом* структуры**;** т. е. ***ОС-***модель можно рассматривать как *бесконечный* автомат Мура. Интересная по своей сути, данная проблема для *бесконечных* ***ОС-***моделей не носит столь объемлющего характера, ибо в общем случае она алгоритмически неразрешима.

Первым к исследованию данной проблемы для случая ***ОС-***моделей приступил ***А. Адаматский,*** получивший ряд интересных результатов по проблеме идентификации классических и ряда других типов *конечных* ***ОС-***моделей [161,183,189,267]. Для случая конечных ***ОС-***моделей проблемы как существования**,** так и идентификации алгоритмически разрешимы, ибо они генерируют только конечные $L(\tau_n)$**-**языки. Задача здесь сводится к получению оптимального конструктивного алгоритма идентификации, ибо в худшем случае получение алгоритма сводится к методу простого перебора. Сама же суть оптимального алгоритма *идентификации* достаточно проста и сводится к следующей тестирующей процедуре **(***не нарушая общности***,** *рассматривается на примере* ***1-ОС*****).**

В процессе эксперимента с *идентифицируемой* классической ***1-ОС*** выбирается несколько шагов некоторой ее $\mathbf{\Omega_k}$**-**последовательности и производится попытка определения ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ структуры **(***анализ начинается с минимального значения* $n=2$**),** т.е. на основе анализа пар ***КФ*** из некоторой **Ω-**истории ***ОС-***модели делается попытка полного определения набора *параллельных* подстановок вида**:** $x_1x_2 \dots x_n \Rightarrow x`_1$ $(x_k, x`_1 \in A;\ k=1..n)$**,** определяющих ***ЛФП*** идентифицируемой ***ОС-***модели. При этом, если для какого-либо кортежа $<x_1,x_2,\dots,x_n>$ обнаруживается *неоднозначность* в установлении значения $\sigma^{(n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)$**,** то производится увеличение размера ***(n)*** *шаблона соседства* ***(ШС)*** на единицу и описанная процедура *идентификации* повторяется. Несложно убедиться, что для *конечной* ***ОС-***модели данная процедура завершается за вполне определенное число шагов. На ее основе можно решать *частную* проблему идентификации также для бесконечных ***ОС-***моделей при условии ограничения на размер их шаблонов соседства**;** иначе вышеописанный алгоритм идентификации не сможет остановится через любое наперед заданное конечное число шагов, определяя в общем случае алгоритмическую неразрешимость проблемы идентификации в целом.

В общем же, как проблема *существования***,** так и проблема *идентификации* уже для классических ***1-ОС*** алгоритмически неразрешимы **(***строгое доказательство второго утверждения является следствием из доказательства первого* [72]**).** Другой способ доказательства второй части данного утверждения базируется на возможности моделирования произвольной машины Тьюринга посредством классической ***1-ОС*** **(**раздел ***1.1,*** п**.** ***9)*** и алгоритмической неразрешимости распознавания машин Тьюринга [260,535]. С другой стороны, алгоритмическая *неразрешимость* обеих массовых задач дает хорошую возможность

использовать ее в качестве достаточно эффективной компоненты общего аппарата исследования массовых задач динамической теории классических ***ОС-***моделей.

Не взирая на алгоритмическую неразрешимость проблем существования и идентификации в общем случае, определенный интерес представляет задача экспериментального установления ***ОС-***модели, генерирующей Ω_k***-***последовательности конечных конфигураций. Предположим, что в результате экспериментов с классической ***1-ОС*** получен следующий набор Ω_k***-***последовательностей конечных конфигураций, а именно**:**

$$\begin{cases} \Omega_1 = C_1^1 \Rightarrow C_1^2 \Rightarrow C_1^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_1^j \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_1^p \\ \Omega_2 = C_2^1 \Rightarrow C_2^2 \Rightarrow C_2^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_2^j \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_2^p \\ ============================== \\ \Omega_q = C_q^1 \Rightarrow C_q^2 \Rightarrow C_q^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_q^j \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_q^p \end{cases} \qquad (45)$$

$$C_k^j \in C(A, \phi);\ w = \max_{j,k}\{C_k^j\};\quad (j = 1..p;\ k = 1..q)$$

Тогда для установления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ структуры, генерирующей такой набор ***КФ-***последовательностей, можно использовать следующую простую процедуру. В Ω_k***-***последовательностях определяется ***КФ*** максимальной ***w-****длины* (**45**) и размер шаблона соседства искомой ***1-ОС*** выбирается как ***n=2w.*** После этого на основе ***КФ-***последовательностей (**45**) определяются параллельные подстановки, задающие искомую ***ЛФП,*** согласно нижеследующей принципиальной схеме (рис. **22***).*

Из приведенной принципиальной схемы (рис. **22***)* несложно усмотривается и сам механизм определения параллельных подстановок *искомой* ***ОС-***модели**,** генерирующей ***КФ-***последовательности (**45**). Так как полученная ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ будет иметь, как правило, завышенный размер ***(n)*** шаблона соседства, то впоследствии можно проводить операцию ее канонизации, состоящую в понижении величины ***n-***значения. При достаточно представительном наборе (**45**) ***КФ-***последовательностей искомая ***ОС-***модель устанавливается вполне однозначно и ее можно ***канонизировать*** в терминах ***ЛФП.***

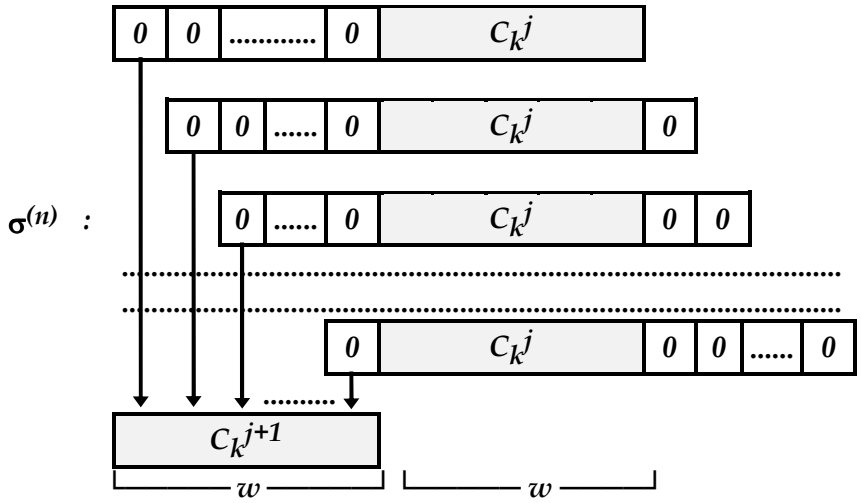


Рис. 22. Иллюстрация принципа определения ЛФП искомой классической ОС-модели.

Задачу *идентификации***,** в нашем случае сводящуюся к следующему**: *Определить локальную функцию перехода по динамике ОС-модели с известным алфавитом внутренних состояний ее единичных автоматов*,** конструктивно можно решать на основе следующего алгоритма. А именно, по истории последовательностей конечных ***КФ*** установить ***ЛФП*** анализируемой структуры. Не нарушая общности, рассмотрим решение данной

задачи для случая ***1-ОС*** с произвольным алфавитом $A = \{0,1,2, ..., a-1\}$. Естественно, при известном индексе соседства $X=\{-n,-n+1, ..., -1,0, 1,2, ..., m\}$ данная задача особых затруднений не вызывает и решается путем анализа результатов генерации структурой последующих ***КФ*** из начальных ***КФ*** $c=...0x_1...x_{n+m+1}0..$ $(x_j \in A;\ j=1..n+m+1)$. Сложнее вопрос обстоит при неизвестном индексе соседства ***X*** классической однородной структуры.

Для решения данной задачи поступим следующим образом. В качестве начальных последовательно выбираются конечные ***КФ*** из множества $C=\{1,2, ..., a-1\}$, помещаются в автомат структуры с ***0***-координатой и вычисляются их последователи, т.е. результат реакции тестируемой ***1-ОС*** на вход ***КФ*** $c_o = k\ (k = 1 .. a-1)$.

	.....	-m-1	-m	.....	-2	-1	0	1	2	.....	n	n+1	.....
c_o	.....	0	0	.....	0	0	k	0	0	.....	0	0	.....
$c_o\tau$	.....	0	x_{-m}	.....	x_{-2}	x_{-1}	x_o	x_1	x_2	.....	x_n	0	.....

На первом шаге в качестве размера ***ШС*** выбирается значение $n+m+1$, где n и m – максимальные *длины* подконфигураций соответственно *справа* и *слева* от ***0***-автомата конфигураций $c_o\tau$, полученных из ***КФ*** $c_o \in C\ (x_{-m} \neq 0, x_n \neq 0)$. Очевидно, что истинное значение ***ШС*** будет не менее $n+m+1$. Тогда как в качестве индекса соседства естественно полагать $X=\{-n, ..., -2,-1,0,1,2, ..., m\}$. Таким образом, параллельные подстановки искомой ***ЛФП*** принимают следующий вид, а именно:

$$x_{-n} ... x_{-1}x_o x_1 ... x_m \to x^*_o \qquad\qquad x_k, x^*_o \in A\ (k = -n .. m)$$

1. Затем на вход тестируемой ***1-ОС*** последовательно подаются ***КФ*** c_1 следующего вида:

-2m-n-1	-2m-n	...	-m-1	-m	...	-1	0	1	...	n	n+1	...	2n+m	2n+m+1
0	0	...	0	x_{-m}	...	x_{-1}	x_o	x_1	...	x_n	0	...	0	0
0	y_{-2m-n}	...	y_{-m-1}	y_{-m}		y_{-1}	y_o	y_1		y_n	y_{n+1}	...	y_{2n+m}	0

в количестве $a^{n+m+1}-1$ и анализируются их последовательности $c_1\tau$. Если наше предположение верно, то автоматы в позициях $-(n+2m+1)$ и $(2n+m+1)$ должны оставаться в состоянии покоя (0) для любых $x_j, x^*_o \in A$, тогда как для каждого кортежа $\langle x_1 ... x_j ... x_{n+m+1}\rangle$ $(j=-m..n)$ в c_1 должно выполняться следующее соотношение, а именно:

$$x_1 ... x_j ... x_{n+m+1} \to x^*_j \equiv y_k \quad (j = 1 .. m+n+1;\ k = -2m-n .. 2n+m)$$

при этом, идентичные кортежи имеют одно и то же значение y_k в ***КФ*** $c_1\tau$ (*непротиворечивость параллельных подстановок*). В противном случае размер ***ШС*** увеличивается на ***1*** и процесс тестирования ***1-ОС*** продолжается с пункта ***1.*** Через конечное число шагов достигается результат решения искомой задачи в виде полного набора непротиворечивых параллельных подстановок ***ЛФП*** тестируемой ***1-ОС.*** Более того, в последующем можно произвольно выбирать индекс соседства в рамках текущего ***ШС*** структуры, что обусловлено тем обстоятельством [1,2], что выбор центрального автомата ***ШС*** не изменяет динамики структуры и в этом отношении ***ЛФП***, определяемые, например, параллельными подстановками следующего вида:

$$x_1 x_2 ... x_j ... x_n \to x^*_j \qquad и \qquad x_1 x_2 ... x_n \to x^*_n \qquad x_j, x^*_j, x^*_n \in A\ (j = 1..n)$$

эквивалентны. Динамика обоих ***1-ОС*** отличается лишь тем, что во втором случае структура генерирует ***КФ*** со сдвигом вправо относительно системы координат Z^1 модели. В общем же случае ***1-ОС*** с ***ЛФП***, определяемыми параллельными подстановками вида:

$$x_1 x_2 ... x_n \to x^*_1; \qquad x_1 x_2 ... x_j ... x_n \to x^*_j \qquad и \qquad x_1 x_2 ... x_n \to x^*_n \qquad (1<j<n)$$

характеризуются направлением передачи информации *влево*, *влево и вправо*, и *вправо* соответственно. Между тем, как показано [3], конструктивные возможности вторых более предпочтительны. Описанный выше конструктивный алгоритм решения задачи идентификации несложно реализуем программно. Обобщение вышесказанного на высшие размерности позволяет сформулировать следующий результат: ***Для классических d-ОС задача идентификации в вышеприведенной постановке имеет конструктивное решение с точностью до выбора центрального автомата ШС, т.е. ее индекса соседства.***

Таким образом, *неразрешимость* общих проблем ***существования*** и ***идентификации*** для классических ***ОС-***моделей предполагает развитие частных подходов к решению данных проблем для ***ОС-***моделей определенных типов либо классов. Это может способствовать появлению целого ряда важных теоретических и прикладных выходов ***ТОС-***проблематики в целом. С другой стороны, можно показать, проблема идентификации конечных ***d-ОС*** конструктивно разрешима и для этого имеются достаточно эффективные компьютерные методы [90]. Предложены методы идентификации конечных ***d-ОС*** с помощью искусственных нейронных сетей, рассмотрены вопросы оценки и обучения нейронных сетей для решения задачи идентификации конечных классических ***d-ОС*** [536].

Весьма интересным представляется изучение параллельных грамматик, определяемых *однородными структурами на разбиении* ***(ОСнР).*** Введенные нами в разделе ***1.2*** и частично рассматриваемые в настоящей монографии, структуры ***ОСнР*** представляют значительный интерес в качестве среды физического моделирования, допускающей относительно несложное программирование такого важного феномена, как ***обратимость*** динамики ***ОСнР-***моделей и алгоритмическую разрешимость этого и ряда других важных феноменов. Уже начальное исследование такого класса параллельных грамматик и порождаемых ими параллельных формальных языков [90] говорит о наличии по ряду важных языковых свойств достаточно существенных *различий* с рассмотренными в настоящей главе параллельными τ_n- и T_m-грамматиками. В первую очередь, это относится к *алгоритмическим* аспектам многомерных параллельных ***ОСнР-***грамматик и определяемых ими языков. Исследования в данном направлении продолжаются с целью получения приемлемого лингвистического описания интересных, прежде всего, с физической точки зрения ***ОСнР-***моделей. Более того, используемые для этих целей подходы могут оказаться весьма полезными и при исследованиях параллельных формальных грамматик, определяемых асинхронными ***ОС-***моделями в целом [536].

Интересным представляется также исследование языков, генерируемых ***ОС-***моделями с «*памятью*», для которых состояние единичного автомата структуры в момент времени ***t+1*** определяется как функция состояний автоматов его ***ШС*** в момент ***t***, а также состоянием данного автомата в момент времени ***t-1. ОС-***модели подобного типа относятся к классу т.н. «*обратимых*», которые не теряют информация с течением времени, т.е. в любой момент ***t*** история динамики конфигураций модели полностью обратима.

В следующей главе рассматриваются вопросы ***ОС-***проблематики, представляющие особый интерес с точки зрения использования классических ***d-ОС*** в качестве весьма перспективной среды моделирования параллельных дискретных процессов и феноменов в различных теоретических и прикладных областях современного естествознания. В первую очередь это относится к фундаментальным проблемам моделирования и декомпозиции глобальных функций перехода в классических ***ОС-***моделях. При этом, понятие ***моделирования (симулирования)*** рассматривается в различных аспектах, представляющих интерес с той либо иной теоретической или прикладной точки зрения.

Глава 6. Проблема моделирования в классических однородных структурах и связанные с ней вопросы

Проблема моделирования в классических ***d-OC*** представляет большой теоретический и прикладной интерес и ей посвящено значительное число работ, содержащих много весьма интересных результатов. Основное направление исследований в данной области связано с моделированием одной ***d-OC*** другой, а именно**:** моделирование в *реальное* время, моделирование с подавлением тех или иных свойств моделируемой структуры, *упрощение* характеристик моделирующей структуры и так далее. И если в рассмотренных выше направлениях ***TOC-***проблематики, практически, не ставились задачи оптимизационного характера, то здесь предполагается использование при моделировании определенной *оптимизационной* техники. В связи с этим вводится понятие ***T-****моделируемости***,** которое оказывается весьма удобным также и при решении многих прикладных аспектов ***TOC-***проблематики. На основе введенного понятия проводится достаточно детальное обсуждение многоаспектной проблемы моделирования на основе классических ***d-OC:*** моделирование в реальное время, моделирование ряда важных процессов и алгоритмов, оптимальное моделирование по заданным критериям и др. Например, моделирование известных алгоритмов посредством классических ***1-OC*** и наоборот позволяет в определенной мере оценить их сложность относительно друг друга, а также решать целый ряд важных алгоритмических проблем динамики ***OC-***моделей. Моделирование одной структуры другой с упрощением основных ***(****или части их****)*** параметров моделирующей структуры и наследованием ею исследуемых свойств моделируемой, в целом ряде случаев позволяет существенно упрощать исследование динамических свойств второй. Так, например, в ряде случаев получаем существенное упрощение задач исследования динамики классических ***d-OC*** путем *сведения* исследования к случаю моделирующих их структур с простыми или простейшими индексами соседства.

Вопросами моделирования в классических ***d-OC*** занимался целый ряд исследователей, из которых следует отметить результаты ***Дж. фон Неймана, А. Беркса, Х. Ямада, С. Аморозо, Х. Нишио, А. Смита, Т. Тоффоли, Э. Кодда, Э. Бэнкса, Дж. Батлера, Р. Фольмара, А.С. Подколзина, В.З. Аладьева*** и целого ряда других**.** Более детальную информацию по данному направлению исследований в ***TOC-***проблематике и ее многочисленным приложениям можно найти в работах [1,3,5,8,9,35,37,54-56,68,73,75,79,80,83,86,90,114,128,130-135,1387,146-151,156-161,166,167,171,179,184-187,190,199,230,240,255,263,268,285,288-292,295, 298,300,313,318,360,376,386,391,402,536] и имеющихся в них многочисленных ссылках на другие работы**.** И это при том**,** что вопросы касаются лишь сугубо внутренней ***OC-***проблематики без учета весьма многочисленных работ**,** рассматривающих ***OC*** в качестве модельной среды для различных прикладных естественно научных задач. Из первых достаточно интересных результатов в данном направлении ***(****не считая результатов моделирования в* ***OC-****средах основоположников* ***TOC-****проблематики Дж. фон Неймана и его непосредственных последователей****)*** следует отметить докторскую диссертацию ***A.P. Смита*** [131], в которой он рассматривает ряд вопросов моделирования одной классической ***d-OC*** другой структурой той же размерности, но с уменьшением размера шаблона соседства моделирующей структуры. Отметим, что такого уменьшения размера шаблона соседства удалось добиться за счет как увеличения алфавита моделирующей классической ***d-OC,*** так и увеличения самого времени моделирования. Большое количество других довольно интересных результатов по моделированию данного типа для случая классических однородных структур можно найти в цитированных выше работах.

Подобные исследования мотивируются поиском более *оптимальных* по выбранным критериям ***(****времени моделирования****,*** *сложности межавтоматной связи****,*** *мощности алфавита сос-*

тояний единичного автомата и др.) структур, моделирующих исходные классические ***d-OC.*** Целый круг вопросов возникает при погружении в ***OC-***модель различного типа параллельных и последовательных алгоритмов, а также при исследовании ***d-OC*** с точки зрения определяемых ими параллельных алгоритмов. Вообще говоря, проблема моделирования в ***d-OC*** в настоящее время представляется настолько многоаспектной, что в рамках настоящей главы полностью охваченной быть не может, хотя и затрагивается целый ряд ее весьма важных вопросов. В основном, представленные здесь результаты носят теоретический характер и почти совсем не затрагивают весьма обширной области прикладных аспектов моделирования в классических ***d-OC***, с которыми можно ознакомиться в цитированных выше работах. В связи с *многоаспектностью* проблемы и весьма большим диапазоном целей моделирования сформировался целый ряд подходов к понятию моделирования, наилучшим образом отвечающим той или иной задаче моделирования. Значимость данной проблематики связана, в первую очередь, с той ролью, которую играют структуры как *новая перспективная* среда моделирования разнообразных дискретных процессов,феноменов и объектов,допускающих высокую степень распараллеливания. Но не только высоким *уровнем* параллелизма, обеспечиваемым принципом функционирования, привлекательны ***OC-***модели. В рамках их аксиоматики обеспечиваются такие фундаментальные свойства, присущие физическим законам и процессам, как *однородность* и *локальность*. Тогда как свойство *обратимости* физических процессов *(важное, в первую очередь, на микроскопическом уровне)* обеспечивается специальным программированием ***OC-***моделей. Отмеченные свойства создают хорошие предпосылки для использования ***OC-***концепции при построении и исследованиях концептуальных моделей пространственно-распределенных динамических систем, из которых физическим системам в настоящее время уделяется особое внимание. Ниже представлены наиболее известные понятия моделирования в среде классических однородных структур из целого ряда имеющихся на сегодня в ***TOC-***проблематике.

6.1. Понятия моделирования в классических однородных структурах

Прежде всего, сделаем общее замечание по двум основным методикам моделирования для класса однородных структур. Следуя основоположникам ***TOC-***проблематики ***(Дж. фон Нейман, С. Улам, А. Беркс, Дж. Холланд, Э. Кодд, Э. Бэнкс, Т. Легенди и др.),*** весьма большое число исследователей в данном направлении используют для целей как теоретического, так и сугубо прикладного моделирования непосредственно ***OC-***среду, наделяя ее определенными правилами функционирования и погружая в нее ***моделируемые*** алгоритмы и процессы. Данный подход носит в значительной степени *конструктивный* характер, когда в ***OC-***среде единая задача моделирования может сводиться к *композиции* составляющих ее подзадач *(блоков)*. Типичным подходом такого типа моделирования является выделение в ***OC-***среде блоков единичных автоматов, выполняющих *определенные* функции и взаимодействующих между собой путем передачи ***управляющих*** импульсов по специально организованным информационным каналам, которые образованны из единичных автоматов среды. Такой подход называется *прямым* погружением моделируемой задачи в ***OC-***среду. Второй подход использует ***OC-***модель на уровне *формальной* системы параллельной обработки информации, представляя *общий* уровень моделирования исследуемых алгоритмов и процессов. В этом отношении оба подхода к моделированию на основе ***OC-***концепции с определенными допущениями можно уподобить известным способам моделирования *(вычислимости)* соответственно на основе машин Тьюринга и алгоритмов Маркова либо других формальных алгебраических систем пе-

реработки слов в конечных алфавитах. Если первый подход наиболее пригоден для целей исследования более *прикладных* аспектов моделирования на основе ***ОС-***концепции, то второй составляет основу формального исследования конструктивных и вычислительных возможностей ***ОС-***моделей как абстрактных систем параллельной обработки информации, аксиоматически обеспечивающих свойства однородности и локальности, и программно – свойство *обратимости* динамики. Вместе с тем, оба упомянутых подхода могут с той или иной степенью приемлемости взаимно дополнять друг друга. Именно второй подход (*как составляющая собственно* ***ТОС***) будет являться основой дальнейшего изложения по вопросам моделирования в ***ТОС-***проблематике.

Изложение начнем с традиционного подхода к понятию моделирования, восходящего к ***А.Р. Смиту*** [131]. Пусть c_t обозначает ***КФ*** классической ***d-ОС*** в момент времени $t \geq 0$ и τ – ее глобальную функцию перехода ***(ГФП).*** Тогда результат ***t-***кратного применения τ-функции (τ^t) определяется следующими рекуррентными соотношениями, а именно:

$$\tau^0(c_0) \equiv c_0\tau^0 \equiv c_0\,, \quad \tau^t(c_{t-1}) \equiv c_{t-1}\tau^t \equiv \tau(\tau^{t-1}(c_{t-1})) \equiv c_t \qquad (t \geq 1)$$

С учетом сделанных предположений введем понятие моделирования одной классической ***d-ОС*** другой структурой той же ***d-***размерности ***(d ≥ 1).***

<u>Определение 21</u>. Пусть G_d будет множеством всех допустимых ГФП для классических d-ОС (d ≥ 1). Рассмотрим две структуры S1 и S2 из этого множества с множествами конфигураций и ГФП соответственно C1, τ_1 и C2, τ_2 ($\tau_1, \tau_2 \in G_d$). Будем говорить, что S2 моделирует структуру S1 в реальное время k2/k1 тогда и только тогда, когда существует эффективно вычислимое инъективное отображение $H : C1 \to C2$, а также и эффективно вычислимая функция $h : G_d \to G_d$ такие, что имеет место соотношение:

$$\tau_2^{k_2}(H(c_t)) \equiv H(\tau_1^{k_1}(c_t)); \quad \tau_2 = h(\tau_1)$$

При выполнении условия k2 = k1 будем говорить о моделировании классических структур в строго реальное время.

В целом ряде случаев при представлении результатов по моделированию будет удобно для структуры $d\text{-}OC = \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X\rangle$ использовать обозначение ***(d,n,a)***, где смысл параметров ***d,n*** и ***a*** полностью соответствует определению классических ***d-ОС*** и особых пояснений не требует. Посредством достаточно простой процедуры ***Дж. Батлер*** [313] на основе достаточного условия существования алгоритма моделирования в ***1/k-****реальное* время одной классической ***d-ОС*** другой структурой той же самой размерности доказал следующий интересный результат, используемый достаточно часто в исследованиях динамики классических однородных структур посредством моделирования [536].

<u>Теорема 71</u>. Для произвольной классической структуры (2,n,a) существует моделирующая ее в 1/k-реальное время структура $(2, p, a^{2km})$, где m – размер стороны минимального квадрата, содержащего шаблон соседства моделируемой однородной структуры.

В целях иллюстрации одного из возможных подходов к моделированию классических ***d-ОС*** структурами того же класса, но с уменьшением размера шаблона соседства ***(ШС)***, рассмотрим, не нарушая общности, моделирование классической ***1-ОС*** структурой той же размерности, но с *простейшим* индексом соседства $X_n = \{0,1\} \equiv \{-1,0\}$. Как уже отмечалось выше, для классической ***d-ОС*** *простейший* индекс соседства определяет ***ШС*** размера $m = d+1$. Так как в общем случае классическая ***1-ОС*** имеет алфавит вида $A = \{0,1,2,\ldots,a-1\}$ и индекс соседства $X = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$, то ее ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ определяется параллельными подстановками следующего общего вида, а именно:

$$\sigma^{(n)} : X_jX_{j+1}X_{j+2} \ldots X_{j+n-1} \Rightarrow X^*_j\,; \quad X_{j+p}, X^*_j \in A \quad \{j = 0, \pm1, \pm2, \ldots; p = 0 \,..\, (n-1)\}$$

Определяем для такой структуры классическую ***1-ОС*** с *простейшим* ***Xn-***индексом соседства, ***A****-*алфавитом и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ с параллельными подстановками следующего вида:

$$x_j x_{j+1} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_j \\ x_{j+1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_j & x_{j+1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} \\ \equiv\equiv & \equiv\equiv \\ x_{j+k} & x_{j+k+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_j \\ x_{j+1} \\ \equiv\equiv\equiv \\ x_{j+k+1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_j & x_{j+1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} \\ \equiv\equiv & \equiv\equiv \\ x_{j+n-2} & x_{j+n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow x^*_1$$

$$k = 1..n-3; \quad x^*_1, x_{j+p} \in A; \quad p = 0..n; \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

принцип применения которых к *шаблону соседства* ***(ШС)*** моделируемой структуры легко усматривается из нижеследующей принципиальной схемы, поясняющей прием, состоящий в постепенном увеличении уровней структурированности состояний моделирующей структуры, позволяющий аккумулировать информацию о состоянии ***ШС*** моделируемой структуры в простейшем ***ШС*** моделирующей структуры, а именно:

t	***ШС моделируемой 1-ОС***	***Алфавит***
0	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \ldots\ x_j\ x_{j+1}\ \ldots\ x_{n-2}\ x_{n-1}\ x_n$	$A^o \equiv A;\ \#A^o = a$
	$\sigma^{(2)}$ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓ ..... ⇓ ⇓	
1	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \ldots\ xj\ x_{j+1}\ \ldots\ x_{n-2}\ x_{n-1}$ $x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ \ldots\ x_{j+1}\ x_{j+2}\ \ldots\ x_{n-1}\ x_n$	$A^1 = \begin{Bmatrix} x_j \\ x_{j+1} \end{Bmatrix},\ j=1..n-1$
	$\sigma^{(2)}$ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓ ..... ⇓	
2	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \ldots\ xj\ xj{+}1\ \ldots\ x_{n-2}$ $x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ \ldots\ x_{j+1}\ x_{j+2}\ \ldots\ x_{n-1}$ $x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ \ldots\ x_{j+2}\ x_{j+3}\ \ldots\ x_n$	$A^2 = \begin{Bmatrix} x_j \\ x_{j+1} \\ x_{j+2} \end{Bmatrix},\ j=1..n-2;\ \#A^2 = a^3$
	$\sigma^{(2)}$ ⇓ ⇓ ⇓	
	==========	
n-3	$x_1\ x_2\ x_3$ $x_2\ x_3\ x_4$ $x_3\ x_4\ x_5$ $\ldots\ \ldots\ \ldots$ $x_{n-2}\ x_{n-1}\ x_n$	$A^{n-3} = \begin{Bmatrix} x_j \\ x_{j+1} \\ x_{j+2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{j+n-3} \end{Bmatrix},\ j=1..3;\ \#A^{n-3} = a^{n-2}$
	$\sigma^{(2)}$ ⇓ ⇓	
n-2	$x_1\ x_2$ $x_2\ x_3$ $x_3\ x_4$ $\ldots\ \ldots$ $x_{n-1}\ x_n$	$A^{n-2} = \begin{Bmatrix} x_j \\ x_{j+1} \\ x_{j+2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{j+n-2} \end{Bmatrix},\ j=1..2;\ \#A^{n-2} = a^{n-1}$
	$\sigma^{(2)}$ ⇓	
n-1	x^*_1	$A^{n-1} \equiv A$

Представленная схема достаточно прозрачна и определяет принцип *редукции* исходного ***ШС*** размера ***n*** моделируемой ***1-ОС,*** когда на шаге ***t = n-2*** получаем простейший ***ШС*** моделирующей ***1-ОС,*** содержащий всю информацию о произвольной конфигурации ***ШС*** моделируемой структуры. Нетрудно заметить, что ***A****-*алфавит *моделирующей* ***1-ОС*** определяется как $A^* = \cup_p A^p \cup A\ \{p=1\ ..\ (n-2)\}$, тогда как его мощность определяется величиной $\psi = \#A^* = \sum_{p=1}^{n-1} a^p = (a^n - a)/(a-1)$. Таким образом, имеет место следующий резуль-

тат: ***Для произвольной классической структуры (1,n,a) существует моделирующая ее в 1/(n-1)-реальное время структура (1, 2, ψ), где значение ψ определено выше.***

Данный результат естественным образом обобщается на случай высших размерностей моделируемых классических ***d-ОС***. Принцип моделирования ***d-ОС (d>1)*** является естественным обобщением описанного подхода к моделированию ***1-ОС*** и весьма наглядно *(на фрагментарном уровне)* иллюстрируется на примере ***2-ОС***. Пусть ***ШС*** моделируемой ***2-ОС*** с алфавитом ***A={0,1,2, ..., a-1}*** имеет размер ***(nxm)*** и вид, представленный ниже.

$x_{i,j+n-1}$	.....	$x_{i+p,j+k}$	.....	$x_{i+m-1,j+n-1}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j+k}$	.....	$x_{i+p,j+k}$	.....	$x_{i+m-1,j+k}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j}$	.....	$x_{i+p,j}$	.....	$x_{i+m-1,j}$

$\Rightarrow x^*_{i,j}$

В качестве центрального автомата ***ШС***, не нарушая общности, полагается автомат $[x_{i,j}]$.

Параллельные подстановки, определяющие ***ЛФП***, задаются на конфигурациях ***ШС***, определяя новые состояния для центрального автомата в следующий момент времени.

В принципе, данный ***ШС*** представляет собой *минимальный прямоугольник*, содержащий произвольный ***ШС*** меньшего либо равного ему размера. Собственно само моделирование состоит из двух этапов, на каждом из которых используется подход из описанного выше метода моделирования ***1-ОС***. На первом этапе моделирующая структура ***2-ОС*** с индексом соседства ***X={(0,1), (00), (1,0)}*** использует параллельные подстановки вида:

a	
x_i	x_{i+1}

$\Rightarrow x_i^*$, *независимо от a-состояния, т.е.*

$x_i^*=f(x_i, x_{i+1})$; x_i – *центральный автомат*

$$\overset{Z}{x_{i+k}\ x_{i+k+1}} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{i+k} \\ x_{i+k+1} \end{bmatrix};\ x_{i+k} \in A;\quad k = 0..m-2;\quad \begin{bmatrix} Z & \\ x_{i+t} & x_{i+t+1} \\ x_{i+t+1} & x_{i+t+2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x_{i+t+p} & x_{i+t+p+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{i+t} \\ x_{i+t+1} \\ \cdots\cdots \\ x_{i+t+p+1} \end{bmatrix}$$

$$x_{i+t}, x_{i+t+p}, Z \in A;\quad t = 0..r;\quad p = m-r-1;\quad r = m-2..1;\quad i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots.$$

обеспечивающие аккумуляцию в автоматах $<x_{i,j+k}>$ информации о состояниях всех автоматов соответствующих им строк ***ШС***, т.е. для каждого ***k=0..n-1*** автомат в качестве состояния будет иметь кортеж состояний автоматов $X_{j+k}=<x_{i,j+k}, x_{i+1,j+k}, \ldots, x_{i+m-1,j+k}>$, образуя обобщенный алфавит ***Q***. Этот этап требует ***(m-1)*** шагов моделирующей структуры и расширения ***A***-алфавита до ***A****-алфавита мощности $\#A^* = (a^{m+1}-a)/(a-1)$.

На втором этапе моделирующая ***2-ОС*** использует параллельные подстановки вида:

X_{j+1}	
X_j	c

$\Rightarrow X_j^*$, *независимо от c-состояния, т.е.*

$X_j^*=f(X_j, X_{j+1})$; X_j – *центральный автомат*

$$\overset{X_{j+k+1}}{X_{j+k}\ Z} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_{j+k+1} \\ X_{j+k} \end{bmatrix};\ X_{j+k} \in Q;\quad k = 0..n-2;\quad \begin{bmatrix} X_{j+t+p+1} \\ X_{j+t+p} \\ \cdots\cdots \\ X_{j+t+1} \\ \hline X_{j+t+p} \\ X_{j+t+p-1} \\ \cdots\cdots\ Z \\ X_{j+t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_{j+t+p+1} \\ X_{j+t+p} \\ \cdots\cdots \\ X_{j+t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{j+n-1} \\ X_{j+n-2} \\ \cdots\cdots \\ X_{j+1} \\ \hline X_{j+n-2} \\ X_{j+1} \\ \cdots\cdots\ Z \\ X_j \end{bmatrix} \Rightarrow x^*_{i,j}$$

$$x^*_{i,j} \in A;\ X_{j+t}, X_{j+t+p}, Z \in Q;\quad t = 0..r;\quad p = n-r-1;\quad r = n-3..1;\quad j = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots.$$

обеспечивающие аккумуляцию в автоматах $<x_{i,j}>$ и $<x_{i,j+1}>$ информации о состояниях всех автоматов строк ***ШС***, т.е. для каждого из этих автоматов в качестве состояний будут выступать **2**-мерные кортежи состояний автоматов следующего общего вида, а именно:

$x_{i,j+n-1}$	.....	$x_{i+p,j+n-1}$	.....	$x_{i+m-1,j+n-1}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j+k}$	.....	$x_{i+p,j+k}$	.....	$x_{i+m-1,j+k}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j+1}$	.....	$x_{i+p,j+1}$	.....	$x_{i+m-1,j+1}$

$x_{i,j+n-2}$	.....	$x_{i+p,j+n-2}$	.....	$x_{i+m-1,j+n-2}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j+k}$	.....	$x_{i+p,j+k}$	.....	$x_{i+m-1,j+k}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j}$	.....	$x_{i+p,j}$	.....	$x_{i+m-1,j}$

Таким образом, сначала производится аккумуляция состояний автоматов строк ***ШС*** в ***i***-столбце, а затем аккумуляция состояний автоматов всего ***ШС*** завершается в двух его автоматах $<x_{i,j}>$ и $<x_{i,j+1}>$. Этот этап требует ***(n-1)*** шагов моделирующей структуры и расширения ***A****-алфавита до ***A*@**-алфавита мощности $\#A^{@}=(a^{m+1}-a)/(a-1)+(a^{nm}-a^{2m})/(a^{m}-1)$. Таким образом, ***для 2-OC с ШС размера nxm существует моделирующая ее в 1/(n+m-2)-реальное время структура 2-OC с простейшим индексом соседства и A@-алфавитом указанной мощности.*** На основе сказанного читателю рекомендуется доказать, что ***для d-OC с ШС размера n_1xn_2x ... xn_d и алфавитом A={0,1, ..., a-1} существует моделирующая ее в $1/(\sum_{j=1}^{d} n_j - d)$ –реальное время структура d-OC с простейшим индексом соседства и A*-алфавитом мощности, определяемой следующей формулой, а именно:***

$$\#A^{*} = a + \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{a^{\prod_{k=1}^{j} n_k + \varphi(j)} - a^{2\prod_{k=0}^{j-1} n_k}}{a^{\prod_{k=0}^{j-1} n_k} - 1} \right), \quad where \quad \varphi(j) = \begin{cases} 1, & if\ j < d \\ 0, & otherwise \end{cases}; \quad n_o = 1$$

В качестве довольно интересной задачи можно рассмотреть также вопрос оптимизации алгоритма моделирования подобного или иного типа**.** Используя вышеописанный подход, можно показать, что ***произвольная классическая d-OC с ШС в виде параллелепипеда размера n_1xn_2x ... xn_d и алфавитом A={0,1, ..., a-1} моделируется в 1/n-реальное время структурой той же размерности с ШС в виде гиперкуба с длиной ребра 2 и A*-алфавитом при следующих определяющих условиях, а именно:***

$$n = \max_{k=1..d} \{n_k\} - 1 \qquad \#A^{*} = \sum_{k=1}^{n} a^{k^{d}}$$

При этом, характерным свойством моделирующей структуры является ***наследование*** ею всех основных динамических свойств *моделируемой* структуры**,** включая неконструируемость, обратимость и др. Данное обстоятельство весьма существенно, позволяя, прежде всего, на теоретическом уровне исследовать динамику классических ***OC***-моделей с простейшими индексами соседства с последующей экстраполяцией полученных результатов и на более общие типы классических ***OC***-моделей. Естественно, упрощение ***ШС*** исследуемой ***OC***-модели достигается за счет существенного увеличения мощности алфавита моделирующей структуры. Однако в целом ряде случаев *определяющим* фактором

является именно простота топологии соединений единичных автоматов исследуемой ***OC-***модели. Результаты, подобные вышеприведенным, характеризуются тем, что классические ***d-OC*** с небольшим ***A-***алфавитом состояний и большим шаблоном соседства могут моделироваться посредством ***d-OC*** того же типа, но с меньшим шаблоном соседства и существенно большим алфавитом внутренних состояний, и наоборот. Другой достаточно сильный результат в данном направлении был получен ***A.P. Смитом*** [131] по моделированию произвольной классической ***d-OC*** *бинарной* структурой той же размерности и того же типа.

Теорема 72. Для произвольной классической (d,n,a) существует моделирующая ее в реальное время структура (d,k,2), для которой имеет место следующее соотношение:

$$|k| \le (2^{a-1} - 1)(n + 2) + [\log_2 a](n - 1) + 1$$

Следует отметить, что при доказательстве вышеприведенных результатов Батлера-Смита по моделируемости в классических ***d-OC*** не использовалась *оптимизационная* техника и в ряде наших работ были предприняты попытки получить такого рода оптимизацию параметров моделирующей структуры. Ниже некоторые из этих результатов будут представлены. В частности, в этой связи нами было введено понятие ***1-моделируемости*** [1], суть которого сводится к следующему и иллюстрируется *диаграммой*, изображенной на рис. **23.** Данная диаграмма позволяет весьма наглядно представить саму суть ***1-***моделируемости в среде классических ***d-OC (d ≥ 1)*** с иллюстрацией используемого принципа моделирования.

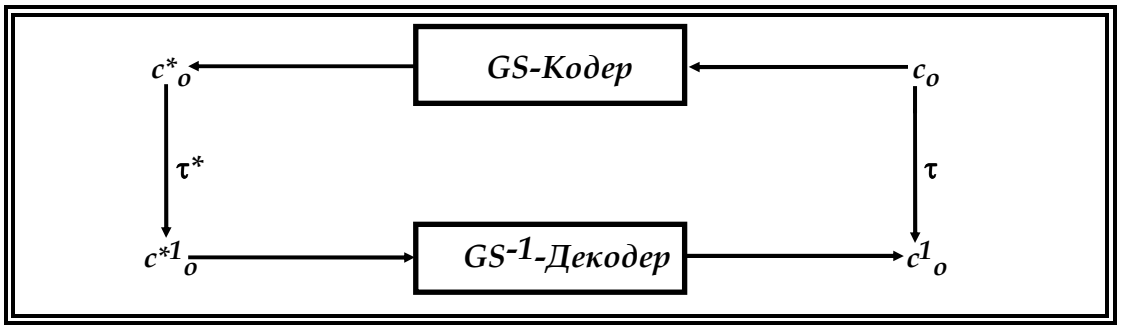


Рис. 23. Диаграмма, иллюстрирующая принцип 1-моделируемости в классических однородных структурах.

В моделируемой классической ***d-OC КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, определенная в ***A-***алфавите, под действием ***ГФП*** τ переводится в следующую ***КФ*** $c_o\tau = c^1{}_o$. Пусть ***GS(X)*** есть некоторый рекурсивный метод кодирования символов $X \in A$ и $GS^{-1}(Y)$ – метод рекурсивного декодирования множества символов из ***A*-***алфавита моделирующей ***d-OC;*** пусть ***GS***[*X*] и $GS^{-1}(Y)$ определяют соответственно *рекурсивные* методы кодирования и декодирования конфигураций ***X*** и ***Y***. Тогда для *моделирующей* классической ***d-OC*** любая ***КФ*** $c^*_o = GS[c_o]$ под действием ***ГФП*** τ^* переводится в следующую ***КФ*** $c^{*1}{}_o$, для которой $GS^{-1}[c^{*1}{}_o] = c^1{}_o$. Будем говорить, что классическая ***d-OC 1-моделируется*** структурой той же размерности, если *динамика* ***моделируемой*** и ***моделирующей*** структур удовлетворяет перечисленным выше условиям. Предположим, что T_x будет длиной ребра *минимального* ***d-***мерного гиперкуба, содержащего ***ШС*** моделируемой классической ***d-OC***. Тогда при сделанных предположениях имеет место следующий результат [1,5,88,536].

Теорема 73. Для произвольной классической d-OC=<Z^d,A,$\tau^{(n)}$,X> существует 1-моделирующая ее структура <Z^d,A*,$\tau^{(p)}$,X*>,чьи T_{x^*}-размер шаблона соседства и A*-алфавит внутренних состояний связаны следующими определяющими соотношениями:

$$\begin{cases} T_{X^*} \le (T_X + 1)([\log_2 a] + 1) - 1, \quad for \quad A^* = \{0,1,2\} \\ T_{X^*} \le (T_X + 1)(L + 5) - 1, \quad for \quad A^* = \{0,1\} \\ \qquad where \quad L = [(\log_2 a - 1)/(\log_2 7 - 1)] + 2 \end{cases}$$

Насколько нам известно, данный результат на сегодня является наилучшим среди результатов подобного типа. В монографиях [1,3,5] рассмотрены и более специальные способы моделирования одной классической ***d-OC*** другой. В частности**, *А.Р. Смит*** [131] показал, что в общем случае невозможно моделировать в рамках определения ***21*** классическую ***d-OC*** структурой меньшей размерности. Однако было показано [1], что в целом ряде случаев возможно моделировать классическую ***d-OC (d>1)*** даже посредством классической ***1-OC*****.** Ниже конструктивно будет проиллюстрирована возможность моделирования ***d-OC (d>1)*** посредством классической ***1-OC.*** Данный результат базируется как на возможности моделирования классических ***2-OC*** соответствующей машиной Тьюринга с последующим моделированием последней классической ***1-OC,*** так и на редукции размерностей моделируемой и моделирующих структур. При этом, правда, динамика моделирующей структуры может быть достаточно малопригодной для последующих анализа и применения, иллюстрируя лишь ***принципиальную*** возможность моделирования.

К проблеме моделирования непосредственно относятся и некоторые работы по исследованию специальных свойств классических ***d-OC*****.** В частности, ряд исследователей занимались вопросами *стандартизации* структуры *шаблона соседства* ***(ШС)*** классических ***OC-***моделей. Данная проблематика представляется нам весьма важной для ***TOC*** и ее многочисленных приложений, особенно в плане использования ***d-OC*** в качестве перспективной среды моделирования. Вопросы данного направления систематически изучались в работах ***Х. Ямада*** и ***С. Аморозо*** [130] на основе введенных ими понятий структурного и поведенческого изоморфизмов для классических ***OC-***моделей. Было показано**,** что определенные эквивалентные отношения, сохраняющие одну или обе формы изоморфизма, приводят к стандартизациям структуры ***ШС*** в ***OC-***моделях**.** При получении этих результатов центральную роль играют понятия блокирования и блокированной структуры из единичных автоматов ***OC-***модели**.** При этом, определение ***слабой*** формы поведенческого изоморфизма привело к дальнейшим упрощениям стандартной структуры ***ШС*** для классических ***OC-***моделей [130,536].

Для многих задач моделирования в классических ***d-OC,*** в первую очередь, с точки зрения вопросов исследования алгоритмических свойств структур, оказывается весьма эффективным понятие ***T-моделируемости.*** Хорошо известно, что классическая ***OC-***модель является параллельным алгоритмом переработки слов ***(****конфигураций****)*** в конечных алфавитах. А так как изучение ***OC-***моделей с данной точки зрения представляет несомненный интерес, то целесообразно определить такое понятие как «***один алгоритм (слабо) T-моделирует другой алгоритм***»**.**

Пусть M_1 **–** некоторый алгоритм переработки слов в конечном ***A-***алфавите, а M_2 **–** алгоритм переработки слов в конечном ***A*-***алфавите ***(****A*⊆*A*****).** Предположим, что $M^k{}_1 s = s^k$ ***(****$M^o{}_1 s = s$****)*** есть результат ***k-***кратной переработки ***s-***слова, заданного в ***A-***алфавите, посредством M_1***-***алгоритма. Для произвольного конечного ***s-***слова в ***A-***алфавите M_1***-***алгоритм генерирует последовательность конечных слов следующего вида, а именно**:**

$$M^o{}_1 s,\ M^1{}_1 s,\ M^2{}_1 s,\ ...,\ M^k{}_1 s,\ ... \qquad \textbf{(46)}$$

Пусть теперь ***s****** есть любое конечное слово в ***A****-алфавите ***(****в ****A****-алфавите совпадающее с ****s****-словом****)*** и M_2***-***алгоритм генерирует последовательность слов из ***s****-слова вида**:**

$$M^o{}_2 s^*,\ M^1{}_2 s^*,\ M^2{}_2 s^*,\ ...,\ M^k{}_2 s^*,\ ... \qquad \textbf{(47)}$$

***Определение 22**. Будем говорить, что M_2-алгоритм T-моделирует M_1-алгоритм, если существует некоторая рекурсивная GS-процедура, позволяющая для любого конечного s-слова, определенного в A-алфавите, выделять из последовательности слов вида (47) подпоследовательность слов следующего вида, а именно:*

$$M^{o}{}_{o}s^{*},\ M^{j1}{}_{2}s^{*},\ M^{j2}{}_{2}s^{*},\ M^{j3}{}_{2}s^{*},...,\ M^{jk}{}_{2}s^{*},\ ...$$

такую, что в A-алфавите имеет место соотношение $(\forall k\in N)(M^{jk}{}_{2}s^{*} \equiv M^{k}{}_{1}s)$ и $j_k=T+k$. Если величина j_k зависит от размера перерабатываемых s-слов $\{j_k=F(|S|)\}$ в моделируемом M_2-алгоритме, то будем говорить, что M_2-алгоритм слабо T-моделирует исходный M_1-алгоритм структуры.

Введенное понятие ***T***-моделируемости используется нами достаточно широко, обладая рядом положительных черт. В свете введенных понятий нетрудно убедиться, что ***1-моделируемость*** является частным случаем ***T-моделируемости,*** представляющим и самостоятельный интерес, прежде всего, по причине следующих двух обстоятельств, а именно: ***(1)*** определяется метод моделирования в режиме *строго реального времени* и ***(2)*** простой метод GS^{-1}-декодирования слов, генерируемых моделирующим алгоритмом. Наряду с введенными выше понятиями в целях теоретического исследования целого ряда важных вопросов моделирования в классических ***d-OC*** нами было определено значительно более абстрактное понятие ***WM***-моделируемости [53], впоследствии получившее существенное обобщение в виде понятия ***W-моделируемости,*** позволившее решить целый ряд интересных задач общей проблемы моделирования для классических ***d-OC***.

Пусть ***M –*** произвольная классическая ***d-OC,*** в которой каждая конечная ***КФ*** $c\in C(A,d,\phi)$ имеет вполне определенную историю $\langle c\rangle[\tau^{(n)}]=\{c\tau^{(n)k} \mid k=0,1,2,3,\ ...\}$. Выбираем некоторый конечный ***E***-алфавит и определяем рекурсивную ***F***-функцию кодирования, переводящую любую ***КФ*** $c\in C(A,d,\phi)$ в некоторое множество $F(c)=\{c^{e}{}_{p}\in C_E\}$ конфигураций таких, что $F^{-1}(c^{e}{}_{p})=c$ $(p=1,2,3,...,r;\ 1\le r\le\infty)$. Множество $S=\bigcup_{c\in C(A,d,\phi)} F(c)$ назовем ***сигнальным*** и будем полагать его *рекурсивным*. Тогда, если существует способ ***F***-кодирования и классическая ***d-OC W*** с ***E***-алфавитом внутренних состояний такие, что каждая история конфигураций $\langle c^{e}\rangle[\tau^{(v)}]$ $(c^{e}\in S;\ \tau^{(n)}$ *– ГФП в W-структуре)* содержит максимальную подпоследовательность конфигураций $\{c^{e}{}_{k}\in S\}$, для которых имеет место соотношение $\{F^{-1}(c^{e}{}_{k})\} = \langle c\rangle[\tau^{(n)}]$, то будем говорить, что классическая ***M***-структура ***W-моделируется*** структурой ***W*** того же типа [5,53-56,88,90,536].

Следует отметить, что в свете сделанных предположений выделение из любой истории $\langle c^{e}\rangle[\tau^{(v)}]$ конфигураций *максимальной* подпоследовательности $\{c^{e}{}_{k}\}$ возможно ввиду рекурсивности сигнального ***S***-множества. Введенное понятие существенно расширяет понятие ***WM***-моделируемости и охватывает чрезвычайно широкий *класс* методов моделирования в классических ***d-OC*** [53]. Целый ряд использованных нами методов моделирования в среде классических ***OC*** охватывается именно ***WM-понятием.*** Между тем, наряду с вышеприведенными, далее на протяжении настоящей главы будут использоваться и некоторые другие способы моделирования в классических ***d-OC,*** суть которых будет либо ясна из самого принципа моделирования, либо поясняться по мере необходимости. В следующем разделе представляется ряд основных результатов по моделированию однородными структурами известных формальных алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах и связанные с ними проблемы динамики классических ***OC***-моделей, в определенной мере проясняющие вопросы взаимной сложности алгоритмов.

6.2. Моделирование классическими однородными структурами известных формальных алгоритмов переработки конечных слов

Так как классические ***d-OC*** являются параллельными алгоритмами переработки ***d-***мерных слов в конечных алфавитах, то их весьма интересно сравнить с известными формальными последовательными алгоритмами. Одним из путей такого сравнительного подхода является моделирование одного типа алгоритмов другими, и наоборот. В первую очередь представим результаты ***T-моделирования*** посредством классических ***1-OC*** известных формальных алгоритмов переработки одномерных слов, и наоборот. Использованная при моделировании оптимизационная техника позволила получить близкие к оптимимальным соотношения между основными параметрами моделируемых и моделирующих алгоритмов, что дает возможность проводить определенные сравнительные оценки таких алгоритмов. В качестве *параллельного алгоритма* в дальнейшем выбирается классическая ***1-OC=<Z,A,τ$^{(n)}$,X>,*** а в качестве первого последовательного алгоритма **–** машина Тьюринга MT^s_q с ***S-***алфавитом ***s-***мощности символов на ленте и ***Q-***алфавитом ***q-***мощности внутренних состояний конечного автомата ***(****устройства управления****)***, которая является наиболее популярной формальной моделью последовательных вычислений ***(***раздел ***1.1;*** п.п. ***9..11).*** При этом, нами рассматривается MT^s_q с бесконечной в обе стороны лентой, которая является модификацией стандартной машины Тьюринга ***(MT)*** и ей полностью эквивалентной. С другими эквивалентными модификациями ***MT*** можно ознакомиться, например, в [535]. В этом направлении имеет место следующий полезный для дальнейшего исследования динамики классических ***OC-***моделей результат [5,88].

<u>Теорема 74</u>. Для произвольной машины MT^s_q существует классическая 1-OC с A-алфавитом мощности a=s+q+9 и индексом соседства X={-1,0,1} Мура, которая ее 8-моделирует. Для произвольной MT^s_q существует классическая 1-OC с A-алфавитом мощности a=s+2q и индексом соседства X={-1,0,1} Мура, которая ее 2-моделирует. Для произвольной MT^s_q существует классическая 1-OC с A-алфавитом мощности a=s+q и индексом соседства X={-2,-1,0,1}, которая ее 1-моделирует. Для произвольной k-ленточной машины MT^s_q существует классическая 1-OC с A-алфавитом мощности $a=s^k(q+1)^k$ и индексом соседства X={-1,0,1} Неймана-Мура, которая ее 1-моделирует (k ≥ 1).

Развернутое доказательство первой части теоремы приводится в [1], в разделе ***1.1*** ***(****пункт* ***11)*** приведено доказательство второй части теоремы. Доказательство третьей части теоремы достаточно прозрачно и состоит в следующем. Пусть работа машины MT^s_q определяется программой, содержащей команды следующих трех типов, а именно**:**

$$s_k q_k \Rightarrow s`_k q`_k z_k \qquad s_k, s`_k \in S;\ \ q_k, q`_k \in Q;\ \ z_k \in \{-1,0,1\}\ \ (k=-\infty\ ..\ +\infty) \qquad \textbf{(48)}$$

Команды (**48**) имеют следующий смысл**:** если сканирующая головка MT^s_q считывает с ленты s_k**-**символ, а ее *конечный автомат* ***(KA)*** находится в q_k**-**состоянии, то в следующий момент времени в сканируемую ячейку ленты записывается $s`_k$**-**символ, ***KA*** переходит в $q`_k$**-**состояние, а сама сканирующая головка подвергается z_k**-**сдвигу на одну ячейку ленты ***(-1 –*** *влево****, 0 –*** *на месте****, 1 –*** *вправо****).*** С учетом сказанного, текущую конфигурацию машины MT^s_q можно формально представить одномерным словом следующего вида**:**

.....	□	s_{k-n}	.....	s_{k-2}	s_{k-1}	s_k	q_k	s_{k+1}	s_{k+2}	.....	s_{k+p}	□	.....

блочное разбиение: ⏟ ⏟ ⏟

Данное слово содержит только одно вхождение q_k-символа и функционирование MT^s_q состоит в переработке слов указанного вида в слова того же вида; в общем случае следует различать пустой □-символ на ленте, ***0***-состояние покоя ***ОС***-модели и □-идентификатор бесконечных ***нуль***-конфигураций; однако, в каждом конкретном случае их смысл достаточно прозрачен. Очевидно, слова указанного вида естественно погружаются в ***1-ОС*** в качестве их конфигураций.

$$\left\langle \begin{array}{l} s_{k-2}s_{k-1}s_k q_k \Rightarrow s_k^1 \\ s_{k-1}s_k q_k s_{k+1} \Rightarrow q_k^1 \end{array} \right\rangle \quad z_k = 0$$

$$\left\langle \begin{array}{l} s_{k-2}s_{k-1}s_k q_k \Rightarrow q_k^1 \\ s_{k-1}s_k q_k s_{k+1} \Rightarrow s_k^1 \end{array} \right\rangle \quad z_k = -1$$

$$\left\langle \begin{array}{l} s_{k-2}s_{k-1}s_k q_k \Rightarrow s_k^1 \\ s_{k-1}s_k q_k s_{k+1} \Rightarrow s_{k+1} \\ s_k q_k s_{k+1}s_{k+2} \Rightarrow q_k^1 \end{array} \right\rangle \quad z_k = +1$$

Определяем классическую $\langle Z,S\cup Q,\tau^{(4)},X\rangle$-структуру, где множества S и Q соответствуют рассмотренным множествам MT^s_q и индекс соседства имеет вид $X = \{-2,-1,0,1\}$; более того, пустой □-символ ленты моделируемой MT^s_q будем отождествлять с ***0***-символом покоя моделирующей ***1-ОС***. Глобальная функция $\tau^{(4)}$ определяется ***ЛФП*** с параллельными подстановками указанного выше вида (*сгруппированы относительно* z_k*-значений* {***-1, 0, 1***} *сдвига сканирующей головки* MT^s_q). На остальных кортежах $\langle x_{k-2}x_{k-1}x_kx_{k+1}\rangle$ ***ЛФП*** моделирующей структуры определяется параллельными подстановками следующего вида: $x_{k-2}x_{k-1}x_kx_{k+1} \Rightarrow x_k$ при $x_k \in S\cup Q$ ($k = -\infty \,..\, +\infty$). Используя параллельные подстановки, определяющие ***ЛФП***, уже несложно убедиться, что определенная таким образом классическая ***1-ОС 1***-моделирует произвольную машину Тьюринга MT^s_q.

Последнее утверждение теоремы ***74*** доказывается достаточно просто, используя структурированное погружение MT^s_q (*на примере одноленточной* ***МТ***) в ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура вида $X = \{-1,0,1\}$, а именно:

.....	s_{-3}	s_{-2}	s_{-1}	s_0	s_1	s_2	s_3	.....
				q_0				

Очевидно, мощность $\#A$ алфавита A такой ***1***-моделирующей ***1-ОС*** будет равна $s(q+1)$ и обобщение на случай ***k***-ленточной MT^s_q позволяет ***1***-моделировать ее посредством ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура и ***A***-алфивитом мощности $a=s^k(q+1)^k$ ($k \geq 1$). При этом, за счет увеличения времени моделирования можно снизить мощность ***A***-алфавита моделирующей ***1-ОС***, однако, если такой структурированный подход и не приводит к оптимальным результатам, то он весьма удобен при необходимости получения лишь принципиальной возможности такого либо иного моделирования структурами.

В качестве сравнения рассмотрим вопрос моделирования произвольной MT^s_q посредством однородной структуры на разбиении $ОСнР \equiv \langle Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi\rangle$, определенной в разделе ***1.2***. Этот класс структур широко используется для создания различного рода физических моделей [150-152,165,187,273,378,386,536] и взаимосвязь данного типа структур с однородными рассматривалась в разделе ***1.2***. Используя в качестве *начальной* для струк-

туры ***ОСнР*** рассмотренную выше ***КФ*** состояния MT^s_q (*с представленной для нее исходной блочной разметкой* Z^1*-пространства*), параллельные блочные $\Psi^{(2)}$-подстановки моделирующей структуры ***ОСнР*** на разбиении определяем в следующем виде, а именно:

$$step\,1:\begin{cases} s_k q_k \Rightarrow s^1_k q^1_{k'}, & if\ z_k=\{0\} \\ s_k q_k \Rightarrow q^1_k s^1_{k'}, & if\ z_k=\{-1\} \\ s_k q_k \Rightarrow s^1_k q^{1*}_k, & if\ z_k=\{1\} \end{cases} \qquad q_{k'}, q^1_k \in Q;\ q^{1*}_k \in Q^* \quad (49)$$

$$step\,2:\begin{cases} q^{1*}_k s_{k+1} \Rightarrow s_{k+1} q^1_k; & s_k, s_{k+1}, s^1_k \in S \end{cases}$$

Тогда на основе сделанных предположений и определения структуры ***ОСнР*** нетрудно уже убедиться в справедливости следующего утверждения: ***Произвольная*** MT^s_q ***2-моделируется структурой*** $ОСнР \equiv <Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi>$ ***с*** $A=S\cup Q\cup Q^*$ ***и*** $\#A=(s+2q)$, ***а также моделируется структурой*** $ОСнР \equiv <Z^1,A,3,\Psi^{(3)},\Xi>$ ***с*** $A=S\cup Q$ ***и*** $\#A=(s+q)$. Доказательство второй части утверждения оставляем читателю в качестве несложного упражнения.

Определяя сложность MT^s_q и классической ***1-ОС*** соответственно как $SL_{MT}=sxq$ и $SL_{OC}=axn$, получаем соответствующие значения для трех типов моделирующих произвольную MT^s_q классических ***1-ОС*** (*определенных теоремой* ***74***) как $SL_{OC}=3(s+q+9)$, $SL_{OC}`=3(s+2q)$ и $SL_{OC}''=4(s+q)$. Тогда из минимальной на сегодня оценки сложности для $MT^s_q$, равной $SL_{MT}=28$ $(s=4,\ q=7)$, нетрудно убедиться, что $SL_{OC}=60$, $SL_{OC}`=54$ и $SL_{OC}''=44$. Наряду с понятием сложности алгоритма вполне естественно определяется и понятие сложности моделирования, включающее временные и пространственные затраты моделирующего алгоритма, т.е. *сложность моделирования* в случае классических ***d-ОС*** можно определять по формуле $SLM_{OC}=dxTxaxn$, где: d – размерность однородного пространства структуры; a и n – соответственно мощность алфавита A и размер шаблона соседства; T – время моделирования одного шага моделируемого алгоритма. При сделанных предположениях *разница* для трех представленных случаев моделирования посредством ***1-ОС*** становится более разительной $SLM_{OC}=1x8x3x(s+q+9)=480$, $SLM_{OC}`=1x2x3x(s+2q)=108$ и $SLM_{OC}''=1x1x4x(s+q)=44$. Таким образом, если по сложности алгоритма наиболее простым оказывается третий способ моделирования, то по сложности моделирования налицо полное превосходство третьего; при этом, для него значения сложностей алгоритма и моделирования совпадают $(SL_{OC}''\equiv SLM_{OC}''=44)$. Для оценки сложности моделирования посредством ***ОСнР*** можно использовать показатель $SLM_{ОСнР}=\#Axm$, который для случая моделирования универсальной ***MT*** дает величину $SLM_{ОСнР}=2(4+2x7)=36$. Однако довольно сложно оценивать влияние на данный показатель Ξ-процедуры блочной переразметки Z^1-пространства структуры на разбиении.

Как следствие из теоремы ***74*** вытекает ряд интересных результатов по алгоритмической неразрешимости некоторых массовых проблем, связанных с ***динамикой*** конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях [1,3,5,9]. Некоторые из этих проблем обсуждаются несколько ниже, но для этого нам потребуется ввести ряд новых понятий.

<u>Определение 23</u>. Конфигурация $c_o \in C(A,d,\phi)$ ***для ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***классической d-ОС называется соответственно:***

<u>ограниченной</u>, если $(\exists p)(\forall k)(c_k \in <c_o>[\tau^{(n)}] \rightarrow D(c_k) \le p)$, ***где D – минимальный диаметр блока однородного пространства структуры, содержащего*** c_k***-КФ;***

(<u>k-m)-периодической</u>, если $(\exists m)(\exists k)(c_o\tau^{(n)m} = c_o\tau^{(n)k})$ $(m>0;\ k-m>1)$; ***<u>периодической</u>, если***

$(\exists k>1)(c_o\tau^{(n)k}=c_o)$, и <u>пассивной</u> при k=1;

<u>исчезающей</u>, если $(\exists m)(c_o\tau^{(n)m}=\square)$, где $\square$ – полностью нулевая КФ структуры.

В свете данного определения может быть сформулирован следующий важный результат, определяющий решение ряда массовых задач динамики классических ***OC***-моделей и представляющий интерес для дальнейшего исследования данной проблематики.

<u>Теорема 75</u>. Проблемы определения: ограниченности, (k-m)-периодичности либо периодичности произвольной КФ $c_o\in C(A,\phi)$, рекурсивности множества $<c_o>[\tau^{(n)}]$ конфигураций; а также существования пассивной и/или исчезающей КФ во множестве $<c_o>[\tau^{(n)}]$ в общем случае алгоритмически неразрешимы.

При доказательстве данной теоремы использовалась возможность ***T***-*моделирования* универсальной машины Тьюринга классическими ***OC***-моделями, непосредственно вытекающая из результата теоремы ***78***. Данный результат наряду с самостоятельным интересом может использоваться и в качестве вспомогательного аппарата (*базирующегося на* ***T***-*моделируемости*) при решении ряда *массовых* задач *динамики* классических ***OC***-моделей, представляющих как теоретический, так и прикладной интерес. В частности, из данного результата следует, что алгоритмически неразрешимой является и проблема определения типа графа глобальных состояний произвольной классической ***OC***-модели относительно произвольной ее начальной ***КФ***. Аналогичные выводы можно сделать и относительно класса ***ОСнР***-структур на основе сформулированного выше утверждения.

На основе понятия ***T***-моделируемости довольно детально были рассмотрены также вопросы моделирования посредством классических ***1-OC*** таких известных алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах, как ***TAG***- и ***LAG***-систем, нормальных алгоритмов Маркова, систем продукций Поста, ***SS***-машин, регулярных систем Бюхи и ряда других. При получении данных результатов наряду с использованием принципа ***T***-моделирования в определенной степени применялась и оптимизирующая техника, состоящая в использовании специальных оптимизирующих процедур параллельного программирования в среде классических ***1-OC***. Это позволило получить в значительной степени оптимальные соотношения между *основными* параметрами моделируемых и моделирующих алгоритмов [1]. Определения используемых ниже алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах достаточно хорошо известны и с ними можно ознакомиться по книгам [1,3,5,9,180,181], поэтому они носят скорее схематичный характер с целью пояснения основных параметров моделируемых последовательных алгоритмов.

Пусть моделируемый формальный алгоритм имеет алфавит $C=\{c_1,c_2,...,c_m\}$. Тогда ***TAG***-система имеет **ω**-число усечения и m элементарных преобразований вида: $c_k \Rightarrow b_k$ $(k = 1..m)$, где b_k – слова в ***C***-алфавите; *система продукций* ***Поста (СПП)*** имеет тот же ***C***-алфавит и p базовых продукций вида $a_jW \Rightarrow Wb_j$ $(j=1..p)$, где a_j, b_j, W – конечные слова в ***C***-алфавите. Детальное описание ***SS***-машины можно найти в монографиях [1,180]. Регулярная система ***Бюхи*** имеет ***C***-алфавит и p базовых преобразований вида $a_jW \Rightarrow b_jW$ $(j=1..p)$, где a_j, b_j, W – конечные слова в ***C***-алфавите. Другим естественным расширением класса ***TAG***-систем являются ***LAG***-системы, определяемые в ***C***-алфавите множеством преобразований следующего общего вида, а именно:

$$r_j = c_{j_1}c_{j_2}c_{j_3}\dots c_{j_q}\ ;\quad r_jW \Rightarrow Wb_j \qquad (j=1..p;\ p\le m^q)$$

где b_j, W – конечные слова в ***C***-алфавите такие, что если первые q символов некоторого перерабатываемого ***s****-слова совпадают с подсловом r_j, его первый символ c_{j1} стирается и к правому концу ***s****-слова добавляется b_j-подслово. Очевидно, при $q = 1$ формальные

TAG- и ***LAG-***системы совпадают. С понятием нормальных алгоритмов Маркова можно детально ознакомиться по превосходной монографии [180], содержащей достаточно детальное изложение основных элементов теории алгоритмов и рекурсивных функций. При сделанных предположениях имеет место следующий основной результат.

Теорема 76. Произвольная TAG-система слабо T-моделируется соответствующей ей классической 1-ОС, для которой имеет место следующее соотношение, а именно:

$$a=\omega+m+\sum_{k=1}^{m}|b_k|+3;\quad T=|s^*|+|b_k|;\quad s^*=c_k s;\quad s^*\in C\ \ (k=1..m)$$

Произвольная СПП слабо T-моделируется классической 1-ОС, для которой:

$$a=3\sum_{j=1}^{p}[|a_j|+|b_j|]+3p+m+10;\quad T=4|a_j|+2|s^*|+2|b_j|;\ s^*\in C\quad (j=1..p)$$

Произвольная SS-машина слабо T-моделируется классической 1-ОС, для которой имеет место $a=2n_1+n_2+4$ и $T=2|s^*|+2$, где n_1, n_2 – число инструкций $\{P_0, P_1\}$ и SD(k) машины соответственно. Произвольная регулярная система Бюхи слабо T-моделируется классической 1-ОС, для которой имеет место следующее соотношение, а именно:

$$a=3\sum_{j=1}^{p}[|a_j|+|b_j|]-6p+m+10;\quad T=|a_j|+max\{|a_j|,|b_j|\};\ s^*\in C\quad (j=1..p)$$

Во всех предыдущих случаях моделирующая 1-ОС имеет индекс соседства X={-1,0,1} Мура-Неймана. Произвольная LAG-система слабо T-моделируется классической 1-ОС с индексом соседства X={0,1, ..., q+1}, для которой имеет место следующее соотношение:

$$a=m+\sum_{j=1}^{m}|b_j|+3;\quad T=|s^*|+|b_j|;\quad s^*=r_j;\quad s^*\in C\ \ (j=1..m)$$

Произвольный нормальный алгоритм Маркова слабо T-моделируется классической 1-ОС с простейшим индексом соседства X_n={0,1}≡{-1,0}. Во всех указанных случаях моделирования s* - текущее перерабатываемое слово моделируемого алгоритма и |b| - длина произвольного конечного b-слова.

В частности, из моделируемости произвольной ***SS-****машины* вытекает весьма интересное следствие [1]**: *Существуют классические 1-ОС, множества конечных КФ переводимых в нулевую которых, являются креативными.*** Следовательно, существуют классические ***1-ОС,*** для которых множества ***КФ,*** переводимых непосредственно в нулевые**,** являются нерекурсивными**.** В связи с этим возникает весьма интересный вопрос о наличии классических ***1-ОС,*** аналогичные множества конфигураций для которых являются простыми или максимальными и каковы значения основных параметров для такого типа классических ***ОС-***моделей.

Таким образом, из теоремы ***76*** следует, что невзирая на использование при ее доказательстве оптимизирующей техники моделирования, для известных последовательных алгоритмов переработки слов в *конечных* алфавитах не удается избавиться от условия ***слабой*** моделируемости при использовании классических ***1-ОС*** в качестве моделирующего алгоритма. Как показывает более детальное исследование подобных вопросов моделирования в классических ***1-ОС,*** данная картина объясняется в первую очередь невозможностью удовлетворительного погружения в абсолютно параллельного способа действия ***ОС-***модели сугубо последовательных алгоритмов, т.е. алгоритмов, которые по самой своей сути не допускают достаточного уровня распараллеливания обработки.

На основе ***k-****головочных* машин Тьюринга ***(MT[k])*** рассматривается целый ряд формальных моделей параллельной обработки информации. Так, одна из таких моделей [12] позволяет более просто анализировать ряд ситуаций, возникающих в системах параллель-

ной обработки информации. Модель получает интересные интерпретации в терминах мультипроцессорных вычислительных систем [15]. В детерминированном же случае эта модель вычислений на основе ***MT***[***k***] легко сводится к традиционной одноголовочной ***MT***, но остается вопрос изучения ускорения обработки за счет параллельной работы ***k*** *сканирующих* головок машины. Перед представлением оценки времени моделирования ***MT***[***k***] посредством классической ***1-OC*** определим принцип ее функционирования. Работой сканирующих головок ***MT***[***k***] управляет некоторый *конечный автомат* ***(KA)***, множество внутренних состояний которого есть ***R***. На выходной ленте ***MT***[***k***] записываются символы из некоторого конечного ***A***-алфавита. Функционирование ***j***-й сканирующей головки ***MT***[***k***] определяется программой, содержащей команды следующего вида:

$$a_j r_j \;\Rightarrow\; a_j^* r_j^* Z_p^j;\;\; a_j, a_j^* \in A;\;\; r_j, r_j^* \in R \quad (j = 1..k;\, p \in \{-1,0,1\}) \qquad (50)$$

где z^j_p – сдвиг ***j***-й головки ***MT***[***k***] влево ***(p=-1)***, вправо ***(p=1)***, остается на месте ***(p=0)***. Общее состояние ***KA*** определяется на каждом шаге ***MT***[***k***] некоторой функцией от трех обобщенных переменных – ***r=r(KГ,KR,KZ)***, где ***KГ*** – конфигурация сканирующих головок машины; ***KR*** – конфигурация предложений от головок на смену состояния ***KA***; ***KZ*** – конфигурация сдвигов сканирующих головок. В качестве моделирующего алгоритма выбирается классическая ***1-OC*** с *индексом соседства* Неймана-Мура. При сделанных предположениях имеет место следующий основной результат [5,53,88].

<u>Теорема 77</u>. MT[k] с программой работы длиной в L команд (50) моделируется классической 1-OC с индексом соседства Неймана-Мура за не более, чем t=0.5{[L/2]2+2(2p+1)* [L/2]-4p} (p≥k) шагов структуры, где p – начальное расстояние между крайними сканирующими головками k-головочной машины Тьюринга.

При доказательстве теоремы использовался специальный прием структурирования состояний единичного автомата моделирующей классической ***1-OC***, суть которого иллюстрировалась выше и который может оказаться достаточно полезным при исследовании вопросов моделирования в ***d-OC*** различных процессов и феноменов. Из теоремы 77 следует, что классическая ***1-OC*** моделирует ***MT***[***k***] с замедлением асимптотически не худшим, чем ***t1*** ≈ [***L/8***]+***p/2*** при достаточно больших значениях ***L***, тогда как замедление при моделировании ***L*** шагов классической ***1-OC*** с *индексом соседства* Неймана-Мура посредством ***MT***[***k***] асимптотически не превышает уже величины ***t2*** ≈ [***L/k***] при достаточно больших значениях ***L*** и ограниченных начальных конфигурациях на входных лентах машин. Это позволяет получить интересное асимптотическое соотношение ***t1/t2*** ≈ ***k/8***.

Моделирование на основе классических ***d-OC*** тесно связано с проблемой степени общности того или иного понятия структуры, обсуждение которой было начато в разделе ***1.2***. В монографиях [3,5] и других наших работах исследовался вопрос степени общности понятия классических ***OC***-моделей и основным методом такого исследования являлся и является модельный. Здесь мы продолжим обсуждение данного вопроса относительно одного интересного обобщения ***ПО***-преобразований, введенных ***В.М. Глушковым***, на случай однородных синхронных параллельных процессов. В качестве такого обобщения ***Г. Цейтлин*** предложил [324] однородные периодически определенные преобразования ***(ОПОП)***, суть которых сводится к следующему.

Пусть ***R*** есть двухсторонний бесконечный абстрактный регистр, разделенный на отрезки, содержащие по ***r*** единичных элементов *(разрядов)*. Тогда объект ***ОПОП***

$$\Theta_s^R = \begin{bmatrix} f_1^{t_1}, & f_2^{t_2}, & \cdots & , f_r^{t_r} \\ k_1, & k_2, & \cdots & , k_r \end{bmatrix}$$

определяется функцией сдвига ***s(q) = r*q + k (mod r)*** и системой порождающих функций

$\{f^t_j \mid j=1 .. r\}$, где t_j – арность f^t_j-функции, соответствующая интегральным коэффициентам k_j $(j=1 .. r)$. Результат применения **ОПОП** к произвольному W^* $(W_q \mid -\infty < q < +\infty)$ состоянию R-регистра есть новое состояние $b^* = \Theta^R_s(W^*)$ такое, что $b^* = (b_q \mid -\infty < q < +\infty)$, где состояния единичных элементов q-го отрезка абстрактного R-регистра вычисляются по следующим общим формулам, а именно:

$$b_{s(q)+p-1} = f_p^{t_p}(a_{s(q)+k_p}, a_{s(q)+k_p+1}, \ldots, a_{s(q)+k_p+t_p-1}) \quad (p = 1 .. r)$$

Неформально говоря, функция сдвига $s(q)$ задает периодичность распределения отрезков на абстрактном R-регистре, а упорядоченная система порождающих функций с относящимися к ним коэффициентами определяет изменения состояний элементов q-го отрезка R-регистра. Понятие **ОПОП** легко обобщается и на случай высших размерностей. Данная формальная модель оказывается весьма полезной при рассмотрении целого ряда классических задач параллельного программирования, таких как «*писатели-читатели*», проблема стрелка, конвейерная трансляция и др. Так, **Г.Е. Цейтлин** показал, что на такой модели параллельной обработки можно сортировать строку из n символов за не более, чем n шагов; ранее аналогичный результат для случая классических **1-ОС** был получен нами в работе [37] на основе другого подхода. Данный результат носит не только теоретический характер, но и применим в условиях параллельных процессоров [57]. Оказывается, что такой d-мерный абстрактный R-регистр с определенными на нем **ОПОП** моделируется классической **d-ОС** при весьма умеренных допущениях [5,53].

Теорема 78. ***Каждое однородное периодически определенное преобразование, определенное в A-алфавите и заданное на d-мерном абстрактном R-регистре, 1-моделируется классической d-ОС $(d \geq 1)$ с алфавитом внутренних состояний $A \cup \{b\}$ $(b \notin A)$.***

Приведенный результат еще раз подтверждает значительную степень общности понятия классических **ОС**-моделей и важность использования его, в частности, для задач параллельного программирования, что уже нашло свое развитие в концепции параллельного микропрограммирования [71,162]. Действительно, устанавливая эквивалентность понятий **ОС**-модели и **ОПОП** на абстрактных R-регистрах, можно распространять результаты, методы и подходы развитой **ТОС** и на исследование теоретических вопросов параллельного программирования, изучаемых средствами ***абстрактных*** однородных периодически определенных преобразований. С рядом других интересных примеров моделирования формальных алгоритмов посредством классических **d-ОС** можно ознакомиться в работах [1,3,5,8,9,53-56,88,90,131-135,184-187,190,240,255,308,325,360,536].

Наконец, нетрудно убедиться [1], что любая классическая **1-ОС** с A-алфавитом и индексом соседства $X = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ T-моделируется структурой той же размерности со следующими характеристиками (A^*-*алфавит и* X^*-*индекс соседства*), а именно:

$$\#A^* = \sum_{j=0}^{T-1} a^{k^j}, \quad X^* = \{0,1,2,\ldots,k-1\}; \quad T = \left[\frac{n-k}{k-1}\right] + Sg\left(\frac{n-k}{k-1} - \left[\frac{n-k}{k-1}\right]\right) + 1; \quad n > k$$

где $\#A$ – мощность A-множества и $Sg(x)$ – функция знака. Данный результат позволяет легко обобщить теоремы **76, 77** на случай использования в качестве моделирующего алгоритма классическую **1-ОС** с простейшим индексом соседства $X_n = \{0,1\} \equiv \{-1,0\}$.

В свете представленной проблематики весьма интересно рассмотреть обратную задачу моделирования классических **1-ОС** посредством вышеупомянутых алгоритмов переработки слов. Прежде всего, рассмотрим биологически мотивированные алгоритмы, которым в последнее время уделяется особое внимание в теоретических бионауках. В плане изучения процессовых математических теорий, *изоморфных* некоторым биологическим развивающимся системам, чрезвычайно важным представляется принцип биологичес-

кого эпиморфизма, сводящийся к вопросу о возможности отображения одного алгоритма, определяемого некоторым процессом развития, на другой. В этом случае мы можем говорить об эпиморфизме или изоморфизме двух алгоритмов. Например, по ряду биологических соображений, связанных с исследованием процессовых математических теорий для моделирования биологии развития, нами были определены и изучены так называемые ***A-алгоритмы*** [31], определяемые следующим образом.

Пусть G есть некоторый конечный непустой алфавит и P_j, Q_j $(j=1 .. k)$ – конечные слова *(возможно и пустые)* в G-алфавите, а символы $(\Rightarrow)$ и $(*)$ не принадлежат G-алфавиту. Тогда ***A-алгоритм*** есть некоторое конечное множество продукций следующего вида:

$$P_j \Rightarrow Q_j; \quad P_k \Rightarrow *Q_k \qquad (j = 1 .. k-1) \qquad (51)$$

которое называется ***схемой*** алгоритма, где $P \Rightarrow (*) Q$ обозначает любую из продукций $P \Rightarrow Q$ *(простая)* или $P \Rightarrow *Q$ *(заключительная)*. Функционирование A-алгоритма с данной схемой состоит в следующем. Пусть S_o – произвольное конечное слово, определенное в G-алфавите. Тогда на первом шаге алгоритма $S_1=A(S_o)$ первое вхождение подслова P_1 в S_o заменяется на подслово Q_1. Затем данный процесс повторяется над словом S_1 и так далее, завершаясь на некотором слове S_v, не содержащем вхождений подслова P_1. Тогда к слову S_v применяется описанная выше процедура, но уже относительно вхождений подслова P_2 и так далее. Обработка A-алгоритмом слова S_o завершается на некотором f-шаге тогда и только тогда, когда слово S_f не будет содержать вхождений подслов P_j $(j = 1 .. k-1)$ или слово S_{f-1} содержит вхождение подслова P_k. В этом случае слово $S_f = A(S_o)$ называется результатом переработки *(вычисления)* слова S_o A-алгоритмом с определенной выше схемой (**51**). В противном случае полагается, что заданный A-алгоритм неприменим к S_o-слову. Относительно A-алгоритмов показано [5,31,46], что они эпиморфны классическим ***1-ОС*** и имеют весьма интересные биологические интерпретации.

Используя приведенные выше определения и обозначения, а также определение системы полу-Туэ [5,180], мы можем сформулировать основной результат по моделированию классических ***1-ОС*** посредством упомянутых последовательных алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах [1,3,5,8,9,88].

<u>Теорема 79</u>. Произвольная классическая 1-ОС слабо Т-моделируется LAG-системой, для которой имеют место следующие определяющие характеристики, а именно:

$$C = A \bigcup \{\nabla\}; \quad q = n; \quad p = 2 * \sum_{j=1}^{n} a^j - a^n; \quad T = |s^*| + n - 1$$

Произвольная классическая 1-ОС с индексом соседства $X = \{0,1\}$ слабо Т-моделируется СПП, для которой $\#C=3a+5$, $T=[(3L+10)/2]$ и $L=|s^*|$. Произвольная классическая 1-ОС с индексом соседства $X=\{0,1\}$ слабо Т-моделируется нормальными алгоритмами Маркова, для которых $\#C=2a+5$ и $T=3|s^*|+2$. Произвольная классическая 1-ОС с индексом соседства $X=\{0,1,2,3,...,n-1\}$ слабо Т-моделируется посредством $MT^s{}_q$ при $T=|s^*|+n-1$. Произвольная классическая 1-ОС с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$ слабо Т-моделируется А-алгоритмом, определенным в алфавите $G=A\cup\{b, \nabla\}$ $(\nabla, b \notin A)$. Произвольная классическая 1-ОС с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$ слабо Т-моделируется машиной $MT^s{}_q$, для которой $s = (a+1)$, $q = 2(a+1)$, $sxq = 2(a+1)^2$ и $T = |s^*| + 1$.

Обозначения теоремы ***79*** полностью соответствуют обозначениям теоремы ***76***, а под моделируемой понимается классическая ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2,...,a-1\}$. При этом, использованная при решении указанных задач оптимизирующая техника ***Т-****моделируемости* позволила получить в значительной мере оптимальные соотношения между основными

параметрами моделируемых и моделирующих алгоритмов, что дает основание констатировать тот факт, что *(за исключением машин Тьюринга)* не удается сузить рамки слабой ***T-****моделируемости* до ***T-****моделируемости*, что объясняется принципиальной сложностью погружения сугубо последовательных *(по самой своей сути не допускающих достаточной степени распараллеливания процесса переработки слов)* алгоритмов в высоко параллельную вычислительную среду, каковыми и являются классические ***OC-***модели.

В качестве примера проиллюстрируем в общих чертах доказательство последнего утверждения теоремы **79.** Программа моделирующей MT^s_q весьма проста и реализует следующий алгоритм. Начальная конфигурация MT^s_q представляется в следующем виде:

$$\underset{\blacktriangle\gamma}{\ldots\ \#\#\#c_1c_2c_3\ \ldots\ c_j\ \ldots\ c_m\#\#\#\ \ldots} \qquad c_j\in A\ (j=1\ ..\ m) \tag{52}$$

где $c=\square c_1c_2c_3\ldots c_m\square$ – начальная ***КФ*** моделируемой ***1-OC*** с простейшим индексом соседства $X = \{-1, 0\}$; головка машины сканирует ближайший к *левому* краю ***c-КФ*** **#-**символ, а конечный автомат ***(КА)*** машины находится в начальном **γ-**состоянии. В течение следующих не более $|c|$ шагов MT^s_q перемещает сканирующую головку к *правому* концу ***c-КФ***, по пути изменяя c_j-состояния ячеек ленты в соответствии с ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}(c_{k-1},c_k)=c`_k$ моделируемой ***1-OC***. После обработки состояния ***«конец c-КФ»*** MT^s_q переходит в конфигурацию следующего общего вида, а именно:

$$\underset{\blacktriangle\beta}{\ldots\ \#\#\#c`_1c`_2c`_3\ \ldots\ c`_j\ \ldots\ c`_mc`_{m+1}\#\#\#\ \ldots} \qquad c`_j\in A\ \{j=1\ ..\ (m+1)\} \tag{53}$$

в ***A-***алфавите совпадающую с ***c`-КФ*** такой, что $c`=c\tau^{(2)}$ {$\tau^{(2)}$ – ***ГФП*** *моделируемой* ***1-OC***}. Таким образом, состояния {**γ,β**} ***КА*** являются сигнализирующими, определяя конфигурации MT^s_q, последовательность которых в ***A-***алфавите совпадает с ***КФ-***последовательностью $\langle c\rangle[\tau^{(2)}]$, генерируемой моделируемой ***1-OC***. Затем MT^s_q производит сканирование уже ***КФ*** (**53**) в обратном направлении, по пути изменяя $c`_j$-состояния ячеек выходной ленты в соответствии с ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}(c`_k, c`_{k+1})=c``_{k+1}$. При этом, нетрудно убедиться, что две классические ***1-OC*** с индексами соседства $X1=\{-1,0\}$, $X2=\{0,1\}$ и одинаковыми параллельными подстановками соответственно $xy \Rightarrow y`$ и $xy \Rightarrow x` \equiv y`$ эквивалентны. В результате обратного хода сканирующей головки MT^s_q формирует на выходной ленте ***КФ***, которая в ***A-***алфавите представляет ***c``-КФ*** такую, что $c``=c`\tau^{(2)}$. Затем описанный процесс повторяется, моделируя в ***A-***алфавите динамику искомой классической ***1-OC***. Формально данный процесс обеспечивается следующей простой программой MT^s_q:

$$\begin{array}{l}
\#\gamma \Rightarrow \#\gamma^0\{\rightarrow\};\quad c_k\gamma^{c\kappa-1} \Rightarrow c'_k\gamma^{c\kappa}\{\rightarrow\};\quad \#\beta \Rightarrow \#\beta^0\{\leftarrow\};\quad c'_k\beta^{c'k+1} \Rightarrow c''_{k+1}\beta^{c'k}\{\leftarrow\} \\
\#\gamma^{c_m} \Rightarrow \#\beta\{\uparrow\}\ \ for\ \ (c_m0 \Rightarrow c'_{m+1}=0);\quad \#\gamma^{c_m} \Rightarrow c'_{m+1}\beta\{\rightarrow\}\ \ for\ \ (c_m0 \Rightarrow c'_{m+1}\neq 0) \\
\#\beta^{c'1} \Rightarrow \#\gamma\{\uparrow\}\ \ for\ \ (0c'_1 \Rightarrow c''_0=0);\quad \#\beta^{c'1} \Rightarrow c''_0\gamma\{\leftarrow\}\ \ for\ \ (0c'_1 \Rightarrow c''_0\neq 0) \\
\gamma,\beta,\gamma^{c_t},\beta^{c't},\gamma^0,\beta^0\in Q;\ c_t,c'_p,c''_h\in A;\ t=\{k-1,k,m\},\ p=\{1,k,k+1,m+1\},\ h=\{0,k+1\}
\end{array}$$

Команды $bq \Rightarrow b`q`\{\leftarrow|\uparrow|\rightarrow\}$ моделирующей MT^s_q имеют следующий смысл: если в данный момент на выходной ленте сканируется ячейка с ***b-***символом и ***КА*** находится в ***q-***состоянии, то в следующий момент ***b-***символ заменяется на ***b`-***символ *(возможно,* $b \equiv b`$*)*, ***КА*** переходит в ***q`-***состояние *(возможно* $q\equiv q`$*)* и сканирующая головка подвергается *сдвигу* {←*(влево)*|↑*(на месте)*|→*(вправо)*}. С учетом сказанного приведенная программа работы моделирующей MT^s_q достаточно прозрачна и особых пояснений не требует. Из ее

анализа нетрудно усмотреть, что алфавит символов на выходной ленте есть $S = A \cup \{\#\}$ $(\# \notin A)$ и множество внутренних состояний KA есть $Q=Q1=\{\gamma, \gamma^p \mid p \in A\} \cup Q2=\{\beta, \beta^p \mid p \in A\}$, т.е. $\#S=s=(a+1)$, $\#Q=q=2(a+1)$ и $S \times q=2(a+1)^2$. Время моделирования одного шага ***1-OC*** определяется как $T=|s^*|+1$. С учетом сказанного уже несложно завершить доказательство последнего утверждения теоремы ***79.***

Исключительная ситуация в случае моделирования *машин Тьюринга* ***(MT)*** посредством классических ***1-OC*** объясняется спецификой переработки слов ***MT*** относительно других рассмотренных выше последовательных алгоритмов. А именно, если ***MT*** завершает очередной шаг переработки слова путем *локальной* операции, легко реализуемой ***T-***моделирующей ее ***1-OC,*** тогда как в случае других алгоритмов в общем случае необходим просмотр всего перерабатываемого слова для определения результата его переработки за один шаг алгоритма. Таким образом, ***MT,*** являясь строго *последовательными* алгоритмами, вместе с тем, подобно ***OC-***моделям исповедуют сугубо локальный характер действия ***(****близкодействия****).*** Наряду с этим, данные результаты моделирования в определенной мере могут характеризовать относительную сложность соответствующих алгоритмов ***(****а вместе с тем, и последовательного, и параллельного способов обработки информации****)*** в рамках используемых понятий ***T-моделируемости*** и ***OC-концепции*** в целом***.***

Наряду с отмеченным, из приведенных выше результатов моделирования можно получить ряд весьма интересных следствий, прежде всего, теоретического характера. Так, из результатов ***T. Уаку*** [224] и наших по ***T-***моделированию ***SS-***машин посредством классических ***1-OC*** (теорема ***76)*** можно получить следующий достаточно важный результат, решающий одну из массовых задач динамики классических ***d-OC,*** связанную с так называемыми ***исчезающими КФ (ИсКФ;*** определение ***8)*** [1,3,5,8,9,88].

<u>Теорема 80</u>. Для произвольных классической d-OC ($d \geq 1$) и конечной конфигурации $co \in C(A,d,\phi)$ проблема определения того, будет ли данная co-КФ исчезающей, в общем случае алгоритмически неразрешима.

Более того, ***T. Уаку*** [224] на базе специальной техники погружения в классические ***OC-***модели доказал алгоритмическую неразрешимость проблемы существования для произвольной классической ***d-OC*** ($d > 1$) ***исчезающих КФ.*** Однако для случая классических ***1-OC*** данная проблема алгоритмически *разрешима,* что легко следует из теоремы ***12,*** которая сохраняет силу и для ***пассивных КФ,*** т.е. таких ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$, для которых выполняется соотношение $c\tau^{(n)} \equiv c$. Наряду с рядом других следствий [5] данный результат подтверждает *неэквивалентность* классических ***1-OC*** и ***d-OC*** ($d>1$) также и относительно проблем разрешимости, подчеркивая наличие довольно резкой дифференцировки всего класса классических ***OC-***моделей по их размерности ($d = 1$ и $d \geq 2$).

В главе ***3*** обсуждалась проблема сложности конечных ***КФ*** относительно ***OC-***аксиоматики. В частности, проводился ***сравнительный*** анализ подходов к определению понятий сложности конечных объектов***-****конфигураций* по Колмогорову {***K(X)-****сложность*} на основе возможностей машин Тьюринга ***(****MT^s_q****)*** и нашего {***A(X)-****сложность*} на основе ***OC-****моделей*.

Так, согласно подхода ***Колмогорова*** существует MT^s_q с $S=\{0,1,\square\}$ (***□ –*** *пустой символ****)***, которая, начав работать с пустой лентой, последовательно генерирует на ленте все бинарные представления чисел натурального ряда, т.е. ***G-***множество всех конечных бинарных слов относительно подхода ***Колмогорова*** содержит слова только *ограниченной* сложности. Тогда как относительно нашего подхода такое ***G-***множество содержит бинарные слова сколь угодно большой сложности. Суть данного различия обсуждалась в главе ***3.*** Вместе с тем, за счет увеличения мощности алфавита внутренних состояний и, возможно, размера шаблона соседства можно определить ***1-OC,*** генерирующую в ***B*-***алфавите

множество ***КФ***, совпадающее в ***B***-алфавите с множеством ***C(B,ϕ)*** всех конечных *бинарных* конфигураций.

Прежде всего, определяем MT^s_q при $S=B\cup\{\square$ – *пустой символ*$\}$ и $Q=\{q_k \mid k=1..3\}$; такая машина Тьюринга начинает работу с пустой лентой, находясь в начальном q_1-состоянии. Дальнейшее функционирование определяется следующей простой программой:

$$\square q_1 \Rightarrow 1q_2[0] \qquad 1q_2 \Rightarrow 0q_2[-1] \qquad 0q_2 \Rightarrow 1q_3[1]$$
$$\square q_2 \Rightarrow 1q_3[1] \qquad \{0\mid 1\}q_3 \Rightarrow \{0\mid 1\}q_3[1] \qquad \square q_3 \Rightarrow \square q_2[-1]$$

где команды программы полностью соответствуют формату команд (**5**) MT^s_q (*раздел* ***1.1***). Путем несложной проверки нетрудно убедиться, что определенная таким образом машина MT^s_q последовательно генерирует на выходной ленте бинарные представления всех чисел натурального ряда, реализуя алгоритм сложения по ***(mod 2)***. Но тогда согласно теореме ***74*** существуют ***1-OC*** с индексами соседства $X_1=\{-1,0,1\}$, $X_2=\{-2,-1,0,1,2\}$ и алфавитами внутренних состояний $A_1=S\cup Q\cup\{V_k \mid k=1..9\}$, $A_2 = S\cup Q$, соответственно ***8-*** и ***1-***моделирующие данную MT^s_q и генерирующие в бинарном ***B***-алфавите множество ***C(B, ϕ)*** всех конечных бинарных ***КФ***. Данный результат является хорошей иллюстрацией к обоснованию различий между понятиями ***K(X)-*** и ***A(X)-***сложности ***КФ***. Вообще говоря, можно показать, что для обеспечения возможности генерации классической ***1-OC*** всех конечных бинарных слов на основе рассмотренного выше алгоритма вполне можно ограничиться алфавитом $B^*=B\cup\{\psi\}$ $(\psi\notin B)$ структуры, однако в таком случае существенно увеличивается размер шаблона соседства генерирующей структуры.

Однако, наряду с вопросами моделирования известных алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах значительное внимание уделяется и вопросам моделирования одной классической ***d-OC*** другой структурой с удовлетворением определенных условий, к рассмотрению которых мы и приступаем в следующем разделе.

6.3. Моделирование классических однородных структур структурами из того же класса формальных объектов

К настоящему времени в рамках рассматриваемой проблематики наибольшее количество работ посвящено именно моделированию одной классической ***d-OC*** другой структурой того же типа при различных заданных условиях. Данная проблема представляет значительный теоретический и прикладной интерес, так как результаты исследования в данном направлении позволяют проводить различного типа стандартизации всех или отдельных классов ***OC***-моделей, успешно решать различные оптимизационные задачи, моделировать классические ***d-OC*** с подавлением тех или иных свойств исходных структур и так далее. Особый интерес с прикладной точки зрения, диктуемый со стороны вычислительных наук и целого ряда других приложений, представляет в этом плане задача моделирования классических ***d-OC*** бинарными структурами той же размерности. В общем случае эта задача может быть сформулирована следующим образом: ***Для произвольной классической d-OC с A-алфавитом внутренних состояний и шаблоном соседства (ШС), содержащимся в минимальном d-мерном параллелепипеде*** $n_1 x n_2 x \ldots x n_d$, ***построить моделирующую ее бинарную d-OC с возможно наименьшим размером ШС.*** Как правило, задачи оптимизационного характера во всех областях относятся к разряду достаточно сложных. Не составляет исключения и данная задача, поэтому для ее решения был использован несколько иной метод исследования [5,8,9,53-56,88,90].

Из-за влияния размерности структур на технику оптимизирующего моделирования было решено рассматривать сформулированную выше задачу отдельно для случаев классических ***1-OC*** и ***d-OC (d > 1).*** Выше уже отмечалась неэквивалентность ***1-OC*** и ***d-OC (d > 1)*** относительно некоторых феноменов**;** ряд аспектов обсуждения данного вопроса представлен выше. Это же относится и к проблеме моделирования в классических ***d-OC.*** Ниже мы действительно убедимся, что увеличение размерности позволяет уменьшать размеры ***ШС*** моделирующей ***d-OC*** при прочих равных условиях**.** В более ранних наших работах и в работах большинства других исследователей по проблеме моделирования в классических ***d-OC*** не использовалось влияние размерности структуры на параметры моделирующих структур и техника моделирования *априори* исходила из эквивалентности в смысле возможностей моделирования основных процессов и алгоритмов как посредством ***1-OC,*** так и посредством ***d-OC (d > 1).*** Позднее данному моменту было уделено особое внимание и техника моделирования стала выбираться в зависимости от влияния на оптимизирующий фактор ***размерности*** классической ***d-OC.*** Принимая во внимание вышесказанное и используя ряд интуитивных соображений, была предложена специальная оптимизирующая техника моделирования классических ***d-OC*** *бинарными* структурами**,** учитывающая влияние на этот процесс *размерности* моделируемой структуры. Предложенный подход позволил получить следующий основной результат [5,9].

<u>Теорема 81</u>. Произвольная классическая d-OC (d ≥ 2) 1-моделируется бинарной структурой той же самой размерности и шаблоном соседства следующего размера:

$$L = (L_1)^{d-1}(L_d + 1)\prod_{1}^{d}(p_k + 1); \quad L_1 = \lfloor V = \sqrt[d]{\log_2(a-1)+2}\rfloor; \quad L_d = L_1 + \lfloor 2(V - L_1)\rfloor$$

где $p_1 x p_2 x \ldots x p_d$ – размер минимального d-мерного параллелепипеда, содержащего ШС моделируемой d-OC, при условии выполнения следующего определяющего соотношения для параметров моделирующей структуры, а именно: $\log_2 \log_2 4(a-1) \geq d$.

Следовательно, ребро ***d-***мерного ***ШС*** моделирующей бинарной ***d-OC (d ≥ 2)*** с ростом размерности уменьшается асимптотически в $\sqrt[d]{\log_2(a-1)+2}$ раз при условии выполнения определяющего соотношения**,** указанного в теореме ***81.*** На данном результате прервем обсуждение вопросов моделирования ***d-OC (d>1)*** и несколько детальнее рассмотрим одномерный случай**,** для которого предложена оптимальная техника**,** максимально учитывающая специфику функционирования классических ***1-OC*** [3,5,9,54]**.** Данная техника базируется на принципе максимального приближения характеристик моделирующей ***1-OC*** к соответствующим характеристикам потенциально оптимальных моделирующих структур. При этом, под ***потенциально оптимальными*** понимаются такие моделирующие ***d-OC,*** значения основных параметров которых могут быть и недостижимыми**,** но способными служить хорошим ориентиром для перспективы исследований в данном направлении, а также и для оценки значений параметров уже полученных моделирующих структур. Для классических ***1-OC*** потенциально оптимальной полагается моделирующая ее бинарная ***1-OC*** с ***ШС*** размера $L_{opt}=(n+1)[\log_2 a]+2$**,** которая, к тому же, является недостижимой. В свете данной оценки возникает задача получения наиболее близкой к такой потенциально оптимальной классической ***1-OC,*** реальной моделирующей структуры той же самой размерности.

Исследования в данном направлении позволили определить моделирующую классическую бинарную ***1-OC*** с ***ШС*** размера $L=(n+1)[\log_2 a +1 +\omega]+2$**,** где $0<\omega<1$**.** Для оценки степени близости полученной моделирующей бинарной ***1-OC*** к потенциально оптимальной структуре можно воспользоваться следующим очевидным соотношением**:**

$$\frac{L}{L_{opt}} = \frac{(n+1)*[\log_2 a]+(n+1)*[1+\varpi]+2}{(n+1)*[\log_2 a]} = 1 + \frac{1+\varpi}{\log_2 a} + \frac{2}{(n+1)*[\log_2 a]}; \quad (0 < \varpi < 1)$$

из которого нетрудно сделать вывод о вполне *удовлетворительной* близости полученной моделирующей структуры к своего рода *эталонной* структуре даже при умеренных размерах ***A*-**алфавита внутренних состояний и ***ШС*** моделируемой классической ***1-ОС*.** При этом, величина ω зависит от ряда условий и, как показывают оценки, полученные нами на ЭВМ, при $a \le 2^{19}$ величина ω не превышает единицы, поэтому в вычислениях можно принимать значение $\omega=1$. Для практических целей это вполне приемлемый подход, так как уже такое число состояний единичного автомата моделируемой классической ***1-ОС*** практически необозримо. В общем же случае величина ω не превышает двух. С учетом сказанного может быть сформулирован следующий основной результат для произвольных классических ***d-ОС*** [5,53,54,88].

Теорема 82*. *Любая классическая d-ОС ($d \ge 1$) с алфавитом внутренних состояний $A=\{0, 1, 2, ..., a-1\}$ единичного автомата и ШС, содержащимся в минимальном d-мерном параллелепипеде $p_1 \times p_2 \times ... \times p_d$, 1-моделируется бинарной d-ОС с ШС размера $L=[(p_1+1)(\log_2 a + p_1+\beta)] \times p_2 \times p_3 \times ... \times p_d$, где $\beta = 4$ при $a \le 2^{19}$ и $\beta = 5$, в противном случае.

Метод доказательства данной теоремы позволяет достаточно эффективно моделировать классические ***1-ОС*,** имеющие большие алфавиты внутренних состояний и небольшие ***ШС*,** бинарными классическими ***1-ОС*** с весьма приемлемыми размерами ***ШС*.** Проиллюстрируем сказанное одним интересным примером, имеющим важное самостоятельное значение. Будем говорить, что классическая ***d-ОС*** является ***универсальной*** (*или обладает **универсальной вычислимостью**)*, если она ***Т-моделирует*** универсальную машину Тьюринга ***(УМТ)*.** Такие структуры обладают свойством универсальной вычислимости и играют важную роль при исследованиях классических ***d-ОС*** в качестве формальной модели параллельных вычислений. Определять ***универсальную*** вычислимость в ***ОС*-**моделях можно и другими эквивалентными способами, о которых речь будет идти ниже.

В связи с определением универсальной вычислимости на основе понятия ***Т*-**моделируемости возникает важный вопрос о минимальной сложности классической ***1-ОС*, *Т*-**моделирующей ***УМТ*,** или в более общей постановке о наиболее простой ***1-ОС*,** обладающей свойством универсальной вычислимости. В качестве меры сложности универсальной ***d-ОС*** вполне естественно использовать величину произведения ***d*x*a*x*n*,** где сомножители определяют значения основных параметров такой структуры, соответственно**:** размерность, мощность ***A*-**алфавита внутренних состояний и размер ***ШС*.** На наш взгляд**,** получение универсальной классической ***d-ОС*** с минимальным произведением ***d*x*a*x*n*** представляет собой не менее сложную задачу**,** чем получение универсальной MT^s_q с минимальным произведением ***s*x*q*,** составляющим на сегодня величину ***s*x*q*=28*.** Хотя с формальной точки зрения это и не является такой уж и серьезной научной проблемой [54-56].

Для классических ***1-ОС*** наилучший результат в данном направлении был получен ***А. Р. Смитом*** [131]**,** доказавшим существование *универсальных* структур со следующими значениями произведения ***a*x*n*: 2x40, 3x18, 6x7, 8x5, 9x4, 12x3** и **14x2.** Здесь интересно отметить существование универсальной классической ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства ***X* = {*0,1*}.** Таким образом, удалось получить универсальную классическую ***1-ОС*** со значением произведения ***a*x*n*=28,** совпадающим с известным наилучшим на сегодня минимальным значением произведения ***s*x*q*=28*** для универсальной MT^s_q**.** Наилучший результат аналогичного типа для случая универсальных ***2*-**мерных классических структур получен ***Э.Р. Бэнксом*** [132]**,** доказавшим существование универсальных структур со значением произведения ***d*x*a*x*n*=2x2x5** при использовании бесконечной начальной ***КФ*** моделирующей структуры и ***d*x*a*x*n*=2x3x5,** в противном случае. Результаты ***А.Р. Смита*** и ***Э.Р. Бэнкса*** позволили, кроме всего прочего, сделать ряд интересных выводов о влиянии размерности ***d-ОС*** и типа используемых начальных ***КФ*** на результаты моделирования в *классических*

одномерных структурах. Ряд аналогичных результатов в данном направлении несколько позднее был получен ***А.С. Подколзиным*** и другими [158,199,200,536].

С точки зрения прикладных аспектов теории однородных структур в вычислительных науках и в целом ряде других областей весьма интересным представляется вопрос получения минимальной сложности универсальных бинарных ***d-ОС.*** Используя метод доказательства теоремы ***82*** [53], нетрудно показать, что универсальная классическая ***1-ОС*** с произведением ***axn=14x2 (****является одним из отмеченных выше результатов* ***А. Смита)*** ***T-***моделируется бинарной ***1-ОС*** с ***ШС*** размера $L=(2+1)[\log_2 16]+5=17$, т. е. для моделирующей классической ***1-ОС*** допустимо произведение $axn=2x17$. Это приводит нас к следующему интересному результату [53]**:** ***существуют универсальные классические бинарные 1-ОС с ШС размера n=17.*** Данный результат доказывает существование универсальных бинарных ***1-ОС*** с небольшими размерами ***ШС*** и до последнего времени он являлся одним из наилучших результатов в данном направлении [5,88,90].

Использованный *оптимизирующий* метод моделирования классических ***1-ОС*** бинарными структурами того же класса дает в общем случае достаточно хорошие результаты и определяет хорошие сравнительные характеристики относительно потенциально оптимальных моделирующих структур. Однако его эффективность зависит в определенных пределах от значений основных параметров моделируемых структур**:** мощности ***А-***алфавита внутренних состояний и размера ***ШС.*** Поэтому, в отдельных случаях можно использовать специальные модификации указанного метода, позволяющие получать более близкие к оптимальным результаты моделирования**.** Рассмотрим данный аспект моделирования на примере задачи получения *минимальной* сложности *универсальных* классических ***1-ОС*** с мощностями ***А-***алфавитов, равными соответственно $a=2$, $a=3$ и $a=4$**.** С этой целью определим способ моделирования классической ***1-ОС*** с ***ШС*** размера ***n*** и алфавитами ***А**** внутренних состояний мощности соответственно ***4, 8*** и ***14.*** Классические ***ОС-***модели с такими характеристиками представляют особый интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения [3,5,9,53,88,90].

Общий принцип *оптимизирующего* моделирования классических ***1-ОС*** посредством бинарных структур того же класса, использованный для получения вышеуказанных результатов теорем ***81*** и ***82,*** состоял в следующем [53]**.** Символы ***А-***алфавита внутренних состояний единичных автоматов моделируемой ***1-ОС*** кодировались бинарными кортежами $\langle x_1x_2 \dots x_m\rangle$ $(x_k \in B=\{0,1\};\ k=1 .. m;\ m=[\log_2 a]$, где $[w]$ **–** число, не меньшее $w)$ и произвольная конфигурация $c=\square\dots y_{k-1}y_ky_{k+1}\dots\square$ моделируемой структуры в моделирующей принимала следующий общий вид, а именно**:**

$$\dots\dots\ |M|x^{k-1}{}_1x^{k-1}{}_2\ \dots\dots\ x^{k-1}{}_m|M|x^k{}_1x^k{}_2\ \dots\dots\ x^k{}_m|M|x^{k+1}{}_1x^{k+1}{}_2\ \dots\dots\ x^{k+1}{}_m|M|\ \dots\dots$$

где бинарные кортежи $\langle x^k{}_1x^k{}_2 \dots x^k{}_m\rangle$ $(x^k{}_j \in B=\{0,1\};\ j=1 .. m;\ m=[\log_2 a];\ k=-\infty .. +\infty)$ представляют соответствующие y_k-состояния моделируемой ***1-ОС,*** а бинарный ***М-***маркер служит для целей однозначного рекурсивного выделения из общей бинарной ***КФ*** моделирующей ***1-ОС*** кортежей***-****представителей* символов состояний моделируемой структуры. При этом, при кодировании символов ***А-***алфавита *моделируемой* ***1-ОС*** исключались бинарные $\langle x_1x_2 \dots x_m\rangle$**-**кортежи, нарушающие уникальность ***М-***маркера в бинарных конфигурациях моделирующей ***1-ОС.*** Для общего случая моделирования был выбран достаточно удачный маркер ***M=01110,*** который, однако, в случае относительно небольших ***А-***алфавитов и ***ШС*** моделируемых ***1-ОС*** оказался недостаточно эффективным. Поэтому, используя описанный выше общий подход, для случая небольших ***А-***алфавитов и ***ШС*** моделируемых классических ***1-ОС*** были использованы его специальные модификации, суть которых сводится к следующему, а именно.

Рассмотрим классическую ***1-OC*** с ***A***-алфавитом ***a***-мощности ***(a ≥ 6)*** и ***ШС*** размера ***n***. Используя вышеописанный подход, в качестве представления символов ***A***-алфавита моделируемой ***1-OC*** выбираем бинарные кортежи $\langle x_1x_2x_3 \ldots x_m\rangle$ $(x_k \in B=\{0,1\};\ k=1 \ldots m;\ m = [\log_2(a+2)]$, где $[w]$ – число, не меньшее w), исключая два бинарных кортежа $\langle 10^{m-1}\rangle$ и $\langle 0^{m-1}1\rangle$, чтобы обеспечить в ***КФ*** (**54**) уникальность ***M***-маркера, в качестве которого выбирается кортеж $\langle 10^{m-1}1\rangle$. Очевидно, с помощью указанных бинарных кортежей *(кроме двух отмеченных)* можно однозначно закодировать все символы алфавита $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ $(a \geq 6)$ моделируемой структуры; например, посредством функции $\varphi(p)$ бинарного представления p-числа с очевидными изменениями, связанными с отсутствием двух указанных кортежей. В частности, не нарушая общности, в качестве алфавита моделируемой ***1-OC*** можно выбирать множество $A=\{0,2,3, \ldots, a-1\}\backslash\{2^{z-1}+1\}$ $(z=[\log_2 a])$. При сделанных предположениях любая конечная конфигурация $c=\square y_1 \ldots y_{k-1} y_k y_{k+1} \ldots y_h \square$ $(y_p \in A;\ p=1..h)$ моделируемой классической ***1-OC*** представляется в моделирующей структуре бесконечной конфигурацией следующего общего вида, а именно:

$$\ldots\ldots |x^1_1x^1_2 \ldots x^1_m|10^{m-1}1|\ldots.|10^{m-1}1|x^{k-1}_1x^{k-1}_2 \ldots x^{k-1}_m|10^{m-1}1|x^k_1x^k_2 \ldots x^k_m|10^{m-1}1|$$
$$x^{k+1}_1x^{k+1}_2 \ldots x^{k+1}_m|10^{m-1}1|\ \ldots.\ |x^h_1x^h_2 \ldots x^h_m|10^{m-1}1|\ldots\ldots \quad (54)$$

При таком способе кодирования несложно убедиться, что $\langle 10^{m-1}1\rangle$-маркер в бинарной ***КФ***, имеющей структуру (**54**), является уникальным кортежем и рекурсивно идентифицирует бинарные кортежи $\langle x^k_1x^k_2 \ldots x^k_m\rangle$ – представители соответствующих y_k-символов моделируемой классической ***1-OC***. Так как ***моделируемая*** классическая ***1-OC*** имеет ***ШС*** размера ***n***, то моделирующая ее классическая ***1-OC*** с учетом вида (**54**) текущей бинарной ***КФ*** структуры должна иметь минимальный индекс соседства следующего вида: $X=\{-(m-1), \ldots, -2,-1,0,1,2, \ldots, 2mn+n-m-2\}$, дающий возможность при вычислении каждого x^k_j-бита $\langle x^k_1x^k_2 \ldots x^k_m\rangle$-кортежа, представляющего y_k-символ ***A***-алфавита $(x^k_j \in B;\ y_k \in A;\ j=1..m;\ m=[\log_2(a+2)];\ k=-\infty .. +\infty)$, рекурсивно предоставлять в распоряжение ***ЛФП*** моделирующей ***1-OC*** всю информацию о конфигурации ***ШС*** моделируемой структуры, включая ***M***-маркеры. Читателю в качестве весьма полезного упражнения рекомендуется полностью ***«расписать»*** основные фрагменты параллельных правил подстановки ***ЛФП*** *моделирующей* структуры для общего случая *моделируемой* классической ***1-OC***. С учетом сказанного уже нетрудно убедиться, что произвольная классическая ***1-OC*** с алфавитом ***A*** $(a \geq 6)$ и ***ШС*** размера ***n*** ***1***-моделируется бинарной классической ***1-OC*** с ***ШС*** размера $L = n \times [2 \times \log_2(a+2) + 1] - 2$.

Аналогичным образом рассмотрим моделирование произвольной классической ***1-OC*** с ***A***-алфавитом $(4 \leq a \leq 21)$ и ***ШС*** размера ***n*** посредством классической ***1-OC*** с алфавитом $A^*=\{0,1,2\}$, определив минимально достаточный размер ее ***ШС***. Для этих целей каждый α-символ из ***A***-алфавита моделируемой структуры кодируется кортежем $\langle x_1x_2x_3\rangle$ согласно некоторой *рекурсивной* функции $\Omega: \alpha \Rightarrow \langle x_1x_2x_3\rangle$ $(x_k \in A^*;\ k=1 .. 3)$. Множество всех таких кортежей содержит, очевидно, **27** элементов. Однако, из него исключаются следующие кортежи: *(1)* $\langle 101\rangle$ *– маркер* и *(2)* $\langle w10\rangle, \langle 01w\rangle$ $(w \in A^*)$, обеспечивая *уникальность* $\langle 101\rangle$-маркера в каждой текущей конфигурации следующего вида, а именно:

$$\ldots\ldots |101|x^{k-1}_1x^{k-1}_2x^{k-1}_3|101|x^k_1x^k_2x^k_3|101|x^{k+1}_1x^{k+1}_2x^{k+1}_3|101|\ \ldots\ldots$$

моделирующей структуры $(x^k_j \in A^*;\ j=1 .. 3;\ k=-\infty .. +\infty)$. С учетом сказанного, оставшиеся $\langle x_1x_2x_3\rangle$-кортежи в количестве $27-6=21$ позволяют однозначно кодировать ***A***-алфавит моделируемой классической ***1-OC*** при $4 \leq a \leq 21$. Нетрудно убедиться, что индекс сосед-

ства ***X*={*-2,-1,0,1,2,...,6n-4*}** моделирующей ***1-OC*** определяет минимальный ***ШС*** для обеспечения полноты информации о конфигурации ***ШС*** моделируемой структуры. Таким образом, произвольная классическая ***1-OC*** с ***A*-**алфавитом ***(4≤a≤21)*** и шаблоном соседства размера ***n 1-моделируется*** классической ***1-OC*** с алфавитом ***A*={0,1,2}*** и шаблоном соседства размера ***L = 6n - 1*.**

Наконец**,** в качестве *моделирующей* рассмотрим классическую ***1-OC*** с алфавитом ***A*={0,1, 2,3}*,** минимальный ***ШС*** которой требуется определить. В этом случае в качестве маркера выбирается кортеж ***<101>*,** а из множества всех кортежей $<x_1x_2>$ $(x_1,x_2 \in A^*)$ удаляются два кортежа ***<01>*** и ***<10>*.** Тогда оставшиеся кортежи в количестве ***14*** дают возможность однозначно кодировать символы ***A*-**алфавита ***(5 ≤ a ≤ 14)*** моделируемой классической ***1-OC*.** При этом, обеспечивается уникальность ***<101>*-**маркера и рекурсивность декодирования кортежей в каждой текущей конфигурации следующего вида, а именно**:**

..... |101|$x^{k-1}{}_1x^{k-1}{}_2$|101|$x^k{}_1x^k{}_2$|101|$x^{k+1}{}_1x^{k+1}{}_2$|101| .....

моделирующей классической ***1-OC*** $(x^k{}_j \in A^*=\{0,1,2,3\};\ j=1,2;\ k=-\infty\ ..\ +\infty)$**.** Нетрудно убедиться, что индекс соседства ***X*={*-1,0,1,2,..., 5n-4*}** обеспечивает полноту информации о конфигурации ***ШС*** моделируемой классической ***1-OC*.** Таким образом, произвольная классическая ***1-OC*** с ***A*-**алфавитом ***(5 ≤ a ≤ 14)*** и ***ШС*** размера ***n 1-моделируется*** классической ***1-OC*** с алфавитом ***A*={0,1,2,3}*** и ***ШС*** размера ***L=5n-2*.** Вышесказанное резюмирует следующий основной результат [5,8,9].

<u>Теорема 83</u>. Произвольная классическая 1-OC с A-алфавитом (a ≥ 6) и ШС размера n 1-моделируется бинарной классической 1-OC с ШС размера $L=n\times[2\times log_2(a+2)+1]-2$***. Произвольная классическая 1-OC с A-алфавитом (4 ≤ a ≤ 21) и шаблоном соседства размера n 1-моделируется классической 1-OC с алфавитом A*={0,1,2} и шаблоном соседства размера L=6n-1. Произвольная классическая 1-OC с A-алфавитом (5 ≤ a ≤ 14) и ШС размера n 1-моделируется классической 1-OC с алфавитом A*={0,1,2,3} и ШС размера L=5n-2*.**

Но так как из вышеотмеченного результата ***A. Смита*** [131] следует существование универсальной классической ***1-OC*** с произведением значений ее основных параметров ***a×n = 14×2*,** то, используя ее в качестве моделируемой структуры, на основе теоремы ***83*** нетрудно убедиться в существовании универсальных классических ***1-OC*** с произведениями**:** ***a×n=2×16, a×n=3×11*** и ***a×n=4×8*.** Теорема ***83*** доказывает существование *универсальных* классических ***1-OC*** с небольшими размерами алфавита внутренних состояний и шаблона соседства, представляя на сегодня наилучший известный нам результат в этом направлении. Интересна сама технология использования результата теоремы ***83*.** Методом моделирования ***A.P. Смит*** определил универсальную классическую ***1-OC*** с произведением ***a×n=14×2*** наряду с универсальной структурой того же типа при условии ***a×n=2×40;*** и при этом использовался один и тот же метод моделирования. Применяя методику доказательства теоремы ***83*,** в качестве моделируемой классической ***1-OC*** выбираем универсальную структуру с произведением ***a×n=14×2*,** являющуюся в свою очередь продуктом моделирования, и на ее основе получаем *моделирующую* ее *бинарную* классическую ***1-OC*** при условии ***a×n=2×16*,** улучшив наш предыдущий результат в этом направлении. Это говорит о том, что методика, основанная на теореме ***83*,** может служить хорошей отправной точкой при организации оптимизирующей техники моделирования в классических однородных структурах. При этом, следует иметь в виду, что первый результат теоремы ***83*** является *предпочтительнее* результата теоремы ***82*** только в весьма узких диапазонах значений ***a*** и ***n*,** в остальных случаях результат теоремы ***82*** является более предпочтительным. В связи со сказанным возникает интересный вопрос о существовании универсальных бинарных классических ***1-OC*** с шаблоном соседства *минимально* возможно-

го размера **(ρ);** в данном направлении показано, что ***5 ≤ ρ < 16*** [90]. Между тем, еще раз следует отметить, что подобного рода минимизации не столь уж и принципиальны.

Действительно, задача определения универсальной классической ***d-OC*** с ***минимальным*** значением величины ***dxaxn*** не представляется столь уж важной и во многом представляет, скорее, гносеологический интерес**;** как, впрочем, и для случая ***УМТ*****.** Как для практических, так и для теоретических приложений минимальные по сложности универсальные формальные вычислительные модели весьма громоздки и малообозримы.

Наряду со сказанным, теоремы ***82*** и ***83*** позволяют существенно упрощать технологию моделирования сложных процессов, требующих больших усилий для погружения их в классические ***1-OC*****.** В общем виде суть данной технологии сводится к следующему. На первом этапе *сложный* дискретный *процесс* погружается в классическую ***1-OC*****,** имеющую минимальный размер ***ШС*****,** соответствующий индексу соседства Мура**,** и большой алфавит внутренних состояний. Данному этапу может предшествовать использование структур типа ***1-OC* (***см. главу ***1)*** с последующим переходом к эквивалентным им классическим ***1-OC*****.** На этих этапах параллельное программирование в классической ***1-OC (1-OC*)*** существенно упрощается благодаря большому алфавиту внутренних состояний и незначительному ***ШС*****.** На последнем этапе теоремы ***82*** и ***83*** позволяют осуществлять переход к практически важным бинарным ***1-OC*** с удовлетворительными размерами ***ШС*****.** В качестве иллюстраций сказанного можно рассмотреть два достаточно интересных примера, а именно**:** проблемы ***ограниченного роста*** в классических ***OC-***моделях и ***периодических*** конечных ***КФ*** с максимальными периодами [5,54-56,88,90,536].

Первый пример связан с проблемой ***ограниченного роста*** в классических ***OC-***моделях, рассмотренной для случая ***1-OC*** в разделе ***1.2*****.** Параллельные алгоритмы выращивания цепочек активных автоматов фантастической длины**,** полученные здесь с использованием структур класса ***1-OC*,*** погружаются в классические ***1-OC*** с ***ШС*** размера ***L=3*** и алфавитом внутренних состояний мощности ***(4m+29),*** где ***m –*** скорость передачи управляющей информации в ***OC*-***модели. Тогда на основе теоремы ***83*** несложно сделать вывод о существовании эквивалентных им бинарных классических ***1-OC*** с шаблонами соседства размера $L = 3x[log_2 (4m + 31)] - 2$**.**

В качестве второго примера может служить задача определения *максимально* возможных минимальных размеров периодов для периодических конечных ***КФ*** в бинарных классических ***1-OC*****.** В монографии [5] показано, что существует структура ***1-OC****,* функциональный алгоритм которой допускает для любого целого ***m≥3*** наличие периодических конечных ***КФ*** длины ***m*** с *минимальным* периодом $p=2^m - 2$ при мощностях алфавитов внутренних состояний ***A*** и управляющих импульсов ***I,*** равных ***трем*****.** Там же показано, что такая структура ***1-OC**** *эквивалентна* классической ***1-OC*** с ***A*-***алфавитом внутренних состояний ***(#A*=#A+#I = 6)*** и индексом соседства Неймана-Мура. Применение к данным результатам метода доказательства теоремы ***82*** приводит к установлению существования бинарных классических ***1-OC*** с ***ШС*** размера ***n=17,*** обладающих периодическими конечными ***КФ*** длины ***(5m+3) (m≥3)*** с минимальным периодом $p=2^m-2$**.** Таким образом**,** в общем случае просматриваются три основных этапа такого типа моделирования в классических ***d-OC: d-OC**** ⇒ классические ***d-OC*** ⇒ бинарные классические ***d-OC*****.**

Оценку для шаблона соседства моделирующей бинарной ***1-OC*** в теореме ***83*** можно обобщить, исходя из некоторого используемого бинарного ***M-***маркера длины ***m*****.** В таком случае величину ***L*** размера шаблона соседства моделирующей классической бинарной ***1-OC*** можно представить как $L(a,n,m)=(n+1)([log_2 a]+m)-2m-1$**,** где ***a*** и ***n –*** соответственно мощность ***A-***алфавита и размер ***ШС*** моделируемой классической ***1-OC*****.** Таким образом, в ряде случаев целесообразно увеличивать ***m-***размер ***M-***маркера**,** что приводит к уменьшению размера ***ШС*** моделирующей структуры**;** именно так и было сделано при доказа-

тельстве предыдущей теоремы. Поэтому, в каждом конкретном случае выбор ***ШС*** моделирующей ***1-ОС*** состоит в минимизации величины ***L(a,n,m)*** путем выбора подходящего ***M-***маркера. Используя технику моделирования классических ***1-ОС,*** предложенную при доказательстве теоремы ***83,*** можно получить интересную оценку размера ***ШС*** моделирующих бинарных структур и для случая высших размерностей.

<u>Теорема 84</u>. Любая классическая d-ОС (d ≥ 1) с A-алфавитом внутренних состояний и ШС, содержащимся в минимальном d-мерном параллелепипеде $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_d$, 1-моделируется бинарной d-ОС с ШС следующего размера, а именно:

$$L = p_1 \times \{[2 \times log_2 (a+2) + 1] - 2\} \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_d$$

Следует напомнить, что при построении вышеперечисленных *моделирующих* бинарных классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** использовалась оптимизирующая техника, состоящая в определении для них *потенциально оптимальных* ***1-***моделирующих классических ***d-ОС*** с последующим приближением к ним конкретно программируемых структур. При этом, возвращаясь вновь к теоремам ***82,83,*** следует отметить, что приведенные в них оценки ***ШС 1-***моделирующих структур улучшить довольно трудно, если принять во внимание следующее соображение ***(****на примере бинарных моделирующих структур****).***

Выше мы определили *потенциально оптимальную* моделирующую классическую ***d-ОС.*** Можно пойти еще дальше, положив для *бинарной* моделирующей ***1-ОС*** условие, что все символы ***A-***алфавита внутренних состояний ***1-***моделируемой ***1-ОС*** кодируются их бинарными представлениями, а маркеры-разделители отсутствуют. Для такой классической ***1-ОС*** предполагается возможность использования ее в качестве *моделирующей* структуры с минимально необходимым ***ШС*** размера $L^*=(n+1)[log_2 a] - 1$. Очевидно, что определенная таким образом моделирующая структура является недостижимой. Но соотношения для значений реально ***1-***моделирующей ***(****L определяется теоремой* ***82)*** и недостижимой ***(L*)*** структурами $L/L^* \approx 1+(n+\beta)/log_2 a$ и $L - L^* = (n+1)(n+\beta)+1$ говорят о достаточно хорошем приближении определенной теоремой ***82*** моделирующей бинарной ***d-ОС*** даже к такой недостижимой моделирующей структуре. Подобный анализ для случая результата моделирования, определяемого теоремой ***83,*** еще раз подтверждает узость рамок его достаточно эффективного применения.

Оценку для размера ***ШС 1-****моделирующей* бинарной ***d-ОС*** в теореме ***82*** можно обобщить, если исходить из некоторого используемого *бинарного* маркера-разделителя ***v-***длины. В этом случае величина ***L*** размера ***ШС 1-***моделирующей бинарной ***1-ОС*** представляется следующим определяющим соотношением, а именно:

$$L(a,n,v) = (n+1)[log_2 a + \beta(a,v)] + n + [v(a) - 1]$$

где $\beta(a,v)$, $v(a)$ – функции соответствующих величин. Точнее, при возрастании мощности ***A-***алфавита *моделируемой* ***d-ОС*** целесообразно в определенных случаях увеличивать размеры маркера-разделителя, что приводит к уменьшению, порой существенному, величины $\beta(a,v)$, а в целом и всего размера ***ШС T-***моделирующей структуры. Поэтому, в каждом конкретном случае выбор ***ШС*** моделирующей бинарной ***d-ОС*** состоит в минимизации величины ***L(a,n,v)*** путем выбора подходящего маркера-разделителя. В этом мы можем убедиться уже на довольно простых примерах ***T-***моделирования [8,53]. На основе наших данных представленные здесь результаты по ***1-***моделированию одной классической ***d-ОС*** другой структурой той же размерности являются наилучшими на сегодня, решая целый ряд ранее поставленных вопросов [3,5,8,9,53-56,88,90,536].

Существенный как теоретический, так и прикладной интерес представляет вопрос моделирования классических ***d-ОС*** структурами того же класса, но с понижением размерности. В работе [532] представлен и проанализирован один интересный подход к реали-

зации моделирования классических ***3-OC*** посредством ***2-OC,*** использующий некоторые результаты работ [533,534]. Обобщение данного подхода позволяет моделировать ***d-OC (d > 2)*** посредством ***2-OC.*** Однако данный подход не работает для ***1***-мерного случая**,** не позволяя моделировать ***2-OC*** посредством ***1-OC.*** Нижеследующая теорема представляет иной подход**,** обеспечивающий моделирование классических ***2-OC*** посредством ***1-OC.***

<u>Теорема 85</u>. Произвольная классическая 2-OC моделируется соответствующей классической 1-OC с индексом соседства Неймана-Мура.

Хорошо известно [3,5] *(раздел* ***6.1)***, что произвольная классическая ***d-OC*** моделируется ***d-OC*** с простейшим индексом соседства ***X*** = {***(0,0,...,0),(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0), ..., (0,0,...,1)***}, т.е. ее шаблон соседства содержит ***(d+1)*** единичных автоматов**,** из которых один **–** центральный и ***d***, по одному прилегающих к нему по осям координат E^d. Поэтому вполне достаточно ограничиться случаем ***2-OC*** с алфавитом внутренних состояний единичных автоматов ***A***={***0,1,2, ..., a-1***} и индексом соседства ***X***={***(0,0), (1,0), (0,1)***}. Сначала нам предстоит определить MT^s_q**,** моделирующую процесс генерации исходной структурой ***2-OC*** произвольной последовательности ***КФ*** $<c_o>$ = $\{c_o\tau^{(3)k} \mid k=0,1,2,3,...\}$ $(c_o \in C(2,A,\phi))$.

#	0	0	.....	0	0	
#	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	0	
#	a_{21}	a_{22}	.....	a_{2n}	0	
#	.....	.....	.....	.....	.....	
#	a_{m1}	a_{m2}	.....	a_{mn}	0	
#	0	0	.....	0	0	

(0,1)	
(0,0)	(1,0)

Простейший шаблон соседства в 2-OC

Произвольную начальную ***КФ*** $c_o \in C(2,A,\phi)$ ограничиваем минимальным содержащим ее ***(nxm)***-прямоугольником, как это показано на предыдущей схеме. Очевидно, ввиду типа шаблона соседства, указанного на той же схеме, на каждом шаге применения к *текущей* ***КФ ГФП*** $\tau^{(3)}$ *изменениям* могут быть подвержены лишь состояния левой и нижней полосок единичных автоматов структуры, затененных более темным цветом. Для моделирования динамики ***2-OC*** определяем начальную ***КФ*** c_o у MT^s_q в следующем виде**:**

□	#	0	0	...	0	#	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	.....	#	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	□
□	#	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	#	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	.....	#	0	0	...	0	□

▲q_o

Принцип организации начальной ***КФ*** у MT^s_q весьма прост и состоит в следующем. Алфавит ***S*** состояний клеток на ленте структурируется на *двух уровнях***,** где состояние ***(□□)*** определяет пустую клетку. Состояния начальной ***КФ*** c_o ***2-OC*** структурируются в соответствии со строками ограничивающего ее прямоугольника и двух нулевых строк сверху и снизу**;** при этом, *уровни* располагаются согласно следующей нумерации строк**:** ***0÷1, 1÷2, 2÷3, 3÷4 ,..., (m-1)÷m, m÷(m+1).*** Каждая строка предваряется ***(##)***-префиксом**,** а завершает погружение ***КФ*** c_o в MT^s_q ***(**)***-состояние**.** Именно клетка с этим состоянием сканируется ***КА*** машины, находящимся в начальном q_o-состоянии. Алгоритм функционирования MT^s_q**,** моделирующей один шаг ***2-OC,*** состоит из следующих этапов**,** а именно**.** На первом этапе производится раздвижка конфигурации ленты после ее ячеек в состояниях ***(##)*** на одну ячейку вправо. Выполняет эту работу следующая группа команд MT^s_q**:**

$(xy)q_o \rightarrow (xy)q_o(-1)$ $\quad$ $(\#\#)q_o \rightarrow (00)q_o{}^{**}(-1)$ $\quad$ $(x_1y_1)q_ox_2y_2 \rightarrow (x_2y_2)q_ox_1y_1(-1)$

$(□□)q_o{}^{\#\#} \rightarrow (\#\#)q_1(1)$ $\quad$ $(x_1y_1)q_1 \rightarrow (x_1y_1)q_1(1)$ $\quad$ $(^{**})q_1 \rightarrow (\#\#)q_o(-1)$

$(\square\square)q_o^{**} \to (\#\#)q_2(0)$ $\quad x, y \in A;$ $\quad x_1, y_1, x_2, y_2 \in \{\#\} \cup A$

После выполнения вышеказанной группы команд конфигурация ленты $MT^s q$ примет следующий вид при сканировании KA в состоянии q_3 самой левой $(\#\#)$-клетки.

□	#	0	0	0	...	0	#	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	...	#	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	□
□	#	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	#	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	...	#	0	0	0	...	0	□

▲q_2

Результат данного этапа позволяет затем достаточно просто моделировать реализацию машиной $ЛФП\ \sigma^{(3)}$ симулируемой $2\text{-}OC$, точно сохраняя структурную организацию исходной $КФ\ c_o$. На этом этапе используются дополнительные символы {#,*,□} для структурированного алфавита клеток ленты наряду с алфавитом $Q_1 = \{q_o..q_2, q_o^{xy}, q_o^{**}, q_o^{\#\#}\}$ [$\#(Q_1)=a^2+5$ *и* $\#(G)$ – *мощность произвольного множества* G] состояний KA $MT^s q$, тогда как мощность алфавита S_1 на ленте равна $\#(S_1) = a^2 + 3$; при этом, на последующих этапах мощность обоих алфавитов будет увеличиваться. Несложно убедиться, что для реализации данного этапа требуется порядка $N_1 = (n+1)(m+1)^2+(m+1)$ шагов, где $(n \times m)$ – размер минимального прямоугольника, содержащего $КФ\ c_o \in C(2,A,\phi)$ моделируемой $2\text{-}OC$.

На втором этапе $MT^s q$ реализует выполнение $ЛФП\ \sigma^{(3)}(x_o,x_1,x_2)=x_o^*$, соответствующей $ГФП\ \tau^{(3)}$ моделируемой $2\text{-}OC$. Обеспечивается это следующей группой команд $MT^s q$:

$(\#\#)q_2 \to (\#\#)q_2(1)$ $\quad (xy)q_2 \to (xy)q_3(1)$ $\quad (xy)q_3 \to (xy)q_3^y(-1)$

$(xy)q_3^h \to (x\sigma^{(3)}(x,y,h))q_2(1)$ $\quad (\#\#)q_3 \to (\#\#)q_3^0(-1)$ $\quad (xy)q_3^0 \to (x\sigma^{(3)}(x,y,0))q_2(1)$

$(\square\square)q_3 \to (\square\square)q_3^*(-1)$ $\quad (xy)q_3^* \to (x\sigma^{(3)}(x,y,0))q_4(0)$ $\quad x, y, h \in A$

В результате выполнения этой группы команд на ленте $MT^s q$ будет сформирована следующая конфигурация, в которой символы $\hat{a}_j, \hat{a}_{kp} \in A$ $(j=0..n;\ k=1..n;\ p=1..m)$ – результат реализации $ЛФП\ \sigma^{(3)}(x_o, x_1, x_2) = x_o^*$ структуры $2\text{-}OC$, например, $\sigma^{(3)}(a_{11}, a_{21}, a_{22}) = \hat{a}_{21}$.

□	#	0	0	0	...	0	#	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	...	#	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	□
□	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2n}$	...	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	...	$\hat{a}_n$	□

▲q_4

На этом этапе $MT^s q$ потребовала порядка $N_2=(3n+4)(m+1)$ шагов *(команд)* с дополнительным алфавитом $Q_2 = \{q_3, q_3^t, q_4\}$ [$t \in \{*\} \cup A;\ \#(Q_2) = a + 3$] состояний KA машины, тогда как алфавит на ленте остался неизменным. Последующие этапы предназначены для приведения организации полученной $КФ$ на ленте $MT^s q$ к полному соответствию с организацией представления на ленте исходной $КФ\ c_o$. Так, третий этап предназначен для замены подсостояний первого уровня состояний конфигурации на ленте на второй, что довольно просто обеспечивается двумя командами $MT^s q$, а именно:

$(xy)q_4 \to (yy)q_4(-1)$ $\quad (\square\square)q_4 \to (\square\square)q_5(1)$ $\quad x, y \in \{\#\} \cup A$

□	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2n}$	...	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	...	$\hat{a}_{mn}$	□
□	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2n}$	...	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	...	$\hat{a}_n$	□

▲q_5

В результате выполнения этой группы команд на ленте будет сформирована вышеприведенная конфигурация, затребовав порядка $N_3=(n+2)(m+1)+1$ шагов с дополнительным алфавитом $Q_3=\{q_5\}$ состояний KA машины, тогда как алфавит на ленте MT остался без

изменения. Наконец, заключительный этап обеспечивает сдвиг подсостояний первого уровня состояний конфигурации на $(n+2)$ ячеек вправо, реализуемый группой команд:

$(\#\#)q_5 \to (\#\#)q_6(1)$ $\quad (oo)q_6 \to (o\tilde{o})q_6(1)$ $\quad o\in A;\ \tilde{o}\in\tilde{A};\ u,v,h\in\{\#\}\cup A$

$(\#\#)q_6 \to (\#\#)q_7(-1)$ $\quad (o\tilde{o})q_7 \to (o\tilde{o})q_7(-1)$ $\quad (\#\#)q_7 \to (\#\#)q_7^{\#}(0)$

Предыдущие 5 команд подсостояния второго уровня для первых двух строк сгенерированной конфигурации $c_o\tau^{(3)}$ заменяют символами из $\tilde{A}$-алфавита, которые соответствуют символам A-алфавита, но с верхней тильдой $(\sim)$, например, $o\in A$ и $\tilde{o}\in\tilde{A}$. Делается это с той целью, чтобы можно было контролировать величину сдвига *первого* подуровня на $(n+2)$ ячеек ленты вправо. Данная работа потребовала $N_4 = (2n+5)$ шагов (*команд*) $MT^s q$.

$(uv)q_7^h \to (hv)q_7^u(1)$ $\quad (o\tilde{o})q_7^{\#} \to (\#\tilde{o})q_7^o(1)$ $\quad (\#o)q_7^0 \to (0o)q_7^{\#}(1)$

$(\square\square)q_7^u \to (u0)q_8(-1)$ $\quad (uv)q_8 \to (uv)q_8(-1)$ $\quad (\#\tilde{o})q_8 \to (\#o)q_7^0(0)$ $\quad (uv)\neq(\#\#)$

$(\#\#)q_8 \to (\#\#)q_9(1)$ $\quad (xy)q_9 \to (xy)q_9(1)$ $\quad (\#0)q_9 \to (\#\#)q_9(1)$ $\quad (xy)\neq(\#0)$

$(\square\square)q_9 \to (\square\square)q_0(-1)$ $\quad \tilde{o}\in\tilde{A};\ o\in A;\ x,y\in\{\#\}\cup A$ $\quad v\in\{\#\}\cup A\cup\tilde{A};\ u,h\in\{\#\}\cup A$

В результате выполнения этой группы команд на ленте будет сформирована нижеприведенная конфигурация, затребовав порядка $N_5 = 2(n+2)^2(m+1)+(n+2)(3-m)$ команд с дополнительным алфавитом $Q_4 = \{q_6..q_9, q_7^h\}$ $[h\in\{\#\}\cup A;\ \#(Q_4) = a+5]$ состояний KA машины, тогда как алфавит на ленте $MT^s q$ расширен дополнительным алфавитом $\tilde{A}$, элементы которого находятся во взаимнооднозначном соответствии с элементами A-алфавита.

□	#	0	0	0	...	0	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	...	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	...	$\hat{a}_{mn}$	□
□	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2n}$	...	#	0	0	0	...	0	□

▲q_o

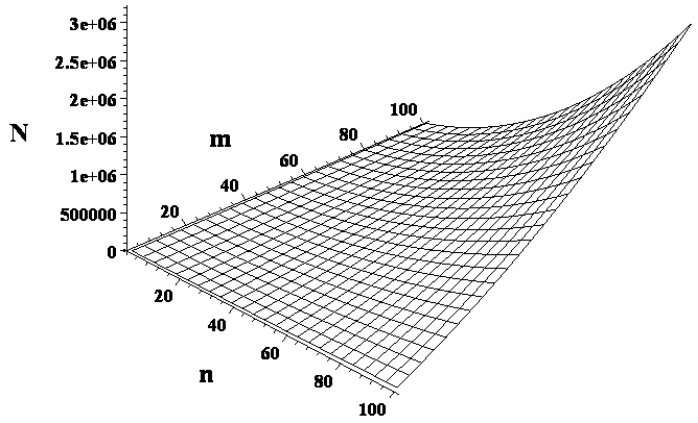
Между тем, несложно убедиться, что полученная конфигурация ленты является представлением $K\Phi\ c_o\tau^{(3)}$, т.е. $MT^s q$ со следующими определяющими параметрами:

$$S = \left\{\begin{matrix}\square & \# & * & x & x & \# & \# & x \\ \square' & \#' & *' & y' & \tilde{y} & y' & \tilde{y}' & \#\end{matrix}\right\} \quad \#(S) = 2a^2+3a+3 \quad (x,y\in A;\ \tilde{y}\in\tilde{A})$$

$$Q = \left\{q_o..q_9, q_o^{xy}, q_o^{**}, q_o^{\#\#}, q_3^h, q_7^t\right\} \quad \#(Q) = a^2+2a+14 \quad (h\in\{*\}\cup A;\ t\in\{\#\}\cup A)$$

за количество шагов порядка $N=(n+1)m^2+(2n^2+13n+15)m+2n(n+9)+28$ при сделанных выше предположениях реализует моделирование одного шага исходной **2-*OC***.

Как следует из вышесказанного, ценой такого моделирования являются весьма существенные временные издержки, выражаемые количеством команд, требуемых моделирующей $MT^s q$ для реализации лишь одного шага моделируемой классической **2-*OC*** с индексом соседства простейшего вида. При этом, временные издержки определяются размерами исходной $K\Phi\ c_o$ в моделируемой структуре как функция $N(n,m)$, приведенная выше, и с ростом размера конфигураций растут весьма быстро, как это иллюстрирует нижеследующий график N-функции, полученный в среде пакета ***Maple*** [112,116-118]. Однако, это относится лишь к эффективности реализации моделирующего алгоритма, а не к вопросу принципиальной возможности такого моделирования. В принципе, ничего сверхординарного в использованном нами подходе к обоснованию возможности моделирования классической **2-*OC*** посредством соответствующей $MT^s q$ нет и на этом моменте нами акцентировалось внимание и ранее. Исходя из известного постулата, любой алгоритм реализуем на соответствующей машине Тьюринга, остаются только вопросы сугубо технического характера – алгоритмизация и программирование.



Труднорешаемая задача **–** задача, для решения которой не существует полиномиального алгоритма. Причем, эти задачи не могут быть эффективно **(***за полиномиальное время***)** решены даже с помощью недетерминированного вычислительного устройства, обладающего способностью параллельно выполнять неограниченное количество *независимых* вычислений. Все известные задачи, труднорешаемость которых доказана, или вовсе неразрешимы, или труднорешаемы даже на недетерминированном вычислительном устройстве. В этом смысле моделирование ***2-OC*** посредством ***1-OC*** можно отнести к классу труднорешаемых задач из-за требуемого для их решения времени, растущего больше полиномиального с ростом размера конфигураций моделируемой динамики исходной структуры**.** Правда**,** это в том случае**,** если не будет обнаружено намного более быстрого моделирующего алгоритма**,** что представляется нам весьма непростой **(***если вообще решаемой***)** задачей. Пока же отнесение ее к классу труднорешаемых задач вполне уместно.

Таким образом, произвольная классическая $2\text{-}OC\equiv\langle Z^2,A,\tau^{(3)},X\rangle$ с простейшим *индексом* соседства $X=\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ моделируется MT^s_q с $\#(S)=2a^2+3a+3$ и $\#(Q)=a^2+2a+15$**.** При этом, один шаг $c_o\tau^{(3)}$ структуры MT^s_q моделирует за N шагов, где $(n\times m)$ **–** размер минимального прямоугольника, содержащего ***КФ*** $c_o\in C(2,A,\phi)$**.** С другой стороны, согласно теореме ***74*** следует, что для произвольной машины MT^s_q существует классическая ***1-OC*** с ***B-***алфавитом мощности $\#(B)=s+q+9$ и индексом соседства $X=\{-1,0,1\}$**,** которая ее ***8-***моделирует**.** Следовательно**,** исходная структура $2\text{-}OC\equiv\langle Z^2,A,\tau^{(3)},X\rangle$ моделируется *классической* $1\text{-}OC\equiv\langle Z^1,B,\tau^{(3)},\{-1,0,1\}\rangle$ $\{\#(B)=3a^2+5a+26\}$**,** что и завершает доказательство теоремы.

Представленный нами подход предназначен для моделирования историй конфигураций $\langle c_o\rangle=\{c_o\tau^{(3)k}\mid k=0,1,2,...\}$ $(c_o\in C(2,A,\phi))$**,** однако с небольшой модификацией работает и в случае, когда ***КФ*** c_o являются *периодическими* в структурном**,** а не в динамическом смысле. В этом случае мы будем иметь дело не с конечной ***КФ*** c_o**,** а с ее конечным периодом. Таким образом, *редукция* представленных результатов позволяет сформулировать следующее интересное утверждение, а именно**:** ***Произвольная классическая d-OC*** $(d\geq 1)$ ***моделируется посредством классической 1-OC с индексом соседства Неймана-Мура.*** В то же самое время следует еще раз подчеркнуть**,** что представленный выше подход обеспечивает моделирование динамики лишь конечных и/или структурно-периодических ***КФ*** в классических стабильных ***d-OC*** $(d\geq 1)$ и на более общий случай не распростаним.

Использованный при доказательстве теоремы прием ***структурирования*** состояний ***КА*** машины Тьюринга и символов алфавита ее ленты достаточно продуктивен, он в целом ряде случаев позволяет существенно упрощать программирование MT^s_q**,** а также погружать в ***OC-***модели те или иные процессы, явления и феномены. Между тем, имеет он и свои недостатки, прежде всего, ***оптимизационного*** характера **–** упрощая процесс программирования в ***OC-***моделях, в ряде случаев оптимизируя временные характеристики,

вместе с тем, он усложняет сами ***ОС-***модели**,** прежде всего**,** путем увеличения *(в ряде случаев существенного)* мощности множества внутренних состояний единичного автомата структуры. Именно поэтому данный подход может быть успешно использован для *концептуального* решения задач ***ОС-***проблематики, а не *оптимизационных* задач, связанных со сложностью ***ОС-***моделей. Проиллюстрируем использование данного приема для задачи моделирования MT^s_q посредством ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура.

Начальная ***КФ*** ленты MT^s_q представляется начальной конфигурацией ***1-ОС*** вида

$$\ldots[\square]\ldots\begin{bmatrix} s_{k-j} \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} s_{k-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k \\ q_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+2} \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} s_{k+j} \end{bmatrix}\ldots[\square]\ldots;\quad \square - \textit{empty symbol}$$

на которой отражено сканирование конечным автоматом машины**,** находящимся в состоянии q_k**,** s_k**-**символа на ленте. Команды MT^s_q имеют вид $s_k q_k \to s^*_k q^*_k(\{-1\,|\,0\,|\,1\})$**,** где $\{-1\,|\,0\,|\,1\}$ обозначает соответственно сдвиг головки машины влево, без сдвига и вправо.

$$\begin{bmatrix} s_{k-2}\, s_{k-1}\, s_k \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k-1} \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_{k-1}\, s_k\, s_{k+1} \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s^*_k \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_k\, s_{k+1}\, s_{k+2} \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ q^*_k \end{bmatrix}\quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} s_{k-2}\, s_{k-1}\, s_k \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k-1} \\ q^*_k \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_{k-1}\, s_k\, s_{k+1} \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s^*_k \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_k\, s_{k+1}\, s_{k+2} \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k+1} \end{bmatrix}\quad (-1)$$

$$\begin{bmatrix} s_{k-2}\, s_{k-1}\, s_k \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k-1} \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_{k-1}\, s_k\, s_{k+1} \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s^*_k \\ q^*_k \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_k\, s_{k+1}\, s_{k+2} \\ q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k+1} \end{bmatrix}\quad (0)$$

$$\begin{bmatrix} s_{k-1}\, s_k\, s_{k+1} \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_k \end{bmatrix}\qquad [\square\ \square\ \square]\to[\square]\qquad s_k q_k \quad\to\quad s^*_k q^*_k(\{-1\,|\,0\,|\,1\})$$

Из вышеприведенной локальной функции перехода моделирующей ***1-ОС*** уже несложно убедиться**,** что имеет место следующее утверждение**:** ***произвольная MT^s_q 1-моделируется 1-ОС с индексом соседства Мура и А-алфавитом мощности #(A)=q(s+1)+1.*** Итак**,** в данном случае прием структурирования состояний обеспечивает простоту алгоритма моделирующей ***1-ОС*** и ее индекса соседства**,** оптимальное время моделирования**,** но существенно увеличивает мощность алфавита внутренних состояний. При этом, возможно существенно снизить мощность алфавита внутренних состояний**,** например**,** за счет усложнения индекса соседства моделирующей структуры.

Используя метод *структурирования* состояний, докажем и возможность моделирования произвольной MT^s_q классической ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства. Как и ранее начальная ***КФ*** ленты MT^s_q представляется начальной c_o**-**конфигурацией ***1-ОС*** вида

$$t=0\qquad \ldots[\square]\begin{bmatrix} s_{k-j} \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} s_{k-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+2} \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} s_{k+j} \end{bmatrix}[\square]\ldots;\quad \square - \textit{empty symbol}$$

Для моделирующей ее классической ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1\}$ определяем локальную функцию перехода $\sigma^{(2)}$ следующими параллельными подстановками**:**

$$s_k s_{k+1}\to\begin{bmatrix} s_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\quad s_k\square\to\square\quad \square s_k\to\square\quad \square\square\to\square\quad \begin{bmatrix} s_k/q_k \end{bmatrix}s_{k+1}\to\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\quad s_{k-1}\begin{bmatrix} s_k/q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}$$

После применения к ***КФ*** c_o данных параллельных подстановок в следующий момент $t=1$ получаем следующую конфигурацию c_1 структуры, а именно**:**

$$t=1\qquad \ldots[\square]\begin{bmatrix} s_{k-j} \\ s_{k-j+1} \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} s_{k-2} \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+2} \\ s_{k+3} \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} s_{k+j} \\ s_{k+j+1} \end{bmatrix}[\square]\ldots$$

Доопределим теперь *ЛФП* моделирующей ***1-ОС*** группами параллельных подстановок в зависимости от вида сдвига сканирующей головки моделируемой MT^s_q**,** а именно**:**

$$\begin{bmatrix} s_{k-1} \\ s_k \end{bmatrix}[\sqcup] \to [s_k] \qquad [\sqcup]\begin{bmatrix} s_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \to [s_k] \qquad \begin{bmatrix} s_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix} \to [s_{k+1}]$$

$s_k q_k \to s_k^* q_k^*(1)$ – *shift right*

$$\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix} \to [s_{k+1}/q_k^*] \quad \begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \to [s_k^*] \quad \begin{bmatrix} s_{k-2} \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix} \to [s_{k-1}]$$

$s_k q_k \to s_k^* q_k^*(0)$ – *fixed head*

$$\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix} \to [s_{k+1}] \quad \begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \to [s_k^*/q_k^*] \quad \begin{bmatrix} s_{k-2} \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix} \to [s_{k-1}]$$

$s_k q_k \to s_k^* q_k^*(-1)$ – *shift left*

$$\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix} \to [s_{k+1}] \quad \begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \to [s_k^*] \quad \begin{bmatrix} s_{k-2} \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix} \to [s_{k-1}/q_k^*]$$

Нетрудно убедиться, что на следующем шаге ***(t=2)*** моделирующая ***1-ОС*** в зависимости от типа сдвига сканирующей головки сгенерирует конфигурацию следующего вида**:**

$$t = 2 \quad \begin{cases} \dots [\sqcup]\left[s_{k-j}\right] \dots [s_{k-2}][s_{k-1}]\left[s_k^*\right]\left[s_{k+1}/q_k^*\right][s_{k+2}][s_{k+3}] \dots \left[s_{k+j+1}\right][\sqcup] \dots & (1) \\ \dots [\sqcup]\left[s_{k-j}\right] \dots [s_{k-2}][s_{k-1}]\left[s_k^*/q_k^*\right][s_{k+1}][s_{k+2}][s_{k+3}] \dots \left[s_{k+j+1}\right][\sqcup] \dots & (0) \\ \dots [\sqcup]\left[s_{k-j}\right] \dots [s_{k-3}][s_{k-2}]\left[s_{k-1}/q_k^*\right]\left[s_k^*\right][s_{k+1}][s_{k+2}] \dots \left[s_{k+j+1}\right][\sqcup] \dots & (-1) \end{cases}$$

Теперь уже несложно убедиться в справедливости следующего утверждения, а именно**:** ***Произвольная МТ^{s}q 2-моделируется классической 1-ОС с простейшим индексом соседства X={0,1} и A-алфавитом внутренних состояний мощности #(A) = s(s+1)(q+1) + 1.***

Неформально двумерная ***МТ*** является еще одной модификацией *классической* машины Тьюринга, не увеличивающей ее вычислительной мощности. Она состоит из обычного ***КА,*** но ее лента разбита на *бесконечное* число ячеек, расположенных в двух измерениях. В зависимости от состояния и сканируемого символа ***КА*** изменяет состояние, печатает новый символ и передвигает головку в одном из четырех направлений либо оставляет ее на месте. Аналогичный вышеприведенному прием позволяет легко доказать следующее утверждение**:** ***Произвольная МТ^{s}q с двухмерной лентой 1-моделируется классической 2-ОС с индексом соседства Неймана и A-алфавитом мощности #(A)=q(s+1)+1.*** Доказательство этого утверждения оставляем читателю в качестве достаточно простого упражнения**.** В этом же контексте представляется довольно интересным рассмотреть и моделирование других типов машины Тьюринга посредством классических ***ОС.***

Относительно проблем *взаимного* моделирования таких формальных вычислителей как ***МТ*** (*сугубо последовательного действия)* и ***ОС*** (*высокопараллельного)* следует сделать весьма существенное замечание. Если в первом случае результат вычисления определяется переходом ***КА*** вычислителя в некоторое заключительное ***q**-***состояние {*что вполне естественно при присущей* ***МТ*** *организации* **–** *внешняя память* (*лента)* *и устройство управления* (***УУ/ КА)***}, то для децентрализованного ***ОС-***вычислителя, не обладающего ***УУ,*** ситуация совершенно иная. Прежде всего, ***ОС-***вычислитель **–** генератор бесконечных последовательностей ***КФ,*** начиная с некоторой начальной. Поэтому в качестве результата вычисления таким вычислителем вполне естественно полагать ***(1)*** достижение ***КФ,*** содержащей некоторый финальный символ**-**состояние, или ***(2)*** достижение пассивной ***КФ –*** результата вычисления. При формальных построениях это вполне приемлемо, тогда как при практической реализации ***ОС-***вычислителя данная проблема несколько сложнее, чем в случае с машинами Тьюринга**.** В процессе исследования вышеупомянутых вопросов моделирования в классических ***ОС*** нами использовались оба данных предположения.

6.4. Специальные вопросы моделирования в классических однородных структурах, связанные с их динамическими свойствами

Хорошо известно, моделирование в среде классических ***d-OC*** является многоаспектной проблемой, включающей в себя такие важные вопросы как**:** моделирование в реальное время, оптимальное моделирование по выбранным критериям оптимизации, методы и принципы упрощения процесса моделирования, получение оценок сложности взаимного моделирования структур, моделирование отдельных алгоритмов, процессов и феноменов, моделирование в определенных классах структур и при различных условиях и др. В предыдущих разделах главы рассматривались вопросы моделирования в классических ***d-OC*** без каких-либо дополнительных условий для моделирующих структур. И здесь мы представим результаты моделирования, когда на *моделирующую* классическую структуру накладываются определенные *ограничения* **(***условия моделирования***),** имеющие тот или иной смысл и интерпретацию.

1. Интересный круг вопросов возникает в связи с моделированием динамики ***d-OC*** одного класса структурами из другого класса. Здесь также представляют интерес вопросы оптимизации моделирующих структур и оценки их сложности. Итак, при обсуждении степени общности классических ***1-OC*** нами был получен результат по моделируемости прозвольной недетерминированной ***1-OC*** классической структурой [5,53,88].

<u>Теорема 86</u>. Каждая недетерминированная структура SH(1,a,n,N) моделируется соответствующей классической 1-OC с индексом соседства Неймана-Мура и алфавитом A* мощности #A* = N(a^{n+1} - 1)/(a - 1) + a + n.

Результат данной теоремы обобщается и на ***d-***мерный случай, в определенной мере характеризуя степень общности классических ***OC-***моделей**.** Здесь также представляют интерес вопросы оптимизации моделирующих структур и оценки их сложности.

Интересные результаты по стохастическим ***d-OC*** были получены ***А. Матевосяном*** [182], исследовавшим вопрос возможности построения стохастической структуры**,** *универсальной* над некоторым классом стохастических структур той же самой размерности**.** Им был предложен один подход к моделированию одних стохастических ***d-OC*** другими того же класса, в рамках которого разработаны конструкция моделирующей структуры и соответствующий ей способ моделирования. На основе такого моделирования доказано существование ***R-****универсальных* стохастических ***d-OC*** и исследованы оценки соответствующих сложностных и временных затрат моделирования**.** Наряду с этим показано**,** что для определенных подклассов ***B*** стохастических ***d-OC*** существует универсальная бинарная стохастическая ***d-OC*****,** моделирующая любую структуру из ***B-***класса в реальное время. Предложенный в работе [182] подход к исследованию стохастических ***d-OC*** было бы интересно применить и для изучения ряда других феноменов**,** рассматриваемых в математической ***TOC-***проблематике и ее многочисленных приложениях.

2. Большой интерес представляет изучение динамических свойств ***OC-***моделей в зависимости от типа их *локальных функций перехода* ***(ЛФП).*** Так в монографии [3] выделяются два больших класса ***OC-***моделей с симметричными ***(SF-****класс)* и асимметричными ***(ASF-****класс) ЛФП.* Можно показать, что ***SF-****класс* образует полугруппу относительно операции композиции**.** Композиция симметричной и асимметричной ***ЛФП*** всегда дает асимметричную функцию, тогда как существуют асимметричные ***ЛФП*****,** чьи композиции дают симметричную функцию. Например, простые ***ЛФП*****,** определенные соотношениями**:**

$$\sigma_1^{(2)}(x,y) = xy^2 \pmod a; \qquad \sigma_2^{(2)}(x,y) = y^2x \pmod a \qquad (a \geq 3)$$

в результате композиции дают симметричную ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}(x,y,z) = x^2y^5z^2 \pmod a$.

Относительно классов ***SF*** и ***ASF*** классических ***OC-***моделей показано, что в смысле вычислительных возможностей они эквивалентны, т.е. универсальными классическими ***OC-***моделями обладают оба указанных класса. Но по ряду других характеристик классы ***SF*** и ***ASF*** структур могут существенно различаться. Так, например, существенные отличия имеют место относительно структуры множеств неконструируемых ***КФ*** и конструктивных возможностей в классических ***OC-***моделях с симметричными и асимметричными ***ЛФП***, что должно приниматься во внимание в модельных задачах [3,5,8,9,53-56,88,536].

Действительно, многие процессы и алгоритмы носят ярко выраженный *асимметричный* характер (*хотя в их основе на низших уровнях могут иметь место и различной степени симметричные составляющие*) и их намного проще погружать в классические ***OC-***модели с асимметричными ***ЛФП***. Естественно, что ввиду сказанного такие процессы и алгоритмы могут симулироваться классическими ***OC-***моделями как с *симметричными*, так и с *асимметричными* ***ЛФП***, но для функций *первого* типа требуется, как правило, *увеличение* размера шаблона соседства, времени моделирования или мощности алфавита внутренних состояний моделирующей структуры по отношению к аналогичным структурам второго типа. В качестве примера приведем интересный результат по моделированию произвольной машины Тьюринга MT^s_q посредством классической ***1-OC*** с индексом соседства Неймана-Мура и симметричной ***ЛФП*** [53]. Под симметричной нами понимается ***1-***мерная ***ЛФП***, определяемая параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n \rightarrow x^*_1 \quad \text{и} \quad (x_1x_2x_3 \ldots x_n)^R \rightarrow x^*_1 \quad (x_k, x^*_1 \in A;\ k=1 \ldots n)$$

где X^R – кортеж, симметричный ***X-***кортежу. Обобщение понятия *симметричности* ***ЛФП*** на случай высших размерностей особых затруднений не вызывает.

<u>Теорема 87</u>. Если машина MT^s_q реализует некоторый S-алгоритм за время t, то существует классическая 1-OC с A-алфавитом внутренних состояний мощности $2(s+2q+1)$, индексом соседства Неймана-Мура и симметричной ЛФП, моделирующая этот же S-алгоритм за время не хуже, чем 4t.

Метод доказательства данной теоремы позволяет распространить полученный результат и на случай классических ***OC-***моделей высших размерностей, но при этом появляется необходимость расширения алфавита внутренних состояний моделирующей структуры. Полученный результат не только еще раз подтверждает эквивалентность классических ***OC-***моделей с симметричными и асимметричными ***ЛФП*** относительно их вычислительных возможностей, но и в определенной степени иллюстрирует сложность моделирования посредством симметричных ***d-OC*** в целом асимметричного алгоритма. В этом направлении интересные результаты получены также ***Х. Шверински*** [156] и ***Я. Кобуши*** [395], доказавшими возможность моделирования в реальное время произвольной классической ***1-OC*** структурой той же размерности с индексом соседства Неймана-Мура и симметричной ***ЛФП***. При этом, моделирование в их работах рассматривалось только относительно ***C(A,ϕ)-***множества конечных ***КФ*** без сколько-нибудь существенного применения *оптимизирующей* техники, что сказалось на параметрах моделирующих ***OC***.

В связи с этим, нам хотелось бы еще раз акцентировать мнение, что оба класса ***SF*** и ***ASF*** *классических* ***OC-***моделей обладают целым рядом *специфических* черт, но если исходить из более практических соображений, то между ними существуют два основных различия, а именно: класс ***OC-***моделей с *симметричными* ***ЛФП (ГФП)*** оказывается проще для практической реализации и представляет интерес с точки зрения многих биологических интерпретаций (*например*, *симметричность* ***ЛФП*** *может ассоциироваться с отсутст-*

вием определенного градиента при моделировании такими структурами того или иного биологического феномена; в среде такого типа ***ОС****-моделей более естественно представляются и нейроподобные системы, и т.д.),* в то время как ***ОС****-*модели с асимметричными ***ЛФП*** в общем случае значительно лучше приспособлены к моделированию различных процессов и алгоритмов, т. е. обладают большей степенью конструктивности по ряду основных параметров. Действительно, для ярко выраженных асимметрических процессов, как показывает опыт, в общем случае невозможно удовлетворительно решать в среде симметрических классических ***ОС****-*моделей задачи оптимизационного характера [536].

При моделировании в классических ***d-ОС*** весьма важной является проблема оптимального моделирования того или иного процесса, алгоритма или феномена. *Оптимизация* рассматривается, как правило, относительно основных параметров *моделирующей* структуры (*размера* ***ШС****, мощности алфавита внутренних состояний, размерности структуры и времени самого моделирования*). В этом плане представляет интерес оптимизация классической ***d-ОС*** с симметричной ***ЛФП***, моделирующей структуру той же самой размерности с асимметричной глобальной функцией перехода. В одномерном случае в данном направлении имеет место следующий основной результат [5,53,88].

<u>Теорема 88</u>. Для произвольной классической 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура существует структура той же размерности и с тем же индексом соседства, A*-алфавитом внутренних состояний мощности $2(4a^2+5a+12)$ и симметричной ЛФП, моделирующая первую за время не хуже, чем 4L; где L – длина перерабатываемой конечной КФ в моделируемой классической однородной структуре.

Доказательство данной теоремы проводилось в два этапа: на *первом* этапе определялась машина Тьюринга, моделирующая произвольную классическую ***1-ОС***, затем к ней применялся результат теоремы ***87***. Исследования по проблеме *оптимизации* параметров моделирующих классических ***d-ОС*** представляют значительный интерес и уделять им необходимо соответствующее внимание, хотя подобные задачи представляются достаточно сложными как, впрочем, и большинство задач оптимизации в целом. Наряду с рядом интересных результатов по взаимной моделируемости классических однородных структур в книге [158] представлено моделирование произвольной классической ***2-ОС*** посредством классической ***2-ОС*** с индексом соседства Мура, ***A***-алфавитом мощности ***a=7776*** и симметричной ***ЛФП***. Было бы интересным существенно понизить данное значение, которое, на наш взгляд, является в значительной степени завышенным.

Для дальнейшего нам понадобится одно полезное свойство симметричных ***ГФП***, определяемых ***ЛФП*** с простейшим индексом соседства ***X={0,1}***. Очевидно, что *симметричные* ***ЛФП*** с индексом соседства указанного типа определяются локальными параллельными подстановками вида $xy \Rightarrow x^*$ $(x,x^*,y\in A)$. Рассмотрим три основных случая, а именно: ***(a)*** пусть $(\exists x\neq 0)(x0\equiv 0x \Rightarrow 0)$, тогда для ***1***-мерной симметричной ***ГФП*** существуют *исчезающие* ***КФ*** уже вида $c=\square x\square$ $(x\in A)$, а значит, и ***НКФ*** (теорема ***12***); ***(b)*** пусть имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\forall x\neq 0)(x0\equiv 0x \Rightarrow \neg 0) \;\&\; (\exists p\neq 0)(\exists k\neq 0)(pk\equiv kp \Rightarrow 0)$$

где $\neg w$ – операция отрицания w. Но тогда существует $КФ\ c^*\in C(A,\infty)$, имеющая вид $c^*=\ldots pkpkpk\ldots$ такая, что $c^*\tau^{(2)}=\square$, т.е. $C(A,\infty)$-множество незамкнуто относительно симметричной ***ГФП*** классической ***1-ОС***. Поэтому согласно теореме ***18*** такая классическая ***1-ОС*** будет обладать неконструируемостью типов ***НКФ*** и/или ***НКФ-1***. Наконец, случай ***(c)*** определяется соотношением вида $(\forall x\neq 0)(x0 \equiv 0x \Rightarrow \neg 0)\&(\forall p,k\neq 0)(pk \equiv kp \Rightarrow \neg 0)$. В данном случае, как нетрудно убедиться, имеет место соотношение: $(\exists p,k,j\neq 0)(pk\equiv kp \Rightarrow v)\&(pj \equiv jp \Rightarrow v)$, что определяет наличие для ***ГФП*** пар ***ВСКФ*** вида $c_1=\square pkp\square$ и $c_2=\square pjp\square$ $\{c_1\tau^{(2)} = c_2\tau^{(2)}\}$, а значит и ***НКФ*** (теорема ***7***). Случаи ***(a .. c)*** исчерпывают все основные виды лока-

льных параллельных правил подстановки, определяющих симметричные ***ЛФП*** с простейшим индексом соседства, и их анализ позволяет сформулировать следующий полезный для многих последующих рассмотрений основной результат.

<u>Теорема 89</u>. Каждая классическая 1-ОС с симметричной ГФП и простейшим индексом соседства X_n = {0,1} обладает неконструируемостью типов НКФ и/или НКФ-1.

На основе данного результата можно показать, что результат теоремы ***88*** уже для достаточно общих методов моделирования неулучшаем в плане *сведения* к простейшему ***ШС*** моделирующей классической ***1-ОС*** с симметричной ***ГФП.*** Точнее, в противовес теореме ***88*** произвольная классическая ***1-ОС*** не может моделироваться классической ***1-ОС*** с симметрической ***ЛФП*** и *простейшим* индексом соседства $X_n=\{0,1\}\equiv\{-1,0\}$ при использовании достаточно широкого класса понятий моделирования. В основу этого предложения положен тот факт, что в условиях целого ряда понятий моделируемости сохраняются такие свойства моделируемых структур как наличие/отсутствие неконструируемости типов ***НКФ,НКФ-3,ВСКФ*** и ***γ-КФ.*** Результат теоремы ***89*** используется и при исследовании ряда аспектов проблемы *декомпозиции* глобальных функций перехода ***ОС-***моделей, рассматриваемой в следующей главе книги. Наряду с этим, данный результат со всей очевидностью еще раз подтверждает ранее высказанное предположение [3,5] о более предпочтительных *конструкционных* возможностях моделирования в среде классических ***ОС*** с асимметрическими ***ЛФП*** [5,54-56,88,90,536]**.**

3. При изучении вопросов универсальной вычислимости и моделирования физических процессов в классических ***d-ОС*** возникает проблема ***обратимости*** в таких структурах. Достаточно детальное обсуждение данной проблематики представлено в работах [5,90, 273,378,536]. Весьма интересным в этой связи оказывается вопрос о взаимосвязи свойств *обратимости* и *универсальной* вычислимости в классических ***ОС-***моделях. С этой целью используем понятие ***обратимости*** для динамики классических ***ОС-***моделей согласно определения ***12*** (глава ***2***)***.***

Универсальная вычислимость классических ***ОС-***моделей в нашей [1] и ***А.Р. Смита*** [131] трактовках определяется на основе моделирования структурами универсальной машины Тьюринга ***(УМТ).*** Еще ***Э. Кодд*** [125] показал**,** что необходимым условием универсальной вычислимости в классической ***ОС-***модели является наличие для нее неограниченных по размеру генерируемых конечных ***КФ.*** А именно**,** классическая ***ОС-***модель не обладает свойством универсальной вычислимости, если существует такое целое $k > 0$**,** что имеет место следующее соотношение $(\forall c\in C(A,d,\phi))(\forall t)(max\, D(c\tau^{(n)}t) \le \alpha D(c))$, где $D(c)$ **–** диаметр произвольной ***c-КФ.*** Данное условие достаточно очевидно и соответствует необходимости наличия потенциально бесконечной ленты для ***УМТ.*** С другой стороны, нетрудно показать, что данное условие достаточным не является**:** ***простейшая классическая 1-ОС с бинарным А-алфавитом, индексом соседства X_n={0,1} и ЛФП $\sigma^{(2)}(x_0,x_1) = x^*_0=x_0+x_1$ (mod 2) для каждой начальной конечной КФ генерирует только растущие по длине КФ, однако универсальной вычислимостью не обладает.***

Весьма интересным в этой связи оказывается и вопрос о взаимосвязи свойств взаимной стираемости и универсальной вычислимости в классических ***ОС-***моделях**.** Так как вычисление, вообще говоря, является необратимым процессом **(***зная о том**,** что число ***55*** получено в результате сложения шести чисел**,** мы не можем однозначно определить исходные слагаемые***)***, то кажется вполне резонным, что существование ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, должно быть тесно связанным со свойством универсальной вычислимости в классических ***ОС-***моделях. Однако уже довольно простые классические ***ОС-***модели, обладающие ***ВСКФ (НКФ)***, не допускают свойства универсальной вычислимости**.** Например**,** *бинарная* ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1\}$ и ***ЛФП*** $\{\sigma^{(2)}(1,1)=1$ *и* $\sigma^{(2)}(x,y)=0$ *в противном случае*$\}$ обладает

ВСКФ и ***НКФ*** уже в виде блочной ***КФ c=101,*** однако для нее отсутствует свойство *универсальной вычислимости*. Значит, наличие для классической ***ОС-***модели ***ВСКФ (НКФ*** и, *возможно*, ***НКФ-3)*** не является достаточным условием для обладания ею свойством универсальной вычислимости. С другой стороны, на основе вышеупомянутого подхода к определению универсальной вычислимости было показано [1,3,5], что существование ***ВСКФ (НКФ)*** является ***необходимым*** условием для наличия у классической ***1-ОС*** свойства универсальной вычислимости. Данный результат в свое время вызвал довольно широкую дискуссию и стимулировал дальнейшие исследования в данном направлении [29,30,43, 53-56,63,66,68,70,73,77,80,88,90,160,184-187,258,259,263,268,273,314,318,536].

В связи со сказанным представляет особый интерес вопрос моделирования *необратимых* классических ***d-ОС*** *обратимыми* и в этой связи вопрос наличия *обратимых универсальных* ***ОС-***моделей. Так ***Т. Тоффоли*** [150,268,273,318,430,536], работая по результатам ***Аладьева-Смита,*** связанным с проблемой *вычислимости* в классических ***ОС-***моделях, показал, что несмотря на полученные ими результаты, существуют обратимые универсальные классические ***ОС-***модели. Точнее, он доказал, что любая классическая ***d-ОС*** конструктивно погружаема в обратимую ***(d+1)-ОС*** того же класса, для которой алгоритмически разрешима проблема генерации неограниченных по размеру конечных ***КФ.*** Таким образом, данный результат ***Т. Тоффоли*** не противоречит полученным ранее нашим результатам и эта данная ситуация объясняется рядом обстоятельств, определяющих противоречия; прежде всего, это связано с различными используемыми понятиями обратимости динамики классических ***ОС-***моделей, суть которых достаточно детально обсуждается в настоящей монографии.

Прежде всего, нами и рядом других исследователей, с одной стороны, и ***Т. Тоффоли,*** с другой стороны, использовались принципиально различные подходы к понятию моделирования одной классической ***d-ОС*** другой, в результате чего ***Т. Тоффоли*** использовал более общий метод моделирования с увеличением размерности моделирующей структуры, что является весьма ***существенной платой*** за полученный результат. Более того, под *обратимостью* ***Т. Тоффоли*** понимает отсутствие для моделирующей структуры взаимной стираемости (*неконструируемости типов* ***НКФ и НКФ-3***), тогда как мы понимаем отсутствие также и неконструируемости типа ***НКФ-1,*** обоснование чего представлено выше. Использованный же ***Т. Тоффоли*** подход не только требует увеличения размерности моделирующей структуры, но и не освобождает также ее от неконструируемости типа ***НКФ-1,*** не позволяя считать моделирующую структуру в полной мере *обратимой*.

Наряду с этим, ***Т. Тоффоли*** [318] для построения обратимых ***ОС-***моделей использовал также и структурный подход, представляя единичный автомат модели простой логической схемой из трех элементов. Анализ такого подхода показывает, что обратимость достигается за счет неявного увеличения мощности алфавита состояний и относится к некоторому его подмножеству. Тогда как *глобальная обратимость* относительно расширенного алфавита не достигается. Мы же под ***обратимостью*** классической ***ОС-***модели понимаем именно ***глобальную обратимость*** ее динамики. В данном случае мы имеем дело с ситуацией, весьма схожей с проблемой удвоения классической ***1-ОС*** произвольной конечной ***КФ,*** а именно: ***определенная в А-алфавите 1-ОС не может удваивать произвольную конечную КФ, заданную в том же А-алфавите, но решает эту же проблему за счет расширения исходного А-алфавита всего на один символ.***

И здесь весьма уместно обсудить два уровня ***обратимости –*** локальный и глобальный. ***Локальный*** уровень подразумевает обратимость в любой момент времени $t > 0$ каждой блочной c_b***-КФ,*** т.е. существования для нее блочной $c`_b$***-КФ*** (*блок которой содержит все автоматы и соседние им автоматы блока* $c_b$***-КФ)*** такой, что $c`_b\tau^{(n)}=c_b$. Тогда как ***глобальный*** уровень подразумевает обратимость *относительно* конечных ***КФ*** в целом, т.е. суще-

ствование для каждой конечной ***c-КФ*** конечной ***c`-КФ*** такой, что имеет место соотношение $c`\tau^{(n)}=c$. Очевидно, что глобальная обратимость влечет за собой и локальную обратимость, тогда как обратное в общем случае неверно. Данное обстоятельство мотивируется наличием двух неэквивалентных типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях – ***НКФ (НКФ-3)*** и ***НКФ-1***, рассмотренных нами выше.

На уровне физических интерпретаций в определенном смысле вполне уместной представляется аналогия между *глобальной* и *локальной* ***обратимостью*** физических процессов на макро- и микроуровнях. И если обратимый макропроцесс предполагается результатом действия обратимых микропроцессов, то результатом действия обратимых микропроцессов может быть и необратимый макропроцесс. В полной мере данная аналогия может быть отнесена и к случаю вычислительных процессов, определяя качественные различия макро- и микроуровней явлений и процессов в целом.

В связи с вышесказанным возникает весьма интересный вопрос: ***может ли произвольная классическая d-ОС моделироваться обратимой d-ОС (d≥1)?*** Данный вопрос в свою очередь порождает целый ряд сопутствующих вопросов, в той или иной мере характеризующих проблему обратимости классических ***ОС***-моделей. В общем случае эти вопросы составляют проблему моделирования произвольной классической ***d-ОС*** структурой тех же класса и размерности, подавляющей заданные свойства моделируемой структуры. В отношении *глобальной* обратимости, определяемой неконструируемостью типа ***НКФ-1***, получен следующий основной результат [5].

<u>Теорема 90</u>. Произвольная классическая d-ОС (d ≥ 1) 1-моделируется структурой того же класса, не обладающей НКФ-1, при наличии для нее НКФ-2 и с минимальным расширением А-алфавита внутренних состояний.

Доказательство данного утверждения достаточно прозрачно и сводится к следующему. Пусть некоторая классическая ***d-ОС*** обладает ***НКФ-1***, но тогда для нее существуют ***КФ*** $c\in C(A,d,\infty)$ такие, что $c\tau^{(n)} = c^*\in C(A,d,\phi)$. Очевидно, что ***d-ОС*** не будет обладать ***НКФ-1*** и обладать ***НКФ-2***, если $C(A,d,\infty)$-множество будет замкнутым относительно *глобального* $\tau^{(n)}$-преобразования структуры. Исходя из данных предпосылок, уже несложно определить ***d-ОС***, не обладающую ***НКФ-1***, обладающую ***НКФ-2*** и ***1***-моделирующую произвольную структуру той же размерности. Не нарушая общности, проиллюстрируем это на примере моделирования произвольной классической ***1-ОС***.

Рассмотрим произвольную классическую ***1-ОС*** с ***А***-алфавитом внутренних состояний, простейшим индексом соседства $X_n=\{0,1\}$ и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}(x,y)=x`\ (x,y,x`\in A)$. Моделирующую ее классическую ***1-ОС*** задаем в алфавите $A^*=A\cup\{\#\}\ (\#\notin A)$ с индексом соседства $X^*=\{0,1,2\}$ и ***ЛФП***, определяемой следующим образом, а именно:

$$\sigma^{(3)}(x,y,z)=\begin{cases}\sigma^{(2)}(x,y), & if\ (x,y\in A)\&(y=\#)\\ \#, & if <xyz>=<0\,0\,\#>\\ x, & otherwise\end{cases} \qquad (55)$$

Используя теперь определение ***ЛФП*** (**55**), нетрудно убедиться, что если для произвольной конечной ***КФ*** $\alpha=\square x_1x_2x_3...x_m\square$ моделируемая ***1-ОС*** генерирует за один шаг ***КФ*** $\alpha`=\square x`_0x`_1x`_2x`_3...x`_m\square$, то ***1***-моделирующая ее структура из ***КФ*** $\beta=\square\#x_1\#x_2\#x_3\#.....\#x_m\#\square$ за один шаг генерирует ***КФ*** $\beta`=\square\#x`_0\#x`_1\#x`_2\#x`_3\#...\#x`_m\#\square$; при этом в ***А***-алфавите имеют место соотношения $\alpha\equiv\beta$ и $\alpha`\equiv\beta`$. Более того, нетрудно убедиться в том, что наличие для моделируемой структуры взаимной стираемости (*а значит* ***НКФ*** *и, возможно,* ***НКФ-3***) сохраняется и для моделирующей ее структуры. В то же время из определения (**55**) ***ЛФП*** следует, что $C(A^*,\infty)$-множество замкнуто относительно глобального $\tau^{(3)}$-отображения

моделирующей структуры, что влечет отсутствие для нее неконструируемости ***НКФ-1*** типа при наличии ***НКФ-2***, что и завершает доказательство.

В рамках исследования необходимых и достаточных условий наличия универсальной вычислимости в классических ***ОС***-моделях ***А.Р. Смит*** [131] исследовал влияние ряда динамических свойств генерируемых ими $<c>[\tau^{(n)}]$-последовательностей.

<u>Определение 24</u>. Проблема ограниченности $<c>[\tau^{(n)}]$-последовательности состоит в эффективном определении того, существует ли такое Δ-число, что имеет место следующее соотношение $(\forall c` \in <c>[\tau^{(n)}])(D(c`) \leq \Delta)$. Проблема пассивности $<c>[\tau^{(n)}]$-последовательности состоит в эффективном определении того, содержит ли последовательность пассивную c`-КФ, т.е. КФ $c` \in C(A,d,\phi)$ такую, что $c`\tau^{(n)} = c`$.

На основе моделирования ***УМТ*** в классических ***1-ОС*** было показано, что в общем случае обе проблемы для них алгоритмически неразрешимы. Более того, базируясь на одном понятии универсальной вычислимости в классических ***ОС***-моделях, ***А.Р. Смит*** доказал, что для ***ОС***-моделей, обладающих свойством универсальной вычислимости, проблемы ограниченности и пассивности $<c>[\tau^{(n)}]$-последовательностей алгоритмически неразрешимы. Между тем, в качестве следствия доказательства теоремы ***90*** легко вытекает весьма интересный следующий результат.

<u>Теорема 91</u>. Существуют универсальные классические 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура, для которых проблемы ограниченности и пассивности последовательностей $<c>[\tau^{(n)}]$ алгоритмически разрешимы.

Такое противоречие в результатах является кажущимся и объясняется различием подходов к определению понятий как универсальной вычислимости, так и моделируемости в классических однородных структурах. Точнее, *вычислимость* в ***ОС***-моделях можно определять либо непосредственно на основе теории словарных рекурсивных функций, либо на основе того или иного понятия моделирования известных формальных алгоритмов переработки конечных слов (***УМТ***, ***SS***-*машины*, ***TAG***-, ***LAG***-*системы и др.*).

Значительно сложнее обстоит дело в случае неконструируемости ***НКФ***-типа, составляющего совместно с типом ***НКФ-1*** основу понятия ***обратимости*** классических ***d-ОС***. В рамках исследования данного вопроса было определено понятие ***WM-моделируемости*** [53,54], охватывающее достаточно широкий класс методов моделирования одной классической ***d-ОС*** другой структурой тех же класса и размерности. В рамках данного понятия был получен следующий результат, характеризующий его возможности для наших целей моделирования и полезный во многих теоретических рассмотрениях.

<u>Теорема 92</u>. Произвольная классическая d-ОС ($d \geq 1$) не может WM-моделироваться обратимой (в смысле отсутствия НКФ) структурой тех же класса и размерности.

Из понятия ***WM***-моделируемости и данного результата вытекает заключение о том, что для возможности моделирования произвольной классической ***d-ОС*** *обратимой* структурой тех же класса и размерности необходимо использовать способы кодирования конечных ***КФ*** моделируемой ***d-ОС***, допускающие бесконечное число равноправных представителей в моделирующей структуре. Это составляет своего рода тест первого уровня на допустимость того или иного способа моделирования структурами с указанным свойством обратимости. Более того, из данных результатов следует, что известные традиционные способы моделирования в классических ***d-ОС***, охватываемые понятием ***WM***-моделируемости, не могут привести к цели, поэтому здесь требуются (*если это вообще возможно*) новые нетрадиционные подходы. В процессе дальнейших исследований нами было определено понятие ***W-моделируемости***, существенно расширяющее понятие ***WM***-моделируемости и охватывающее чрезвычайно широкий класс известных и потенциально допустимых способов моделирования в классических ***d-ОС***. Однако и оно не позволило

в своих рамках положительно решить проблему моделирования произвольной классической ***d-OC*** обратимой структурой тех же класса и размерности, о чем свидетельствует следующий основной результат [5,53-57,88,90].

Теорема 93. Произвольная классическая d-OC ($d \geq 1$) не может W-моделироваться обратимой (в смысле отсутствия для нее НКФ) структурой тех же класса и размерности.

Таким образом, даже в рамках такого общего понятия, как ***W-моделируемость***, в общем случае невозможно моделировать произвольную классическую ***d-OC*** обратимой структурой той же размерности. Данный результат служит серьезным доводом в пользу предположения о невозможности такого моделирования. Однако выходя за рамки конечности алфавита внутренних состояний, появляется возможность моделирования классических ***d-OC***, обладающих неконструируемостью ***НКФ***-типа, структурами той же размерности, но без данного свойства. Не нарушая общности, рассмотрим случай ***1-OC*** с алфавитом $A=\{0,1,...,a-1\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,...,n-1\}$. Очевидно, если для локальной функции перехода ***1-OC*** выполняется нижеследующее соотношение, а именно:

$$(\forall \langle x_1 x_2 \dots x_{n-1} \rangle)(x_o \neq x_o^* \rightarrow \sigma^{(n)}(x_o, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq \sigma^{(n)}(x_o^*, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) \quad (\psi)$$
$$x_j, x_o^* \in A = \{0,1,2,...,a-1\}; \quad j = 0..n-1$$

то структура не обладает парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. Структурируем внутренние состояния единичного автомата моделирующей ***1-OC**** на двух уровнях $\langle b/p \rangle$, где $b \in A$ и $p \in B=\{k^*a+1 \mid k=1,2,...\}$. Множество B упорядочено в порядке возрастания и его элементы пронумерованы, начиная с единицы. При сделанных предположениях локальную функцию перехода моделирующей ***1-OC**** определяем следующим образом, а именно:

$$\sigma_1^{(n)} : \begin{bmatrix} x_1 x_2 x_3 \dots x_n \\ y_1 y_2 y_3 \dots y_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \varphi(y_1 + x_1) \end{bmatrix}, \quad x_j \in A,\ y_j \in B=\{k^*a+1 \mid k=1,2,...\};\ (j = 1..n)$$

where $\varphi(m)$ calculates an element of B with order number m

тогда как $\sigma^{(n)}$ определяет ***ЛФП*** моделируемой бинарной ***1-OC***. В свете данного определения несложно заметить, что верхний уровень состояний ***КФ*** $\langle c_o/...(a+1)... \rangle$ моделирующей ***1-OC**** полностью симулирует динамику ***1-OC*** для произвольной ***КФ*** $c_o \in C(A,1)$. Исходя из сделанных предположений оценим справедливость соотношения (ψ) для моделирующей классической ***1-OC****.

$$\sigma_1^{(n)} : \left[\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 x_3 \dots x_n \\ y_1 & y_2 y_3 \dots y_n \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* = \varphi(x_1 + y_1) \end{bmatrix} \equiv S_1^*; \qquad x_1, x_1^1, x_1^*, x_1^{1*} \in A=\{0,1,...,a-1\}$$

$$\sigma_1^{(n)} : \left[\begin{array}{c|c} x_1^1 & x_2 x_3 \dots x_n \\ y_1^1 & y_2 y_3 \dots y_n \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{1*} \\ y_1^{1*} = \varphi(x_1^1 + y_1^1) \end{bmatrix} \equiv S_1^1; \qquad y_1, y_1^1, y_1^*, y_1^{1*} \in B=\{k^*a+1 \mid k=1,2,...\}$$

Так как должно иметь место соотношение $\langle x_1/y_1 \rangle \neq \langle x_1^1/y_1^1 \rangle$, то нам достаточно ограничиться рассмотрением лишь трех из четырех случаев, а именно: ***(1)*** $(x_1=x_1^1) \& (y_1 \neq y_1^1)$ – в этом случае, очевидно, будет иметь место соотношение $y_1^* = \varphi(x_1+y_1) \neq y_1^{1*} = \varphi(x_1^1+y_1^1)$, т.е. состояния $\langle S_1^*, S_1^1 \rangle$ будут различны $(S_1^* \neq S_1^1)$; ***(2)*** $(x_1 \neq x_1^1) \& (y_1=y_1^1)$ – в данном случае на основе определения функции $\varphi(m)$ получаем соотношение $y_1^* = \varphi(x_1+y_1) \neq y_1^{1*} = \varphi(x_1^1+y_1^1)$, т.е. и в этом случае состояния $\langle S_1^*, S_1^1 \rangle$ будут различны $(S_1^* \neq S_1^1)$.

(3) $(x_1 \neq x_1^1) \& (y_1 \neq y_1^1)$ – в данном случае будем исходить из того факта, что разность между двумя соседними членами из B равна a. Следовательно, при одновременном выполнении двух условий $(x_1 \neq x_1^1) \& (x_1, x_1^1 \in A)$ и $(y_1 \neq y_1^1) \& (y_1, y_1^1 \in B)$ из определения функции

$\varphi(m)$ также легко усматривается, что $y_1^* = \varphi(x_1+y_1) \neq y_1^{1*} = \varphi(x_1^1+y_1^1)$, а значит и состояния $< S_1^*, S_1^1 >$ будут различны $(S_1^* \neq S_1^1)$. Этим условие (ψ) полностью доказано. Таким образом, определенная нами моделирующая структура не будет обладать парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. Итак, ***при условии использования бесконечного алфавита внутренних состояний единичного автомата существует d-ОС ($d \geq 1$) без НКФ, моделирующая в строго реальное время произвольную структуру той же размерности.***

Совершенно иной подход позволяет моделировать классические ***d-ОС*** ($d \geq 1$), обладающие неконструируемостью ***НКФ***-типа, структурами того же класса и той же размерности, но на основе использования ***бесконечных КФ*** из множества $C(A,d,\infty)$. Рассмотрим, не нарушая общности, данный подход на основе классических ***1-ОС***. Путь ***1-ОС*** является классической структурой с алфавитом $A=\{0,1,2, \ldots, a-1\}$ и простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$. Хорошо известно [5], что любая классическая ***1-ОС*** моделируется с замедлением времени и расширением алфавита ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства.

В качестве ***моделирующей*** выбирается классическая ***1-ОС*** с индексом соседства $X^*=\{-1,0,1,2\}$ и алфавитом $A^*=A\cup A'=\{b_1,b_2,b_3, \ldots,b_a\}$; при этом, $A\cap A'=\varnothing$, $\#A=\#A'=a$, где $\#G$ – мощность множества G, множества A и A' упорядочены и между ними имеется *взаимнооднозначное* соответствие. ***ЛФП*** моделирующей структуры определяем следующим образом:

$$\sigma^{(4)}(x_{-1},x_0,x_1,x_2) = \begin{cases} \sigma^{(2)}(x_0,x_2), & if \quad x_{-1},x_1 \in A' \ \ and \ \ x_0,x_2 \in A' \\ \delta(x_{-1},x_0), & otherwise \end{cases} ;$$

$$where \qquad \delta(x,y) = \begin{cases} A_{d(x)}, & if \ \ y \in A \\ A'_{d(x)}, & if \ \ y \in A' \end{cases} ; \quad \sigma^{(2)}(x_0,x_2) - \ LTF \ of \ the \ modelled \ 1\text{-}HS \ \P$$

$$where \qquad R_{d(x)} \ - \ d(x)\text{-}th \ element \ of \ a \ set \ R;$$

$$d(x) = x+1 \ \ if \ \ x \in A \quad and \quad d(x) = x-a+1 \ \ if \ \ x \in A'$$

Определяем начальную конечную ***КФ*** $c_o = \square x_{-1}x_0x_1x_2 \ldots x_n \square$ в моделирующей структуре ***1-ОС**** в виде бесконечной конфигурации в следующем виде, а именно:

$$c^*_o = \ldots h_{-2}x_{-1}\, h_{-1}x_0\, h_0x_1\, h_1x_2\, h_2 \ldots x_n\, h_n \ldots$$

Несложно убедиться, что определенная таким образом классическая ***1-ОС**** ***1-***моделирует динамику исходной ***1-ОС*** для каждой начальной конечной ***КФ*** $c_o \in C(A,1,\phi)$. При указанной организации чередования символов алфавитов A и A' в конфигурациях *моделирующей* структуре ***1-ОС**** алгоритм выделения конфигураций соответствующих конфигураций моделируемой структуры ***1-ОС*** весьма прост и прозрачен, когда элементы ***A'-***множества выполняют роль маркеров, разделяющих символы ***КФ*** моделируемой ***1-ОС***. Покажем, что в данной организации ***1-ОС**** отсутствуют пары ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***.

Очевидно, что для ***1-ОС**** с индексом соседства $X^*=\{-1,0,1,2\}$ пары ***ВСКФ*** имеют вид:

a	b	c	x_1	x_2	….	x_{n-1}	x_n	d	e	f
a	b	c	y_1	y_2	….	y_{n-1}	y_n	d	e	f
	b^*	c^*	z_1	z_2	….	z_{n-1}	z_n	d^*		

$$a, b, c, d, e, f, b^*, c^*, d^*, x_1, y_1, z_1 \in A^*=A\cup A'; \quad (x_1 \neq y_1) \ \& \ (x_n \neq y_n) \quad j=1..n$$

Очевидно, что при наличии для структуры пар ***ВСКФ*** именно по отношению к ***ВСКФ*** с минимальным ***ВБ*** вполне достаточно проводить все необходимые рассмотрения. Из определения же ***ЛФП*** моделирующей структуры несложно убедиться в справедливости следующего определяющего соотношения, а именно:

$$(\forall < x_{-1}x_0x_1x_2 >)(\sigma^{(4)}(x_{-1},x_0,x_1,x_2) \in \{A \mid A'\} \leftrightarrow x_0 \in \{A \mid A'\}), \quad x_{-1},x_0,x_1,x_2 \in A^*=A\cup A' \quad (\mu)$$

Не нарушая общности и для определенности, рассмотрим *правую* часть вышепредставленной пары ***ВСКФ*** с минимальным ***ВБ,*** а именно**:**

….	x_{n-1}	x_n	d	e	f
….	y_{n-1}	y_n	d	e	f
….	z_{n-1}	z_n	d^*	$x_n \neq y_n$	

Рассмотрим случай $(x_n \neq y_n)$ **&** $(x_n \in A, y_n \in A'$ *или* $x_n \in A', y_n \in A)$**.** Из определения ***ЛФП*** моделирующей структуры непосредственно следует, что для нее имеет место определяющее соотношение (**μ**)**,** вследствие чего не может быть получено единое значение для z_n в определении пары ***ВСКФ,*** т.е. имеет место следующее соотношение:

$$(x_n \in A \rightarrow \sigma^{(4)}(x_{n-1}, x_n, d, e) = z_{na} \in A) \neq (y_n \in A' \rightarrow \sigma^{(4)}(y_{n-1}, y_n, d, e) = z_{nb} \in A')$$

и наоборот, а именно:

$$(x_n \in A' \rightarrow \sigma^{(4)}(x_{n-1}, x_n, d, e) = z_{nb} \in A') \neq (y_n \in A \rightarrow \sigma^{(4)}(y_{n-1}, y_n, d, e) = z_{na} \in A)$$

Итак, данный случай устанавливает невозможность существования пар ***ВСКФ*** в ***1-ОС**** как ввиду указанных предположений, так и ввиду выполнения соотношения $A \cap A' = \varnothing$**.**

Рассмотрим случай $(x_n \neq y_n)$ **&** $(x_n \in A', y_n \in A')$**.** Так как состояние d в определении ***ВСКФ*** может быть произвольным и принадлежать обобщенному алфавиту $A^* = A \cup A'$**,** то ввиду неравенства $x_n \neq y_n$ невозможно однозначное определение значения d^***,** т.е.

$$(\forall d \in A^*)\ (\sigma^{(4)}(x_n, d, e, f) \in A^* \neq \sigma^{(4)}(y_n, d, e, f) \in A^*)$$

Получаем, что и в данным случае невозможно существование пар ***ВСКФ*** в ***1-ОС****.*

Наконец, рассмотрим случай $(x_n \neq y_n)$ **&** $(x_n \in A, y_n \in A)$**.** Ввиду возможности наличия для моделируемой ***1-ОС*** неконструируемости ***НКФ-***типа для нее будут существовать (*согласно критерия неконструируемости* ***НКФ-****типа)* и пары ***ВСКФ,*** а следовательно будет выполняться следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\exists x_n, \exists y_n \in A)(\ \sigma^{(4)}(x_{n-1}, x_n, d, e) = \sigma^{(4)}(y_{n-1}, y_n, d, e) = z_n \in A)$$

которое благоприятствует наличию пар ***ВСКФ*** и для моделирующей структуры ***1-ОС****;* между тем, ввиду неравенства $x_n \neq y_n$ невозможно однозначное определение значения d^***,** т.е. выполняется следующее определяющее соотношение, а именно**:**

$$(\forall d \in A^*)\ (\sigma^{(4)}(x_n, d, e, f) \in A^* \neq \sigma^{(4)}(y_n, d, e, f) \in A^*)$$

что и в этом случае отрицает наличие в моделирующей ***1-ОС**** пар ***ВСКФ,*** а значит, неконструируемости ***НКФ-***типа. Таким образом, вышесказанное позволяет сформулировать следующий достаточно интересный результат, а именно**:** ***Произвольная классическая структура 1-ОС с простейшим индексом соседства*** $X=\{0,1\}$ ***и алфавитом*** $A=\{0,1,2, \ldots, a-1\}$ ***1-моделируется классической структурой 1-ОС* с индексом соседства*** $X=\{-1,0,1,2\}$ ***и алфавитом*** $A^*=A \cup A'$ $(A \cap A'=\varnothing, \#A'=a)$***, и не обладающей неконструируемостью НКФ-типа.*** Естесвенным образом распространяя представленный алгоритм на общий случай классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ можно сформулировать следующий довольно важный результат, а именно [88,90]:

Произвольная классическая структура d-ОС 1-моделируется классической структурой d-ОС* ($d \geq 1$***), не обладающей свойством неконструируемости НКФ-типа.***

В общем случае ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ аналогичным образом выбирается моделируемая структура с минимальным ***ШС*** и в моделирующей ее динамику структуре той же размерности все состояния начальной конфигурации соответствующим образом «*окружаются*» сос-

тояниями-*маркерами* из ***A'***-множества. Затем способом, подобным вышеописанному, но с учетом размерности ***ШС***, определяется локальная ***ЛФП***, обеспечивающая как функционирование структуры при отсутствии для нее неконструируемости ***НКФ***-типа, так и моделирование ею исходной структуры. Общий же принцип организации моделирующей структуры, не обладающей ***НКФ***, един для всех размерностей.

Вопросы различий неконструируемости типов ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2 и НКФ-3*** в классических ***d-OC (d ≥ 1)*** достаточно детально рассматривались выше. И если проблема моделирования структур, обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-1***, структурами без данного типа неконструируемости решалась относительно несложно (теорема ***90***), то в случае с неконструируемостью ***НКФ***-типа вопрос, как видим, обстоит несколько сложнее и, прежде всего, по крайней мере для предложенного выше алгоритма моделирования требуется использование множества бесконечных конфигураций, содержащих рекурсивно выделяемые *подконфигурации* - конечные конфигурации моделируемой динамики исходной структуры. Данный алгоритм либо его модификации могут оказаться в определенных случаях полезными и в других задачах симулирования в ***OC***-моделях. В этой связи возникает естественный вопрос о сложности такого допущения. По нашему мнению сложность данного допущения в определенной степени вполне соизмерима со сложностью допущения о *бесконечном* дискретном пространстве ***OC***-модели, единичные узлы которого содержат конечные автоматы Мура в ***0***-состояниях покоя (*кроме их конечного числа*) и к которому одновременно применяются *локальные* подстановки (***ЛФП***), определяющие *глобальную* функцию перехода (***ГФП***).

Ценой данного подхода к моделированию произвольной классической ***d-OC (d ≥ 1)*** посредством структуры тех же размерности и класса является: ***(1)*** двухкратное увеличение алфавита относительно моделируемой структуры, ***(2)*** увеличение ***ШС*** и ***(3)*** использование динамики ***бесконечных КФ***, содержащих имплантированные рекурсивно выделяемые конечные ***КФ*** моделируемой структуры. Особенностью состояний-маркеров является их динамика согласно ***ЛФП***, а также замкнутость множеств единичных автоматов, находящихся в состояних из подалфавитов ***A*** и ***A'***, относительно ГФП моделирующей классической структуры.

В контексте различий неконструируемости типов ***НКФ (НКФ-3)*** и ***НКФ-2***, с одной стороны, и ***НКФ-1***, с другой стороны, определенный интерес представляет и заключительная часть вышепредставленной теоремы ***3***. Посему здесь вполне уместно привести набросок доказательства заключительной части теоремы ***3***. Положим $G=C(d,A,\phi)\setminus\{\square\}$, т.е. из множества всех конечных ***КФ*** исключается и полностью нулевая ***КФ*** (***□-КФ***). В качестве примера ***d-OC (d ≥ 1)***, для которой имеет место соотношение ***G = NCF***, можно привести структуру, чья ***ЛФП*** удовлетворяет следующему соотношению, а именно:

$$(\forall\langle x_1x_2\ \dots\ x_n\rangle)(\sigma^{(n)}(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n)=0) \qquad \{x_j\in A;\ j=1..n\}$$

Очевидно, такую ***d-OC*** можно рассматривать как уникальный исключительный случай и в таком качестве она выступает в единственном числе, когда каждая конечная ***КФ*** является неконструируемой ***НКФ***-типа.

В качестве примера ***d-OC***, для которой имеет место соотношение ***G =NCF-2***, можно привести бинарную ***1-OC*** с индексом соседства Неймана-Мура и с квалифицирующим номером ***45*** (*рассматривается несколько ниже*). Показано, что для данной структуры все конечные ***КФ*** периодичны и множество $C(B,1,\infty)$ замкнуто относительно глобального $\tau^{(3)}$-преобразования. Следовательно, все конечные ***КФ*** в такой структуре образуют множество ***НКФ-2***, что и доказывает возможность соотношений ***G = NCF-2*** для ***d-OC (d ≥ 1)***.

Предположим теперь, для некоторой ***d-OC (d ≥ 1)*** выполняется соотношение ***G = NCF-1***. Рассмотрим произвольную $КФ\ c\in C(A,d,\phi)$. По предположению она имеет предшественников c^* только из множества $C(A,d,\infty)$, т.е. $c^*\tau^{(n)}=c\ (c\neq\square)$. Применяя к ***КФ c*** глобальное

$\tau^{(n)}$-преобразование, получаем ***КФ*** $c_1=c\tau^{(n)}$. Если теперь $c_1=\square$, то в структуре будут существовать пары ***ВСКФ***, а значит, и ***НКФ***, что приводит к невозможности соотношения $G = NCF\text{-}1$, т.к. бесконечное подмножество $G^*\subset G$ будут составлять ***NCF***. В противном же случае для ***КФ*** $c_1\in C(A,d,\phi)$ будет существовать по меньшей мере один предшественник $c\in C(A,d,\phi)$, что вновь приводит к невозможности для произвольной классической структуры соотношения $G = NCF\text{-}1$, что и завершает доказательство второй части теоремы ***3***.

Представляет особый интерес более глубокое исследование взаимосвязи ***обратимости*** классических ***d-OC*** и их ***глобальной*** динамики. Вместе с тем, следует унифицировать и само понятие обратимости динамики ***OC***-моделей, дабы не возникало недоразумений, подобных случаю неконструируемости типов ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1***, имевших место и ранее [1,3,5,9,88,131,184-187,536]. Выше вопрос обратимости динамики ***OC***-моделей рассматривался довольно детально. Наиболее интересные известные нам подходы к определению обратимых ***OC***-моделей (*исключая модели, базирующиеся на динамических* ***ШС***, *в частности*, ***OCнР***) базируются на механизме, при котором, начав с конкретной конфигурации состояний единичных автоматов модели, посредством алгоритма, определяющего последующее состояние единичного автомата, мы имеем возможность восстанавливать его предыдущего состояния. Типичный алгоритм подобного типа рассмотрен в разделе ***2.8.*** Определенную таким образом ***обратимость*** единичного автомата ***OC***-модели можно рассматривать как ***локальную***, тогда как мы понимаем под ***обратимостью*** именно ***глобальную*** (*конфигурационную*) обратимость динамики классических ***OC***-моделей, характеризующую обратимость их ***траекторий –*** последовательностей генерируемых ими конечных конфигураций. В случае нашего понимания обратимости *траекторий* классических ***OC***-моделей (*динамики состояний-конфигураций*) графы состояний ***обратимой*** и ***необратимой*** *динамик* конечных ***КФ*** принимают следующий вид, а именно:

(a) $\ldots \leftarrow c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-3} \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o \in C(A,d,\phi)$ ***обратимая траектория d-OC***

(b) $\ldots \leftarrow c^{\infty}_{-(j+1)} \leftarrow c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-3} \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o \in C(A,d,\phi)$ ***необратимая траектория d-OC***

$\ldots \leftarrow c^{f}_{-(j+1)}$

При этом, в графе состояний типа ***(a)*** конфигурация c_o может повторяться ***бесконечное*** количество раз в случае ее *периодичности*, тогда как для графа типа ***(b)*** число предшественников на шаге $t = -(j+1)$ обязательно не менее одного и они могут принадлежать как множеству $C(A,d,\phi)$, так и множеству $C(A,d,\infty)$. Именно при таком определении ***обратимости*** траекторий динамики классических ***OC***-моделей и возникает вопрос моделирования необратимых классических ***d-OC*** обратимыми. Японским математикам [321,322] на основе результатов по универсальным *обратимым* машинам Тьюринга удалось показать, что классические *обратитимые* ***1-OC*** обладают свойством универсальной вычислимости, однако суть такой обратимости нами детально не анализировалась, поэтому подобное исследование представляется вполне уместным. Однако, вопрос моделирования произвольных классических ***d-OC*** обратимыми ***d-OC*** $(d \geq 2)$ все еще остается открытым, хотя наши результаты по ***WM-*** и ***W***-моделированию классических ***d-OC*** $(d \geq 2)$ говорят в пользу невозможности такого моделирования либо неразрешимости данной проблемы [88]. Между тем, при всей широте охвата моделирующих алгоритмов указанных классов они не являются исчерпывающими, поэтому дальнейшие исследования по поиску алгоритмов моделирования необратимых классических ***d-OC*** $(d\geq 1)$ обратимыми ***d-OC*** не являются так уж и беспочвенными. Некоторые соображения в данном направлении нами уже сформировались и на их основе проводятся всесторонние исследования, потребующие для своего завершения дальнейших проработок и тщательной апробации. Усилия

в получении подобных алгоритмов, доказательство их невозможности либо алгоритмической неразрешимости проблемы заслуживают самого пристального внимания.

4. В рамках общей проблемы моделирования в классических ***d-OC*** большой прикладной интерес представляет вопрос симулирования реальных структур классическими. Здесь под ***реальной*** понимается такая ***OC-***модель**,** которая отличается от классической тем**,** что ее единичный автомат при переходе в следующий момент времени ***t+1*** в *новое* внутреннее состояние, определяемое ***ЛФП*****,** может перейти и в некоторое другое состояние из того же ***A-***множества внутренних состояний, т.е. новое внутреннее состояние автомата будет отличаться от ожидаемого **(***на основе* ***ЛФП*****)** состояния. Такое поведение единичного автомата в реальной ***OC-***модели может объясняться целым рядом факторов, а именно**:** неисправность автомата, случайный сбой, выход его из строя и др. Поэтому такого типа структуры естественно называть ***реальными*****.** Они представляют значительный интерес при исследовании вопросов практической реализации параллельных вычислительных устройств на основе ***OC-***моделей, а также ряда других важных мотиваций.

Исследованию реальных ***OC-***моделей, а точнее вопросу повышения надежности функционирования такого типа структур**,** посвящен ряд работ**.** Наиболее известной техникой корректировки ошибок функционирования реальных ***OC-***моделей является метод ***Нишио-Кобуши*** [319]**,** основная идея которого состоит в симулировании работы каждого единичного автомата реальной ***OC-***модели тремя соседними автоматами**.** В этом случае ***симулирующая*** *реальную* ***OC-***модель классическая структура на основе информации о соседях трех соседних автоматов в момент времени $t > 0$ безошибочно определяет состояние искомого единичного автомата в следующий момент $t+1$ времени. Однако функция выбора состояния в этом случае также должна выполняться вполне безошибочно.

До сих пор мы не занимались подобной проблематикой в рамках *общей* теории однородных структур**,** но при первом же ее рассмотрении вполне уместным представляется использование уже имеющихся результатов по довольно развитой теории кодирования. Однако здесь имеется и существенное отличие. В теории кодирования схема «***кодер*** $\Rightarrow$ ***канал передачи*** $\Rightarrow$ ***декодер***» работает для сугубо последовательных цепочек символов, поступающих на вход ***кодера*** и появляющихся на выходе ***декодера*****.** Нарушения в канале передачи информации носят также сугубо последовательный характер. В реальных же ***OC-***моделях нарушениям одновременно подвержен ряд единичных автоматов структуры и исправлять эти нарушения **(***во избежание существенного усложнения алгоритмов восстановления***)** необходимо одновременно **(***но необязательно за один такт работы структуры***),** так как все единичные автоматы в структуре функционируют строго синхронно. С этой целью наиболее естественным представляется ***блоковое*** кодирование символов конфигурации в ***OC-***модели, суть которого состоит в помещении символа состояния единичного автомата структуры в специальным образом организованный кодировочный блок. Это соответствует замене реальной ***OC-***модели с некоторым индексом соседства симулирующей ***OC-***моделью, чей шаблон соседства включает ***ШС*** реальной модели, а организация его и способ функционирования *симулирующей* ***OC-***модели позволяют восстанавливать того или иного класса нарушения**,** происходящие в ***реальной*** модели**.** При сделанном замечании представляется интересным использование для симулирующей ***OC-***модели кодов на основе ортогональных латинских квадратов, матриц Адамара и т. д**.** Наряду с этим результаты по теории кодирования могут иметь и другие приложения в ***TOC-***проблематике. Предложенный подход к организации надежного функционирования реальных ***OC-***моделей составляет одну из задач общей проблемы моделирования одной классической ***d-OC*** другой структурой той же размерности при подавлении того или иного свойства моделируемой структуры **(***в смысле отсутствия данного свойства для моделирующей структуры***).**

К общей проблеме моделирования в классических ***d-ОС*** в значительной мере относится и проблема надежности функционирования структур из реальных объектов. До сих пор предполагалось, что ***d-ОС*** представляют собой сугубо абстрактную модель, функционирующую по вполне определенному параллельному алгоритму. В реальных же условиях функционирование ***ОС-***моделей, состоящее из довольно сложного взаимодействия составляющих их единичных автоматов, может быть подвержено различного рода нарушениям ***(сбоям)***, что влечет за собой крайне нежелательные последствия. В этой связи возникает весьма важная задача такой организации ***ОС-***модели, которая позволяла бы для многих важных случаев корректировать *возможные* сбои в процессе функционирования реальной вычислительной ***ОС-***модели. Будем называть ***d-ОС самокорректирующейся***, если она в процессе своего функционирования способна устранять последствия сбоев в работе своих единичных автоматов и *связующих* их информационных каналов. Очевидно, что для такого объекта как ***ОС-***модель, состоящего из бесконечного числа *единичных* автоматов *(возможно с довольно сложной внутренней организацией и большим числом внутренних состояний)*, системы *коммутации* каждого автомата с его непосредственными соседями, определяемыми индексом соседства, и сложными ***ЛФП***, вполне реальным представляется довольно большое разнообразие аварийных ситуаций, возникающих при функционировании реальных ***ОС-***моделей. Здесь мы обсудим только два наиболее важных класса аварийных ситуаций, возникающих в реальных ***ОС-***моделях, а именно:

♦ ошибка при определении последующего внутреннего состояния единичного автомата ***ОС-***модели, т.е. сбой функционирования ее ***ЛФП;***

♦ ошибка при сборе информации о состояниях единичных автоматов ***ОС-***модели, составляющих шаблон соседства, т.е. сбой в средствах коммутации структуры.

Рассматривая свойства ***ОС-***моделей на поведенческом *(динамическом)*, а не на структурном уровне, мы вполне можем ограничиться только этими двумя типами аварийных ситуаций, которые в определенной мере являются результатом абстрагирования реальных условий. Более того, ввиду принципа функционирования ***ОС-***моделей *(когда на получение информации о конфигурации **ШС** не затрачивается время)* можно вполне ограничиться рассмотрением только первого типа аварийных ситуаций. Согласно ранее введенному понятию ***ОС-***модели, в которых возможны такого типа аварийные ситуации будем называть ***реальными.*** В общем случае в реальных ***ОС-***моделях в процессе их функционирования могут возникать и другие аварийные ситуации *(выход из строя единичного автомата, средств коммутации и т.д.)*, но мы в термин «***реальные***» вкладываем именно только приведенный смысл. Между тем, рассмотрение других типов аварийных ситуаций довольно сложная и важная задача, подлежащая детальной проработке при практических реализациях ***ОС-***моделей [536]. Введем теперь понятие ***надежности*** реальной ***ОС-***модели.

<u>Определение 25</u>. Реальная ОС-модель обладает $(1 - 1/m^d)$x100%-й надежностью, если в каждом d-мерном гиперкубе с ребром m-размера может быть подвержено сбоям не более одного единичного автомата в один и тот же момент времени $t > 0$.

Очевидно, что при граничных значениях $m = 1$ и $m = \infty$ мы имеем дело соответственно с ненадежными и надежными *(классическими)* ***ОС-***моделями. Все другие промежуточные значения ***m-***величины дают различного уровня надежности реальные ***ОС-***модели. Рассмотрим теперь некоторые методы организации реальных ***ОС-***моделей, позволяющие им быть ***самокорректирующимися*** структурами.

В основе первого метода организации самокорректирующихся ***ОС-***моделей лежат следующие соображения [53]. Состояния каждого единичного автомата реальной модели ***2-ОС*** представляются в виде конфигурации связного блока из четырех автоматов согласно индекса соседства $X^*=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Если состояние некоторого единичного автомата структуры есть $\alpha \in A$, то ***КФ*** представляющего его блока имеет вид, а именно:

α	M
α	α

где символ $M \notin A$ выполняет роль ***маркера***, который позволяет упрощать функцию корректировки. Такое представление позволяет в самокорректирующейся структуре достаточно компактно кодировать любую конфигурацию. Здесь, не нарушая общности, рассматриваются реальные ***2-ОС***, но все сказанное в полной мере относится и к реальным ***d***-мерным ***ОС***-моделям $(d>2)$. Если реальная ***2-ОС*** имеет шаблон соседства размера $m \times n$, то соответствующая ей самокорректирующаяся структура будет иметь ***ШС*** уже размера $(2m \times 2n)$. Пусть реальная ***2-ОС*** имеет надежность $(1 - 1/m^2) \times 100\%$ $(m=3)$.

Это значит, что в блоках автоматов размером (3×3) структуры не может возникнуть одновременно более одного сбоя в один и тот же момент времени $t>0$. Определяем ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, заданную в алфавите $A \cup \{M\}$, в виде суперпозиции двух функций $\tau^{(q)}$ и $\tau^{(p)}$, таких, что соответствующие им ***ЛФП*** $\sigma^{(q)}$ и $\sigma^{(p)}$ определяют соответственно на основе конфигураций ***ШС*** размеров $(2m \times 2n)$ и (3×3) состояние центрального автомата шаблона в следующий момент времени. При этом, предполагается, что в период выполнения ***ЛФП*** $\sigma^{(p)}$ сбоев не происходит, т.е. сбоям может быть подвержена только $\sigma^{(q)}$-функция. Таким образом, если функция $\tau^{(q)}$ осуществляет симуляцию *реальной* ***2-ОС***, то функция $\tau^{(p)}$ корректирует все сбои в единичных автоматах структуры, возникающие в момент выполнения $\tau^{(q)}$-функции, т.е. функция $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$ надежно симулирует реальную ***2-ОС***, образуя вместе со способом кодирования состояний единичных автоматов реальной структуры самокорректирующуюся ***ОС***-модель. Сказанное резюмирует следующий результат.

<u>Теорема 94</u>. Для каждой реальной d-ОС надежности $(1-1/m^d) \times 100\%$ при $m \geq 3$ существует самокорректирующаяся структура той же размерности с алфавитом $A^*=A \cup \{M\}$ внутренних состояний и ГФП $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$, 2-моделирующая исходную реальную d-ОС, где $\tau^{(p)}$ – надежная корректирующая функция с индексом соседства Мура.

Задача корректировки *реальных* ***d-ОС*** существенно упрощается, если предположить, что возникновение сбоев в единичном автомате структуры идентифицируется им же путем перехода в некоторое *сигнальное* состояние $g \notin A$. При сделанном предположении можно значительно упростить кодирование состояний реальной структуры и саму функцию $\tau^{(p)}$ корректировки сбоев. В случае реальной ***2-ОС*** состояние единичного автомата можно представлять линейной ***КФ*** вида «xxM», где M – маркер и $x \in A$. Тогда в соответствующей ей самокорректирующейся ***2-ОС ГФП*** $\tau^{(q)}$ будет иметь ***ШС*** размера $(3m \times n)$, а корректирующая $\tau^{(p)}$-функция – линейный шаблон размера 3, расположенный параллельно X-оси в однородном Z^2-пространстве структуры.

При сделанных предположениях вполне достаточно рассматривать сбои, происходящие в структуре в момент выполнения ***ГФП*** $\tau^{(q)}$ в момент $t > 0$, независимыми в линиях $Y=h$ $(h = 0; \pm1; \pm2; \pm3; .....)$ единичных автоматов, а для любой линии $Y = h$ в каждом линейном блоке из трех прилегающих автоматов не может происходить более одного сбоя. Тогда корректирующая $\tau^{(p)}$-функция имеет индекс соседства Мура для любого Y-значения и является очень простой в реализации, что позволяет сделать ее весьма надежной в практической реализации современными средствами микроэлектроники.

Интересные возможности для обеспечения корректировки можно получать при предположении, что единичный автомат в M-состоянии работает без сбоев. Это вполне допустимое предположение, ибо для этого автомату нет надобности собирать информацию и на ее основе определять свое последующее внутреннее состояние; достаточно лишь сохранять свое состояние постоянным в течение всего времени функционирования реальной ***ОС***-модели. В этом случае состояния единичных автоматов реальной ***ОС***-модели

также кодируются *линейной* ***КФ «xxM» (x∈A).*** При прочих равных условиях не требуется наделять единичный автомат структуры свойством идентификации сбоев. Данный подход позволяет упрощать алгоритм функционирования единичного автомата моделиделирующей ***d-OC.*** Сказанное позволяет сформулировать следующий результат [53].

<u>Теорема 95</u>. Для каждой реальной d-OC надежности (1-1/m)x100% при m≥3 существует самокорректирующаяся структура той же размерности с алфавитом A* = A∪{M, g} внутренних состояний и ГФП $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$, которая 2-моделирует исходную реальную d-OC, где M и g – соответственно символы маркера и сбоя, а $\tau^{(p)}$ – надежная корректирующая функция с одномерным индексом соседства Мура. При условии надежности функционирования автоматов в M-состояниях для каждой реальной d-OC той же надежности, что и выше, существует самокорректирующаяся структура той же размерности с алфавитом A*=A∪{M} внутренних состояний и ГФП $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$, которая 2-моделирует исходную реальную d-OC. Надежная $\tau^{(p)}$-функция имеет одномерный индекс соседства X={-2,-1,0,1,2}.

Дальнейшие работы по изучению проблемы самовосстановления различного типа реальных ***OC-***моделей представляют значительный прикладной и познавательный интерес и данному направлению должно быть уделено соответствующее внимание. К этому же направлению можно отнести и исследования по устойчивости того или иного типа ***OC-***моделей к различного рода сбоям**.** В этом плане представляют интерес ***d-OC*** из так называемого класса пороговых структур, у которых ***ЛФП*** выполняются по принципу порогового элемента**:** срабатывание происходит при достижении или превышении некоторого порога сигналами, приходящими от автоматов шаблона соседства. Такого типа ***ЛФП*** уже в принципе своего функционирования заключают значительный элемент надежности, т.е. устойчивости к возможным сбоям**.** Быть может, это и есть одна из причин высокой надежности функционирования реальных нейроноподобных структур [536].

Из наиболее интересных тем исследования по *надежности* можно выделить следующие. Прежде всего представляет интерес определение *оптимальных* самокорректирующихся ***OC-***моделей относительно того либо иного понятия сбоев. Большое прикладное значение имеет удовлетворительное решение вопроса надежности вычислительных систем и устройств на основе ***OC-***моделей**,** так как рассматриваемые до настоящего времени подходы носят**,** скорее**,** теоретический характер и представляются недостаточно практичными для целого ряда конкретных прикладных реализаций**.** Наряду с этим данные подходы помогают рассматривать проблему надежности различного рода и природы динамических клеточных систем с различных точек зрения.

Из полученных результатов можно сделать несколько практических выводов**.** Использование этапа корректировки ***($\tau^{(p)}$-функция)*** делает целесообразным применение в реальных ***OC-***моделях принципа переменной коммутации единичных автоматов структуры в рамках некоторого максимального ***ШС.*** Это же позволяет адекватно настраивать ***OC-***модель на выполнение того или иного класса параллельных алгоритмов. Это же в свою очередь служит новым источником сбоев, т.к. функция коммутации может быть достаточно сложной и часто меняться в процессе функционирования реальной ***OC-***модели. Сравнение теорем ***94*** и ***95*** по моделированию реальных ***d-OC*** говорит в пользу наделения единичного автомата структуры возможностью идентифицировать свои сбойные ситуации или способностью надежно сохранять особое состояние ***– маркер,*** что позволяет весьма существенно упрощать алгоритмы корректировки и снижать требования к надежности самих единичных автоматов, не снижая общего требования к надежности функционирования ***OC-***модели в целом**.** Дальнейшие исследования в данном направлении крайне желательны со многих точек зрения и, в первую очередь, прикладных.

Предложенные здесь приемы *корректирования* реальных ***OC-***моделей представляют оп-

ределенный, как уже отмечалось, скорее всего, теоретический интерес (*нося черты общего принципиального подхода*), но для целей практического применения они недостаточно эффективны по требуемым ресурсам (*увеличение размера* ***ШС*** *и временные затраты*). Поэтому для практических целей следует разработать более эффективные методы корректировки сбоев, т.е. повышения надежности функционирования реальных ***ОС***-моделей и реализуемых на их основе конкретных устройств. В практических реализациях *вычислительных* ***ОС***-моделей в целях обеспечения надежности их функционирования наиболее естественным представляется структурный подход, суть которого состоит в обеспечении специальными корректирующими логическими схемами единичного автомата и, возможно, системы коммутации шаблона соседства ***ОС***-модели. Данные логические схемы на основе входной информации и текущего состояния единичного автомата должны иметь возможность достаточно эффективно осуществлять локальный анализ надежности функционирования единичного автомата и при необходимости производить соответствующие диагностические и корректировочные процедуры.

Здесь мы имеем весьма широкое поле деятельности, причем некоторые полезные идеи можно использовать и из теоретических рассмотрений. На самом деле, в первую очередь степень надежности тесно связана с определенной избыточностью информации. А так как при рассмотрении классических ***ОС***-моделей (*хотя и реальных*) мы не принимаем во внимание структуру единичного автомата, то кодирование его состояния с целью обеспечения возможности корректировки сбоев требовало дополнительного (*от* ***2*** *до* ***3***) использования единичных автоматов. Это порождает на практике существенное усложнение ***ОС***-модели. В реальных же условиях единичный автомат может иметь два и более регистров, содержащих одно и то же состояние. Осуществляя синхронное изменение состояний регистров на основе ***ЛФП*** и сравнивая полученные результаты, можно определять сбои в том или ином единичном автомате ***ОС***-модели, и на основе данной информации предпринимать те или иные корректирующие действия. И, наоборот, на основе практических решений можно строить формальные модели корректировки реальных ***ОС***-моделей. Формализация сказанного приводит нас к следующему результату.

<u>Теорема 96</u>. Пусть в единичном автомате реальной ОС-модели с A-алфавитом за любые n шагов может произойти не более m сбоев ($m \le [n/2]$). Тогда существует симулирующая ее самокорректирующаяся ОС-модель с тем же индексом соседства, A^n-алфавитом внутренних состояний и ГФП вида $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$, которая (n+1)-симулирует исходную реальную ОС-модель, где $\tau^{(q)}$ – соответствует ГФП симулируемой ОС-модели, а $\tau^{(p)}$ – простейшая корректирующая надежная функция симулирующей структуры.

В основу доказательства теоремы положена реализация обобщенного на параллельный случай принципа двойного счета. Такой подход довольно прост в реализации и позволяет получать реальные ***ОС***-модели с произвольной степенью надежности. В случае же практических реализаций, по-видимому, достаточно полагать ***n=3*** и ***m=1***, что вполне согласуется с возможностями современной микроэлектронной технологии производства интегральных схем, которые могут служить в качестве элементной базы реальных систем и устройств на снове вычислительных ***ОС***-моделей. Результаты по самокорректирующимся ***ОС***-моделям могут оказаться плодотворными не только с точки зрения вычислительных наук, но и в свете исследования механизмов восстановления, имеющих место при возникновении повреждений в реальных биологических клеточных структурах. И в настоящее время вопросам разработки самовосстанавливающихся ***ОС***-моделей уделяется достаточно большое внимание, и прежде всего в связи с созданием на их основе объектов и устройств с использованием нанотехнологий [536]. Завершив рассмотрение ряда традиционных вопросов моделирования в классических ***d-ОС***, переходим теперь к формальным параллельным алгоритмам, определяемым такого типа одномерными однородными классическими структурами.

6.5. Формальные параллельные алгоритмы, определяемые классическими одномерными однородными структурами

Параллельные алгоритмы переработки слов, определяемые классическими ***ОС***-моделями, исследуются особенно интенсивно в последние годы, что вызвано не только самостоятельным интересом в рамках общей теории алгоритмов, но и использованием ***d-ОС*** в качестве формальных моделей в таких областях современного естествознания, как вычислительные науки, математическое моделирование, физика, дискретная синергетика и биология развития. Параллельные алгоритмы, определяемые классическими ***d-ОС (d-ПАОС)***, играют существенную роль в формальном описании целого ряда биологических процессов развития и программируемых систем, базирующихся на вычислительных однородных структурах. Несомненный интерес для решения задач конструирования языков мультиобработки представляет изучение формальных языковых моделей, функционирующих сугубо параллельным образом. С данной целью нами были определены формальные параллельные τ_n-грамматики и соответствующие им формальные параллельные $L(\tau_n)$-языки, кратко рассмотренные в главе 5 и более детально с которыми можно ознакомиться в указанных там же работах. Тогда как в алгоритмическом отношении объекты ***d-ПАОС*** представляют собой дальнейшее исследование классических ***d-ОС*** как параллельных систем переработки слов в конечных алфавитах. Эта проблематика имеет самое прямое отношение к вопросу моделирования в классических ***d-ОС*** как по рассматриваемым задачам, так и по целому ряду основных методов исследования. В настоящем разделе определяется класс ***1-ПАОС*** и рассматриваются вопросы их сложности относительно ряда известных формальных алгоритмов переработки слов.

По определению ***1-ПАОС(a,n)*** оперирует на словах {*конфигурациях из* $C(A,\phi)$*-множества*}, определенных в ***A***-алфавите. Способ его функционирования задается ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ некоторой классической ***1-ОС***, определяемой ***ЛФП*** с параллельными правилами подстановки следующего общего вида, а именно:

$$\underbrace{000\ldots.0}_{n} \Rightarrow 0 \qquad x^j_1 x^j_2 x^j_3 \ldots x^j_n \Rightarrow x^{*j}_1; \quad x^{*j}_1, x^j_k \in A \ (k=1\ldots n;\ j=1\ldots a^n-1) \qquad (56)$$

применяемыми одновременно к *каждому* перерабатываемому алгоритмом слову из множества $C(A,\phi)$. Как известно, параллельные правила подстановок (**56**) определяют ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ соответствующей классической ***1-ОС***. Для каждого слова $c \in C(A,\phi)$ параллельный алгоритм ***1-ПАОС(a,n)*** определяет последовательность слов $<c>[\tau^{(n)}]$, в которой слово c_k называется ***финальным***, если для него имеет место следующее соотношение $c_{k+1} = c_k\tau^{(n)} = c_k$. Пусть $C(A,\phi)$ будет множеством слов, перерабатываемых параллельным алгоритмом ***1-ПАОС(a,n)***, и ***F*** – частичная словарная функция в ***A***-алфавите, если для некоторого конечного слова $c_j \in C(A,\phi)$ имеет место соотношение $F(c_j)=c^*_j \in C(A,\phi)$. Для словарной ***F***-функции области существования и значений соответственно есть E_F и V_F. С учетом сделанных предположений будем говорить, что словарная ***F***-функция, определенная в A^*-алфавите, ***ПАОС-вычислима***, если существует алгоритм ***1-ПАОС*** в алфавите $A=\{b\}\cup A^*$ $(b \notin A^*)$ такой, что для любого слова $c^*_o \in C(A^*,\phi)$, если c_o есть представление слова c^*_o следующего вида: $c^*_o = \square b^{p+2}0^1b^20^{p+1}c^*_o b^{p+2}\square$, то выполняются два следующих основных определяющих условия, а именно:

1) если слово c^* принадлежит E_F-области существования *F*-функции, то последовательность $<c_o>[\tau^{(n)}]$ содержит ***финальное*** c_f-слово следующего общего вида, а именно:

$$c_f = \square b^{p+2}0^1b^10^{p+2}F(c^*_o)b^{p+2}\square, \quad F(c^*_o)\in V_F; \qquad (57)$$

2) если слово c^*_o не принадлежит E_F-области существования *F*-функции, то последовательность $<c_o>[\tau^{(n)}]$ не содержит ***финального*** c_f-слова вида *(57)*.

В свете вышеприведенного определения показано [3], что словарная *F*-функция является ***ПАОС-вычислимой*** тогда и только тогда, когда она вычислима по Тьюрингу. Эквивалентность таких строгих формализаций интуитивного понятия вычислимой функции представляет еще *один* сильный аргумент в подтверждение известного тезиса ***А. Черча.*** В теории формальных алгоритмов большое внимание уделяется вопросам вычислительной сложности и относительно класса параллельных алгоритмов ***1-ПАОС*** в данном направлении получен следующий достаточно интересный результат [3,5,9,53,88].

<u>Теорема 97</u>. Каждая частично рекурсивная словарная F-функция, определенная в некотором конечном A*-алфавите, является ПАОС-вычислимой в расширенном алфавите $A=\{b\}\cup A^*$ $(b\notin A^*)$.

Из результата теоремы *97* следует, что параллельные алгоритмы ***1-ПАОС*** *эквивалентны* в смысле сложности ***Маркова-Нагорного*** нормальным алгоритмам ***Маркова***. Нами были достаточно детально проанализированы вопросы параллелизма класса алгоритмов ***1-ПАОС***, в результате чего определены наиболее интересные направления дальнейших исследований, такие как: классы параллелизма, детализация и уточнение сущности параллелизма (*которая до сих пор носит достаточно интуитивный характер*), выбор наиболее пригодных для эффективной реализации в вычислительных ***ОС***-моделях алгоритмов и целый ряд других. Так, например, был определен класс так называемых *локально реализуемых алгоритмов* ***(ЛРА)***, сущность которых состоит в возможности представлять общий алгоритм в виде локальных идентичных алгоритмов над отдельными подсловами каждого перерабатываемого общим алгоритмом слова. В качестве довольно простого примера такого алгоритма можно указать на задачу символьной сортировки. Проведенные исследования позволяют сформулировать предположение о том, что алгоритмы класса ***ЛРА*** могут реализовываться в ***ОС***-моделях наиболее эффективным образом. В этой связи возникает довольно интересный вопрос о существовании других классов алгоритмов, наиболее эффективно реализуемых в среде ***ОС***-моделей, и каким образом они могут быть охарактеризованы.

Возвращаясь к задаче ***символьной сортировки***, оценим эффективность ее реализации средствами ***1-ПАОС***. Общая задача символьной сортировки определяется следующим образом. Пусть ***X*** – произвольное конечное слово в ***A***-алфавите, для символов которого определена некоторая иерархия (*принцип старшинства*). Необходимо определить ***GSA***-алгоритм, посимвольно сортирующий произвольное конечное ***X***-слово согласно заданному принципу старшинства символов. Хорошо известно, что последовательные алгоритмы требуют для решения данной задачи не более, чем $M=\alpha|X|^2$ (*где* α – *константа и* $|X|$ – *длина X-слова*) просмотров ***X***-слова, тогда как ***1-ПАОС*** решает данную задачу за строго линейное время, а именно: ***Существует 1-ПАОС, сортирующий произвольные конечные слова длины L за не более, чем L шагов***. К задаче сортировки непосредственно примыкает и известная *проблема Французского флага* ***(ПФФ)***, являющаяся формализацией проблем регуляции и дифференциации реальных биологических клеточных структур, детально обсуждаемая в наших работах [3,5,26,27,33]. Более детальное обсуждение ***ПФФ*** показывает, что она является одним из типов сортировки в общем ее понимании, а модели, решающие ***ПФФ***, могут оказаться достаточно полезными при разработке эффективных алгоритмов сортировки, и наоборот – решение проблем, связанных с разра-

боткой теории параллельных алгоритмов, поможет пролить свет и на многие аспекты регуляции и дифференциации клеточных биологических систем, а также и некоторых других проблем биологии развития в целом, что представляется достаточно важным.

В этом же плане представляет интерес и задача зеркального обращения произвольной конечной строки *(конфигурации)* посредством $MT^s{}_q$ и классической ***1-OC***. Несложно убедиться, что для обращения строки ***m***-длины посредством $MT^s{}_q$ требуется порядка $2m^2$ шагов. Тогда как классическая ***1-OC*** может решать эту же задачу в линейное время. Для этой цели определим моделирующую классическую ***1-OC*** следующим образом. В качестве алфавита внутренних состояний единичного автомата моделирующей ***1-OC*** с простейшим индексом соседства $X=\{0, 1\}$ выбирается множество структурированных состояний $G=\left\{\begin{bmatrix}\varpi\\ \varphi\end{bmatrix} \mid \varpi, \varphi \in A \bigcup \{\Delta\}\right\}$, благодаря которому каждая конечная ***КФ*** $c_o = \square x_1 x_2 x_3 \ldots x_m \square$ $(x_k \in A;\ k=1 \ldots m)$ исходной *(моделируемой)* классической ***1-OC*** в моделирующей структуре представляется в следующем общем виде, а именно:

Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
Δ	Δ	x_1	x_2	x_3	.....	x_{m-1}	x_m	Δ	Δ

(58)

Для решения задачи зеркального обращения произвольной c_o-***КФ*** определяем *(частично; только для конкретной цели моделирования)* ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ с простейшим индексом соседства $Xn=\{0, 1\}$ следующими параллельными правилами подстановок, а именно:

$$\begin{bmatrix}\Delta\\ x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\ y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\Delta\\ x\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\Delta\\ x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\ \Delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\ \Delta\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\Delta\\ \Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\ w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\Delta\\ \Delta\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}w\\ \Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\ \Delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\Delta\\ \Delta\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\Delta\\ x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}y\\ x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\ \Delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}y\\ \Delta\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\Delta\\ \Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\ \Delta\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}z\\ y\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}x\\ \Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}y\\ \Delta\end{bmatrix} \quad x, y, z \in A;\ w \in A \cup \{\Delta\}$$

Путем несложных преобразований нетрудно убедиться, что, начиная с c_o-***КФ*** вида (**58**), через $t=2m-1$ шагов моделирующая классическая ***1-OC***, определенная вышеуказанными правилами параллельных подстановок, переводится в c_t-***КФ*** следующего вида:

Δ	Δ	x_m	x_{m-1}	.....	x_3	x_2	x_1	Δ	Δ
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ

являющуюся рекурсивно идентифицируемым представлением зеркального обращения начальной c_o-***КФ*** моделируемой структуры. Представленный способ *структурирования* алфавита состояний моделирующей структуры *(использованный нами и ранее* [53-56]*)* позволяет достаточно эффективно решать целый ряд интересных задач моделирования, не являясь при этом оптимальным с точки зрения сложности классических ***OC***-моделей.

Таким образом, ***если*** $MT^s{}_q$ ***решает задачу зеркального обращения произвольной КФ m-длины за время порядка*** $t=2m^2$, ***то соответствующим образом определенная классическая 1-OC с простейшим индексом соседства решает эту же задачу за время*** $t = 2m - 1$. Аналогичным методом можно показать, что ***задача распознавания симметрии произвольного слова m-длины решается*** $MT^s{}_q$ ***за время порядка*** $t = \beta m^2$ (β – *константа*), ***тогда как классическая 1-OC эту же задачу решает за время порядка*** $t=[m/2]$. В монографии [1] для решения данной задачи за время $t = 3[m/2]$ была определена достаточно простая классическая ***1-OC*** с индексом соседства $X=\{-2,-1,0,1,2\}$, тогда как представленный выше подход позволяет сократить это время в три раза при сведении индекса соседства решающей структуры к простейшему. Аналогичным образом можно показать, что ***существует классическая 1-OC с простейшим индексом соседства, удваивающая каждую конечную КФ m-длины, определенную в некотором сужении A-алфавита, за время порядка***

$t = \beta m$ (β – *константа*). Доказательство этого с соответствующими отличиями повторяет доказательство предыдущего предложения.

Классическая ***1-ОС*** со структурированным алфавитом внутренних состояний вида, например, $G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} \mid x \in A;\ q \in Q;\ A \bigcap Q = \varnothing \right\}$, позволяет достаточно эффективно (*относительно традиционно определяемого* ***A****-алфавита структуры*) решать кроме вышерассмотренных и целый ряд других интересных задач моделирования.

$$(\alpha)\ \begin{bmatrix} x_1 \\ q_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x`_1 \\ q`_1 \end{bmatrix} \qquad (\beta)\ \begin{matrix} q_0 x_1 q_1 x_2 q_2 \to x`_1 \\ x_1 q_1 x_2 q_2 x_1 \to q`_1 \end{matrix} \qquad x`_1, x_k \in A;\ q`_1, q_j \in Q\ \ (k = 1..3;\ j = 0..3)$$

Вместе с тем, она легко погружается в классическую ***1-ОС*** с индексом соседства ***X={-1,0, 1,2,3}***, алфавитом $W = A \cup Q$ внутренних состояний и ***ЛФП***, определяемой параллельными подстановками общего (α)-вида, представленного выше, соответствующими параллельным (β)-подстановкам *ЛФП* исходной классической структуры. В таком случае текущей ***КФ*** следующего общего вида, а именно:

.....	□	x_1	x_2	x_3	.....	x_m	□	.....
.....	Δ	q_1	q_2	q_3	.....	q_m	Δ	.....

моделирующей структуры соответствует текущая ***КФ*** $c = ...x_o q_o x_1 q_1 x_2 q_2 \ ...\ x_m q_m ...$ моделируемой структуры. Таким образом, уровневое структурирование состояний алфавита структуры позволяет в целом ряде случаев существенно упрощать решение задач моделирования и сам процесс параллельного программирования в ***ОС-***моделях.

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s`_к \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} q`_к \\ s_{к-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix} \end{array}\right\},\ if\ z_k = -1;\ \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_к \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_к \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} q`_к \\ s`_к \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix} \end{array}\right\},\ if\ z_k = 0;\qquad \left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s`_к \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} q_к \\ s_к \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{к+2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} q`_к \\ s_{к+1} \end{bmatrix} \end{array}\right\},\ if\ z_k = 1; \qquad (G)$$

Предложенный метод структурирования состояний (*допускающий целый ряд весьма интересных обобщений*) позволяет естественно погружать в классическую ***1-ОС*** машину MT^s_q, кодируя ее текущую конфигурацию соответствующей ***КФ*** моделирующей ***1-ОС:***

Δ	Δ	Δ	Δ	q_k	Δ	Δ	Δ	Δ
Δ	s_{k-3}	s_{k-2}	s_{k-1}	s_k	s_{k+1}	s_{k+2}	s_{k+3}	Δ

Подобное структурирование внутренних состояний ***ОС-***модели позволяет достаточно эффективно разносить по уровням управляющие ходом выполняемого параллельного алгоритма модели информационные потоки. Но тогда каждая команда $s_k q_k \to s`_k q`_k z_k$

(*где* s_k, $s`_k$ – *сканируемые символы выходной ленты*; $q_k$, $q`_k$ – *состояния конечного автомата и* $z_k=\{-1|0|1\}$ – *сдвиг сканирующей головки соответственно* {*влево*|*на месте*|*вправо*}) MT^s_q **1-**моделируется соответствующими параллельными подстановками локальной функции перехода ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура, как это проиллюстрировано в ***(G)***, где **Δ –** пустой символ выходной ленты MT^s_q**.** В качестве полезного упражнения читателю рекомендуется апробировать программу работы моделирующей структуры**.** Данный прием моделирования позволяет более естественно переносить результаты**,** полученные по MT^s_q**-**проблематике, на классические ***ОС-***модели, однако он не совсем пригоден, если требуется получать оптимальные для моделирующей ***ОС*** параметры**.** Вместе с тем**,** для задач, требующих получения лишь принципиальной возможности, он приемлем.

Пусть в моделируемой ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$ и произвольным ***A-***алфавитом текущая ***КФ*** имеет вид $c=\square x_1x_2x_3x_4...x_m\square$**,** а соответствующая ей ***КФ*** моделирующей ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства, структурированным ***S-***алфавитом и ***ЛФП,*** определяемой параллельными подстановками следующего общего вида, а именно**:**

$$(\alpha)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x`_1\\x`_2\end{bmatrix}\qquad(\beta)\quad x_1x_2x_3\rightarrow x`_1\quad x`_1,\ x`_2,\ x_k\in A;\ (k=1..4)$$

представляется двухуровневой конструкцией следующего весьма простого вида**:**

□	□	x_1	x_3	x_5	.....	x_{m-1}	□	□
□	□	x_2	x_4	x_6	.....	x_m	□	□

Параллельные ***(α)-***подстановки соответствуют ***(β)-***подстановкам. Данная модификация принципа *структурирования* состояний алфавита ***моделирующей*** структуры интересна со многих точек зрения и обобщается на произвольный ***ШС*** моделируемой структуры.

Вполне естественно предположить, что распараллеливание дает существенный временной выигрыш**,** когда временная сложность алгоритма *нелинейно* зависит от входных данных ***(****относительно последовательных моделей вычислений****)*** как, например, в случае задачи сортировки. Но даже в линейном случае распараллеливание может давать весьма существенный временной выигрыш**.** В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим известную задачу *нахождения образца на строках***.** Пусть ***X*** и ***Y –*** две строки длины соответственно ***n*** и ***m*** символов из ***A-***алфавита и требуется определить принадлежность подстроки ***X*** строке ***Y*** $(X\subset Y?)$**.** ***Д. Кнут, А. Морис*** и ***П. Пратт*** предложили решение данной задачи за время не хуже, чем $0(n+m)$**.** Однако можно показать [5,37]**,** что ***специальным образом организованная классическая 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура может решать эту же задачу за время не хуже, чем*** $0(|n-m|)$**.** Имеет место целый ряд и других достаточно интересных примеров подобного характера [5,53-56,88,90,536].

Класс параллельных алгоритмов, определяемых классическими ***ОС-***моделями**,** представляет собой собственный подкласс класса всех локальных алгоритмов ***(ЛА)*****,** т.е. алгоритмов**,** устанавливающих свойства элементов множества и использующих на каждом шаге при этом только информацию об окрестности обрабатываемого в данный момент элемента. В терминах ***ЛА*** естественным образом формулируются и решаются задачи о существовании или отсутствии эффективных алгоритмов для различных дискретных экстремальных задач [53-56,90]. Поэтому результаты и методы ***ЛА-***теории было бы весьма интересным применить и к исследованию класса алгоритмов ***d-ПАОС*** $(d\geq 1)$**.**

В последние годы появляется все большее число работ, посвященных вопросам параллельных алгоритмов**,** как составной части общей теории алгоритмов**.** В этом отношении нами исследовался вопрос временной сложности ***1-ПАОС*** относительно ряда известных формальных моделей последовательных вычислений [5,35,37,47,88,90,536].

***Теорема 98**. Если параллельный алгоритм 1-ПАОС(a,n) вычисляет некоторую частично рекурсивную словарную F-функцию за t шагов, то соответствующая машина Тьюринга может вычислять эту же F-функцию за не более, чем $\{(n+1)t^2 + (n-1)t\}/2$ шагов.*

Проведенный анализ данного результата показывает достаточную степень близости полученной оценки к оптимальной. Следовательно, если некоторая частично рекурсивная словарная функция *ПАОС*-вычислима за время t, то подходящая машина Тьюринга может вычислять ее за время не хуже, чем αt^2 (α - *константа*). Итак, для формальных вычислителей на основе классических *1-ОС* и одноленточных машин Тьюринга разница во времени вычислений имеет квадратичный порядок. Более наглядно можно проиллюстрировать вычислительные возможности *1-ПАОС* (*в плане временной сложности*) на следующем примере. Хорошо известно, что двухсторонний стэковый автомат (*ДСА*) эквивалентен одноголовочной машине Тьюринга с временем работы не хуже, чем величина $t=|x|^{\alpha|x|}$, где x – входное слово, α – некоторая константа. С детальным описанием *ДСА* и принципом его функционирования можно ознакомиться в [37]. Характеристика *ДСА* в терминах параллельных алгоритмов *1-ПАОС* дает существенно лучший результат относительно показателя их временной сложности [5,37].

***Теорема 99**. Если ДСА допускает некоторое множество конечных слов за t шагов, то соответствующий ему параллельный алгоритм 1-ПАОС может допускать то же множество слов за не более, чем $2t^2$ шагов.*

Таким образом, посредством параллельных алгоритмов *1-ПАОС* для ряда вычислительных алгоритмов можно получать существенно более лучшие временные результаты, чем с использованием машин Тьюринга. При этом, следует отметить, что высокая степень параллелизма, присущая *1-ПАОС*, использовалась только на уровне *Т*-моделирования одного алгоритма другим; кроме того, в большинстве случаев не использовался параллелизм, присущий самим моделируемым алгоритмам. В данном направлении дальнейшие исследования представляются нам весьма перспективными и важными [536].

Будем говорить, что машина Тьюринга MT^s_q допускает множество конечных слов *GS*, заданных в *A*-алфавите, если MT^s_q, содержащая на выходной ленте произвольное конечное ω-слово, определенное в *A*-алфавите, переходит в заключительное q_0-состояние после анализа данного слова тогда и только тогда, когда $\omega \in GS$. Пусть теперь $S(c)$ будет множеством всех конечных предшественников некоторой *КФ* $c \in c(A,\phi)$ для классической *1-ОС* с *A*-алфавитом внутренних состояний (c^* *является предшественником для конфигурации* $c \in c(A,\phi)$, *если* $c^*\tau^{(n)}=c$). Проблема определения предшественников конечных *КФ* в классических *ОС*-моделях играет чрезвычайно важную роль, в первую очередь, с точки зрения исследования свойства обратимости динамики, фундаментального для использования *ОС*-среды в качестве концептуальных моделей пространственно-распределенных дискретных динамических систем, из которых физические системы представляются наиболее интересными. С учетом сделанных выше предположений имеет место следующий интересный результат [55], имеющий ряд важных приложений.

***Теорема 100**. Для любой конфигурации $c \in c(A,\phi)$ машина MT^s_q допускает множество $S(c)$ за не более, чем $2(|c^*| + n)^2$ шагов, где c^* – предшественник с-конфигурации, имеющий максимальную длину.*

Исследуя вопросы обратимости динамики в классических *ОС*-моделях, *Т. Тоффоли* показал [273,318], что в случае классических *d-ОС* ($d=1,2$) для любой *КФ* $c \in c(A,d,\phi)$ множество $S(c)$ генерируется некоторым недетерминированным конечным автоматом (*НКА*), что позволяет делать определеные выводы о временной сложности генерации и распознавания предшественников конечных *КФ ОС*-моделей посредством *НКА* и MT^s_q.

Как уже отмечалось выше, однородные структуры на разбиении ***(ОСнР)***, определенные в разделе ***1.2***, моделируются в реальное время классическими ***d-ОС*** с *переменным* индексом соседства, правила применения составляющих подиндексов которого определяются координатами текущего единичного автомата Z^d-пространства структуры. Класс ***ОСнР*** представляет значительный интерес, в первую очередь, из-за относительно несложного программирования в их среде такого важного с физической и ряда иных точек зрения свойства, как обратимость динамики моделей. Такого типа ***ОС***-модели можно рассматривать как простейший подкласс класса всех ***асинхронных*** моделей и исследованию его модельных свойств следует уделить особое внимание, ибо на сегодня результаты в данном направлении носят весьма эпизодический характер. Прежде всего, представляется необходимым исследование вопросов моделирования в среде структур ***ОСнР*** (*и возможно ряда их модификаций*), аналогичных случаю классических ***ОС***. Ряд в этом направлении результатов получен [90], однако здесь остается немало и открытых вопросов.

В настоящее время известен целый ряд работ по исследованию различных концепций магазинных автоматов [5,390]. В рамках данного класса весьма существенное значение для структурного программирования представляют так называемые ***bc-автоматы***, получившие особую известность по работам, связанным с представимостью в них формальных языков. На основе описания ***bc***-автомата нетрудно убедиться, что для него существует трехголовочная ***МТ***, моделирующая его без замедления во времени, и одноголовочная ***МТ***, моделирующая его за время $2(t+1)^2$, где t – время обработки ***bc***-автоматом входного слова. Следующий результат [37] оценивает временные затраты параллельного алгоритма ***1-ПАОС*** на выполнение той же работы, что и некоторый ***bc***-автомат.

<u>Теорема 101</u>. Если некоторый bc-автомат требует t шагов для обработки входного конечного слова, то соответствующий ему параллельный алгоритм 1-ПАОС сможет выполнить ту же работу за не более, чем $2(t+1)^2$ шагов.

Полученные нами в данном направлении результаты имеют разную степень близости к оптимальным, однако позволяют в определенной мере проводить сравнительные оценки временных сложностей классических ***ОС***-моделей и других известных последовательных формальных вычислительных моделей. В сочетании же с результатами других исследователей в этом направлении данные результаты позволяют получать достаточно полную картину по вычислительной сложности классических ***ОС***-моделей. Так, например, в работе [171, ***29;*** с. 210-218] ***А. Хеммерлинг*** представил достаточно интересный обзор работ по *сравнительному* анализу вычислительной сложности классических ***ОС***-моделей и ***d***-мерных машин Тьюринга $(d \geq 1)$. Однако по сравнению с теорией последовательных формальных алгоритмов, теория параллельных вычислительных ***ОС***-моделей не является столь продвинутой. В следующей главе вопросы сложности ***ОС***-моделей будут рассмотрены в совершенно ином аспекте, характеризующем свойства моделей не на уровне общего для них $C(A,d,\phi)$-множества *конечных* ***КФ***, а на уровне определяемых ими глобальных функций перехода, позволяя дифференцировать сами ***ОС***-модели.

6.6. Программное обеспечение и аппаратура для симулирования классических ОС-моделей

Несмотря на чрезвычайно простое понятие *классических однородных структур*, они имеют, вообще говоря, довольно сложную динамику. Во многих случаях теоретическое исследование ***ОС***-динамики сталкивается с достаточно существенными затруднениями. Поэтому, компьютерное симулирование ***ОС***-моделей, которое позволяет опытным путем исследовать их динамику – чрезвычайно мощный инструмент. В настоящее время,

проблема компьютерного симулирования ***ОС-***моделей решается на *двух* основных уровнях, а именно**: *(1)*** программное обеспечение, которое симулирует ***ОС-***динамику на вычислительных системах традиционной архитектуры, и **(2)** аппаратная архитектура, которая *максимально* соответствует ***ОС-***моделям, так называемая ***ОС-***ориентированная архитектура вычислительных систем. Компьютерное симулирование ***ОС-***моделей играет существенную роль при теоретических исследованиях их динамики, но еще более важно оно при практических реализациях ***ОС-***моделей различных процессов. К настоящему времени разработано немало весьма интересных систем программного обеспечения и оборудования в помощь исследователям ***ОС-***моделей [536].

Программные средства симулирования ОС-моделей. ***Фон Нейман*** и ***С. Улам,*** пожалуй, были первыми, осознавшие возможности компьютерного моделирования и симулирования. В частности, ***С. Улам*** рассматривал эвристическое использование компьютеров во многих различных случаях. Очевидно, ***С. Улам, Дж. Холладей*** и ***Р. Шрандт*** явились пионерами эффективного компьютерного симулирования ***ОС-***подобных моделей [431-434]. Эти ранние исследования динамики ***ОС-***подобных моделей основывались на двух видах конфигураций, а именно. Самые простые конфигурации, наблюдаемые в целом ряде естественных ***ОС-***систем **(***кристаллы***,** *органические молекулы и т.д.***),** являются периодическими, и их свойства весьма широко изучались математически**.** Используемые правила приводят к намного более сложной и в общем случае непериодической динамике конфигураций, свойства которой более трудно установить математически несмотря на относительную простоту заданных рекурсивных отношений. Вышеупомянутые авторы использовали мощные компьютеры в Лос-Аламосской научной лаборатория ***(USA)*** для генерации большого числа таких конфигураций и рассмотрели некоторые свойства их морфологии во времени и пространстве. Большинство результатов в этом направлении являются эмпирическими по природе и пока имеется довольно немного общих свойств, которые могут быть получены теоретически. Подобная картина имеет место и для ***ОС-***моделей в целом, поэтому компьютерное симулирование и моделирование становится одним из основных исследовательских методов в ***ТОС-***проблематике и связанных с ней сугубо прикладных направлениях [536].

Последующий этап в развитии компьютерного подхода к исследованию ***ОС-***подобных моделей восходит к ***Logic of Computer Group*** Мичиганского университета ***(USA),*** в которой была разработана первая аппаратно-программная система для эвристического исследования ***ОС-***моделей [128]. Р***. Брендер*** [174] был, вероятно, первым, кто разработал систему программирования для симулирования ***ОС-***моделей. Последующее развитие компьютерного модельного подхода характеризуется созданием большого количества программных средств различного характера для симулирования и эмпирического изучения различных динамических аспектов ***ОС-***моделей. В частности, в наших работах [8,9,15,19,20,54-56,90,94,98,103,118] представлен ряд программ в среде различных языков программирования и различных компьютерных платформ. Средства математического пакета ***Mathematica*** [93] поддерживают алгебраические правила подстановок, которые очень легко моделируют локальные функции перехода классических ***1-ОС.*** В этом контексте довольно много интересных программ для симуляция ***ОС-***моделей в среде пакета ***Mathematica*** могут быть найдены, например, в книге [167].

В качестве примера представим простую процедуру ***CA_HS_1D(Co,n,R,P,H,LF),*** которая выполняется в среде известного математического пакета ***Maple*** [101-118]. Эта процедура имеет шесть формальных аргументов, позволяя симулировать динамику классических бинарных ***1-ОС*** с произвольным индексом соседства**.** Первые четыре аргумента определяют начальную бинарную конфигурацию ***(Co),*** размер шаблона соседства ***(n),*** определяющий номер ***1-ОС (R)*** и число итераций ***(P).*** Тогда как через два последних аргумента ***H*** и ***LF*** соответственно возвращаются последовательность конфигурации **(***история***)** и

локальная функция перехода заданной ***1-OC***. Начальная конфигурация определяется бинарной строкой, например ***Co:= «1011001100101»***. Размер шаблона соседства должен быть ***≥ 2***, а его значение ограничено размером доступной компьютерной памяти. ***Определяющие*** номера ***1-OC*** мы поясним следующей таблицей, представляющей множество локальных функций перехода ***127*** бинарных ***1-OC*** с индексом соседства Неймана-Мура

$000 \Rightarrow 0$	$000 \Rightarrow 0$	$000 \Rightarrow 0$	$000 \Rightarrow 0$	…..	$000 \Rightarrow 0$ …..	$000 \Rightarrow 0$
$001 \Rightarrow 0$	$001 \Rightarrow 0$	$001 \Rightarrow 0$	$001 \Rightarrow 0$	…..	$001 \Rightarrow 1$ …..	$001 \Rightarrow 1$
$010 \Rightarrow 0$	$010 \Rightarrow 0$	$010 \Rightarrow 0$	$010 \Rightarrow 0$	…..	$010 \Rightarrow 1$ …..	$010 \Rightarrow 1$
$011 \Rightarrow 0$	$011 \Rightarrow 0$	$011 \Rightarrow 0$	$011 \Rightarrow 0$	…..	$011 \Rightarrow 0$ …..	$011 \Rightarrow 1$
$100 \Rightarrow 0$	$100 \Rightarrow 0$	$100 \Rightarrow 0$	$100 \Rightarrow 0$	…..	$100 \Rightarrow 0$ …..	$100 \Rightarrow 1$
$101 \Rightarrow 0$	$101 \Rightarrow 0$	$101 \Rightarrow 0$	$101 \Rightarrow 1$	…..	$101 \Rightarrow 0$ …..	$101 \Rightarrow 1$
$110 \Rightarrow 0$	$110 \Rightarrow 1$	$110 \Rightarrow 1$	$110 \Rightarrow 0$	…..	$110 \Rightarrow 1$ …..	$110 \Rightarrow 1$
$111 \Rightarrow 1$	$111 \Rightarrow 0$	$111 \Rightarrow 1$	$111 \Rightarrow 0$	…..	$111 \Rightarrow 1$ …..	$111 \Rightarrow 1$
1	***2***	***3***	***4***	…..	***99*** …..	***127***

При этом, нами рассматриваются только классические ***стабильные OC-***модели, для которых имеет место определяющая параллельная подстановка $000 \Rightarrow 0$. Как говорилось выше, локальная функция перехода *(в частности)* бинарных ***1-OC*** с индексом соседства Неймана-Мура определяется множеством параллельных подстановок, которые *(исключая тривиальный случай)* могут быть пронумерованы целыми числами от ***1*** до ***127***. Таким способом каждая ***OC-***модель данного класса может быть просто охарактеризована как бинарными векторами $[0, b_7, b_6, b_5, b_4, b_3, b_2, b_1]$, так и определяющим номером типа $R=\sum_k b_k 2^{k-1}$ $(b_k \in \{0,1\};\ k=1..8)$. Если ***1-OC*** при вызове процедуры ***CA_HS_1D*** задается ее определяющим номером, то через ***LF-***аргумент возвращается локальная функция перехода в виде вышеуказанного бинарного вектора. Значение ***P-***аргумента определяет число применений *(итераций)* глобальной функции перехода *(определенной соответствующей локальной функцией перехода)*. Наконец, через ***H-***аргумент процедуры возвращается последовательность конфигураций, сгенерированная заданной ***1-OC*** из начальной бинарной конфигурации ***Co***. Однако, ради удобства и вследствие ряда других причин бинарные конфигурации представляются их десятичными эквивалентами, например: конфигурация ***Cf=«11111001111»*** имеет десятичный эквивалент $Cf_d=1999$. Такой подход позволяет интерпретировать произвольную бинарную ***1-OC*** как генератор целых чисел и решать ряд достаточно интересных задач из теории чисел [536].

```
CA_HS_1D:= proc(Co::{string, symbol}, n::integer, R::integer, P::integer, H::evaln, LF::evaln)
local k, k1, k2, C1, C2, G, F, N, L, T, h, p, Con_N, Delta, alpha, psi, rho;
  Con_N := proc(s::{string, symbol})
    local Art, Kr;
      Art := convert(s, 'bytes'); sum((Art[Kr] - 48)*2^(nops(Art) - Kr), Kr = 1 .. nops(Art))
    end proc;
  assign(alpha = 2^n - 1, rho = 2^(2^n - 1) - 1, h = 0, psi = cat(seq("0", k = 1 .. n - 1)));
  T := matrix(rho, alpha, [seq(0, k = 1 .. alpha*rho)]);
  for k to rho do
    Delta:= convert(convert(k, 'binary'), 'symbol');
    for p from length(Delta) by -1 to 1 do
      T[k, alpha - h] := convert(substring(Delta, p), 'decimal', 'hex');
      h:= h + 1
    end do;
    h := 0
  end do;
  if R < 1 or rho < R then error "Definition of local transition function is incorrect"
```

```
  else
    assign(C1 = cat(psi, Co, psi), N = 0, L = Con_N(Co),
      LF = [0, op(convert(linalg[row](T, R), 'list'))]);
    assign(F = [seq(convert(linalg[row](T, R)[k], 'string'), k = 1 .. alpha)], G = [psi = "0"])
  end if;
  for k to alpha do
    G:= [op(G), convert(cat(cat(seq("0", p =1 .. n - length(convert(convert(k, 'binary'),
    'string')))), convert(convert(k, 'binary'), 'string')), 'string') = F[k]]
  end do;
  while N <> P do
    C2 := "";
    for k to length(C1) - 1 do C2 := cat(C2, subs(G, substring(C1, k .. k + n - 1))) end do;
    if Con_N(C2) = 0 then return "Co is vanishing configuration"  end if;
    for k1 to length(C2) do if substring(C2, k1) <> "0" then break end if end do;
    for k2 from length(C2) by -1 to 1 do if substring(C2,k2) <> "0" then break end if end do;
    L := [op(L), Con_N(substring(C2, k1 .. k2))];
    if nops(L) <> nops({op(L)}) then return assign(H=L), L, "CA history is periodical" end if;
    assign('C1' = cat(psi, substring(C2, k1 .. k2), psi), 'N' = N + 1)
  end do;
  assign(H = L), "Density is:",  evalf(nops(L)/(L[nops(L)] - L[1]), 6)
end proc:
```

```
> Co, Period, Infinity, Vanish:= "1",[],[],[]:  for k to 127 do R:= CA_HS_1D(Co,3,k,200,H,LF):
   if R[2]= "CA history is periodical"  then  Period:= [op(Period),k]  elif  R[1]="Density is:"
   then  Infinity:=[op(Infinity),k]  else  Vanish:= [op(Vanish),k]  end if  end do:  Period,
  Infinity, Vanish;
```

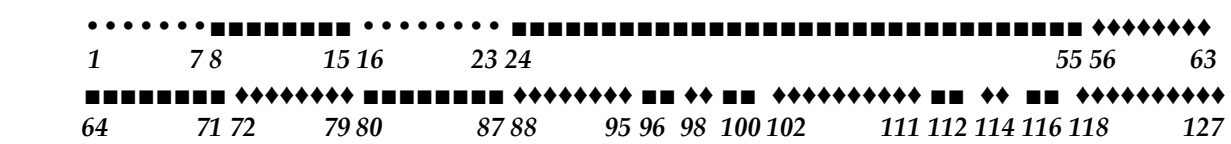
[8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 96, 97, 100, 101, 112, 113, 116, 117], [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 98, 99, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 114, 115, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]

> alpha[period]:= evalf(nops(Period)/127, 2); ⇒ $\alpha_{period} := 0.50$

> beta[infinity]:= evalf(nops(Infinity)/127, 2); ⇒ $\beta_{\infty} := 0.38$

> delta[vanish]:= evalf(nops(Vanish)/127, 2); ⇒ $\delta_{vanish} := 0.12$

Выше представлен исходный текст процедуры ***CA_HS_1D*** на ***Maple-***языке и некоторые примеры ее применения. В частности, процедура использовалась для изучения *динамики* примитивных конфигураций ***Co=«1»*** в бинарных ***1-OC*** с индексом соседства Неймана-Мура, относительно трех аспектов, а именно: ***периодичных, бесконечных*** и ***исчезающих (****нулевых)* конфигураций. Следующая схема весьма четко представляет распределение бинарных ***1-OC*** с индексом соседства Неймана-Мура относительно примитивной начальной конфигурации ***Co=«1»,*** а именно**:**



где **•, ■** и **♦ –** соответственно ***исчезающие, периодические*** и ***бесконечные*** последовательности конфигураций, а числовая шкала обозначает определяющие номера ***ЛФП*** в ***1-OC.***

Исследовали мы и динамику ***1-OC*** с определяющим номером ***105*** относительно генерации простых чисел. На основе экспериментов с процедурой ***CA_HS_1D*** были получены как довольно интересные результаты, так и сформулированы предположения по дина-

мике бинарных ***1-ОС.*** Для понимания организации процедуры вполне достаточно знания основ ***Maple-***языка в объеме, например, наших книг [97-118].

На основе компьютерного симулирования ряда ***ОС-***моделей мы получили немало достаточно интересных результатов по теории классических ***ОС*** и их приложениям в биологии развития. В качестве теоретических могут быть отмечены результаты такие, как: типы взаимно-стираемых конфигураций в классических ***1-ОС,*** некоторые динамические аспекты ***ОС*** с рефрактерностью**,** комбинаторная проблема Штейнгауза и др. [3,4,19, 20,54], тогда как в качестве прикладных можно отметить результаты такие, как: дифференцирование, регуляции и регенерации клеток, проблема французского флага, регуляция осевых структур и т.д. [4,17,26,27,31]. При этом, в вышеупомянутых работах обсуждаются вопросы разработки эффективных программ симулирования ***ОС-***моделей. В работах [212,435,536] также можно найти обсуждение подобных вопросов.

В настоящее время данный экспериментальный подход к исследованию динамики ***ОС-***моделей характеризуется тремя основными направлениями, а именно**:**

(1) разработка специальных языков программирования для обеспечения эффективного погружения в соответствующую вычислительную среду различных типов и общности ***ОС-***моделей наряду с их сугубо практическими реализациями;

(2) разработка программ**,** обеспечивающих компьютерную симуляцию специальных типов ***ОС-***моделей, описывающих те или иные процессы, явления и феномены;

(3) разработка программных систем и комплексов, обеспечивающих компьютерную симуляцию достаточно широкого класса ***ОС-***моделей.

Из средств ***первой*** группы можно отметить следующие программные средства. На наш взгляд, первой из известных нам в данном направлении и практически реализованной является программная система ***Брендера*** для симуляции ***ОС-***моделей [174]. Для симуляции ***ОС*** был создан также ряд интерпретаторов, в частности, ***Фольмара*** [253], ***SIBICA Пехта*** [250] и др**.** Однако более интересными **(***прежде всего с практической точки зрения***)** представляются программные поддержки именно практических реализаций вычислительных систем на базе ***ОС-***моделей в их наиболее чистом виде. Так, для программного обеспечения ***ML-****процессоров* венгерскими исследователями был создан интерактивный язык ***InterCELLAS,*** неплохо приспособленный для симулирования ***ОС-***моделей [243]. С архитектурой ***ML-****процессоров***,** их программной средой можно ознакомиться в [169,175].

В свою очередь, вычислительная ***CAM-****среда* программно поддерживается специальным подмножеством языка ***Forth (CAM Forth),*** обеспечивающим, прежде всего, определение локальных правил перехода. Данная программная среда обеспечивает интерактивный режим работы с ***CAM-***средой**,** погружение в нее исследуемой модели, документирование результатов и т.д. Сюда же непосредственно можно отнести и программу ***CAMEX,*** написанную на языке ***C*** и покрывающую довольно обширную коллекцию ***ОС-***моделей размерностей ***1-3.*** Тогда как ***CAM-***симулятор, созданный в университете ***ELTE (****Венгрия***),** представляет собой программу, симулирующую ***ОС-***модели на базе ***CAM-6.*** На общем уровне как с ***CAM-***машинами, так и с их программной средой можно ознакомиться по прекрасной книге [150]**,** тогда как за деталями рекомендуется обратиться к работам [151, 152,165,376,394,430]. Некоторую общую информацию по ***CAM*** можно найти ниже в разделе ***8.3.*** В упомянутой книге [150] можно также найти описание целого ряда практических ***CAM-***реализаций весьма интересных физических моделей, использующих вышеуказанную программную поддержку. Интересные материалы можно найти и в [536]. Из отечественных разработок в данном направлении можно отметить достаточно интересную универсальную лабораторию клеточных автоматов ***pyCAlab*** [536] на языке ***Python,*** позволяющую несложно конструировать ***ОС-***модели из готовых элементов **(***правила перехода***,** *шаблоны соседства***).** Однако**,** не взирая на удобства для разработчиков**,** системы на этом языке характеризуются низкой производительностью**.** Поэтому авторами планиру-

ется перенос ***pyCAlab*** в среду языка ***C++*** с последующей реализацией системы на основе ***GPGPU-***концепции ***(****вычисления общего назначения на видеоадаптерах****).*** В случае успешной реализации данного проекта можно будет говорить о еще одном довольно интересном средстве симуляции классических ***ОС-***моделей**.**

Язык параллельных подстановок ***(ЯПП)*** может служить примером алгебраического средства для описания и анализа параллельных микропрограмм**.** ***ЯПП*** является лингвистическим формализмом узкого класса вычислительных ***ОС-***моделей, базируясь на понятии *систем параллельных подстановок* ***(СПП),*** которые определяют локальную функцию перехода классических ***ОС-***моделей. В [53] мы показали, что проблема непротиворечивости алгоритмов параллельных подстановок**,** определяемых ***СПП,*** конструктивно разрешима. Этот результат позволил получить ряд интересных выводов**,** включая прикладные для разработки некоторых управляющих микропрограммных систем [54,88,90,536].

Представляет интерес язык программирования ***ARCAL,*** разработанный ***Д. Мэйдвилом*** и поддерживающий эффективную работу, практически, на любого типа микропроцессоре или универсальном компьютере. Это особенно хорошо подходит для широко доступных ***ПК.*** Между тем, наряду с простотой ***ARCAL*** является низкоуровневым языком и его можно рассматривать в качестве «*машинного*» языка ***ОС-***моделей**.** Для компиляции и выполнения ***ARCAL-***программ в среде ***Windows*** предназначен ***SARCASim-***симулятор.

Очевидно, ***ОС – модели*** децентрализованных систем высокопараллельной обработки. В таких системах упорядоченные конфигурации могут возникать без централизованного управления. На основе известного языка программирования ***Logo*** была создана параллельная версия языка ***Logo – StarLogo,*** который является программной средой моделирования процессов функционирования децентрализованных систем [437,536]**.** С языком ***StarLogo*** получаем возможность довольно эффективно моделировать многие явления реальной жизни**.** ***StarLogo*** особо подходит как для симулирования различных моделей искусственной жизни, так и для симулирования различного типа ***ОС-***моделей.

Итальянскими исследователями был создан высокоуровневый язык программирования ***CARPET (C****ellul****AR P****rogramming E****nvironmen****T),*** базирующийся на ***C-***языке с целым рядом дополнительных конструкций для описания локальных функций перехода единичного автомата клеточной среды [428]. Язык обеспечивает довольно эффективную поддержку параллельной обработки информации в вычислительных ***ОС-***моделях. Как достаточно интересное программное обеспечение симулирования ***ОС-***моделей выступает и ***Cellang (Cel****lular Automata programming* ***lang****uage),* созданный ***Д. Эккертом*** [436]. Язык программирования ***Cellang –*** *специализированный* язык для программирования довольно широкого класса ***ОС-***моделей. Язык является весьма небольшим и простым. ***Cellang*** предназначен как способствовать привлечению университетских студентов к миру ***ОС-***моделей, так и в качестве языка описания таких систем при их изучении и исследовании. ***Cellang*** в настоящее время поддерживает платформы ***Unix*** и ***Windows.*** На наш взгляд, ***Cellang –*** достаточно полезная система программирования, ориентируемая на ***ОС-***проблематику в первую очередь**.** Используя систему ***Cellang,*** возможно за относительно короткий срок и со значительно меньшими затруднениями решать немало важных как теоретических, так и прикладных проблем компьютерного ***ОС-***симулирования [536].

CxC – простой параллельный язык для инженеров и ученых**,** предназначенный для описания, макетирования и выполнения научных алгоритмов на ***ПК*** либо лаптопе на платформе ***Windows/Linux,*** а также на супер-ЭВМ или супермощных кластерах с линейным ускорением и неограниченной расширяемостью на платформе ***Linux*** и ряде ***Unix.*** Язык ***CxC*** позволяет упростить моделирование большого числа взаимосвязанных элементов, их параллельной динамики и взаимодействий**;** поддерживается компилятором ***CxC****™****,*** разработанным *Engineered Intelligence Corp***.** Его применения включают такие области как:

клеточные автоматы ***(OC-**модели)*, искусственные нейронные сети, гидрогазодинамика, динамика частиц и другие численные приложения в целом ряде областей [536].

Из других достаточно интересных языков программирования ***OC-***моделей можно отметить такие как ***CEPROL*** [438], ***CELIP*** [439], ***CAL*** [440] и др. Вышеуказанное программное обеспечение предназначено для эмпирического исследования целого ряда динамических аспектов классических ***OC-***моделей. С его помощью было установлено немало весьма интересных результатов как теоретического, так и прикладного характера. Наш немалый опыт, полученный в процессе как создания, так и эксплуатации программного обеспечения вышеуказанного типа позволили сформулировать общую концепцию *интерактивной программной системы* ***(SVEGAL)*** для симулирования ***OC-***моделей довольно широкого набора типов [78,85]. К сожалению, как по субъективным, так и по объективным причинам данная система осталась лишь на уровне эскизного проекта [88,441-442]. Определенный интерес представляет ***CDL-***язык для клеточной обработки, а также язык ***ALPACA*** описания ***OC-***моделей. Язык программирования ***RW1*** изначально создавался для программирования боевых роботов. Для упорядочивания разнообразных применений языка ***RW1*** предлагается четыре направления, называемых *виртуальными платформами*. Каждая из них определяется способом работы с графикой и своей спецификой. В частности, ***RW1P2 –*** платформа для реализации клеточных игр. В ее среде можно запрограммировать довольно-таки широкий класс задач, включая ***OC-***модели [536].

Вторая группа средств на сегодня наиболее многочисленна и позволяет экспериментально исследовать и удобно визуализировать требуемые динамические свойства той или иной ***OC-***модели конкретного назначения. Большинство из средств данной группы служат для симуляции известной игры «***Жизнь (Life)***» либо ее различных модификаций и обобщений. Игра «***Life***» **–** вероятно самый популярный пример ***OC-***модели, а также весьма хороший объект для компьютерного симулирования [5,168,172,239,444,536]. В частности, программа ***Life32 Дж. Бонтеса*** выполняется на платформе ***Windows*** и, по нашему мнению, является лучшей программой для ***32-***разрядной ***Windows.*** Программа ***Дж. Харпера WinLife*** является, вероятно, лучшей полной ***Windows-***программой для «***Life***». Наконец, ***LifeLab A. Треворова*** выполняется на ***Mac,*** являясь весьма развитой. Она автоматически обнаруживает глайдеры, осцилляторы, поддерживает простое редактирование и автоматический поиск новых конфигураций. Тематика игры «***Life***» достаточно обширна, заинтересованный читатель может получить о ней довольно полную информацию в [536] и в интернете по ключевой фразе «***Conway's Game of Life***».

Целый ряд исследователей использовали для экспериментального исследования ***TOC-***проблематики интересные программы, из которых можно отметить представленные в работах [280,329,446,447]. В качестве простых симуляторов ***OC-***моделей можно отметить такие, как ***CALAB, CAPOW, LCAU*** и др. [366]. Недавно компания ***Mandriva*** объявила о готовности операционной системы ***Mandriva Linux 2008.*** В составе ее дистрибутива много интересных приложений. В частности, в систему включен ряд программных средств для работы с ***OC-***моделями. Мы также подобно ряду других авторов использовали специальные программы, разработанные в среде таких языков программирования как ***C+, Basic, Pascal*** и ***Reduce,*** а также в среде хорошо известных систем компьютерной алгебры ***Mathematica*** и ***Maple*** с целью эмпирического исследования конкретных динамических и прикладных аспектов ***OC-***моделей [8,9,11,15,54-56,96,102,112,118,536]. В частности, ряд процедур для исследования некоторых специальных аспектов динамики классических ***OC-***моделей включен и в нашу ***Библиотеку*** программных средств для математического пакета ***Maple,*** которая доступна для свободной загрузки [545].

Наконец, средства ***третьей*** группы обеспечивают компьютерную симуляцию достаточно широкого класса ***OC-***моделей. Здесь можно отметить интересный симулятор ***MCell Войтовича*** [448], ориентированный на довольно широкий круг типов ***OC-***моделей раз-

мерностей ***1*** и ***2***. Данное программное обеспечение поставляется бесплатно совместно с большой библиотекой типов поддерживаемых ***OC***-моделей, локальных функций перехода и оригинальных конфигураций. Симулятор ***MCell*** открыт для расширения, программисты могут добавлять новые правила, программируя их как внешние ***DLL***. ***MCell*** имеет достаточно простой и дружелюбный интерфейс. ***MJCell – Java*** апплет, позволяющий использовать более ***300*** функций перехода ***OC***-моделей с более, чем ***1400*** конфигурациями. Он позволяет использовать функции перехода ***13*** видов ***OC***-моделей наряду с рядом видов, определенных пользовательскими ***DLL***. Апплет позволяет также экспериментировать с собственными функциями перехода. ***MJCell*** - упрощенная версия ***MCell***. Она не допускает расширений среды ***MCell***, однако его использование не ограничено ***Windows***-платформой. Из других симуляторов подобного типа можно отметить такие, как ***CelLab*** [449], ***SARCASim*** [450], ***CASE*** [451] и др. Определенный интерес представляет и симулирующая динамику ***OC***-моделей программа ***SRCA***, поддерживающая целый ряд достаточно сложных локальных функций перехода ***OC***-модели, характеируемых большим алфавитом внутренних состояний единичного автомата ***(≥2^{32})***. Данные функции обеспечивают необходимую динамику конфигураций, включая феномен самовоспроизведения конечных конфигураций [536]. Довольно интересным представляется и интерактивный генератор динамики классических ***1-OC***, реализованный в среде ***C++ К. МакДермотом*** [536]. Достаточно простой апплет [536] представляет собой ***OC***-модель с рефрактерностью, симулирующий сердечную активность; при этом, отрезок времени, в котором каждый единичный автомат находится в текущем состоянии, так же как размер ***ШС*** и порога активации, являются настраиваемыми параметрами. Определенный интерес представляет и ***Java***-аплет ***CAOS М. Шеллера***, обеспечивающий симулирование ***1-OC*** [536]. Программа «***Visions Of Chaos***», созданная ***Я. Рампе***, позволяет генерировать фракталы, ***OC***-динамику, аттракторы и некоторую другую ***хаос***-подобную динамику. ***Dr.Cell –*** программа симулирования ***OC***-моделей, реализованная на языке программирования ***Scheme*** (*диалект* ***Lisp***) и позволяющая симулировать динамику ***1-OC*** и ***2-OC*** с определяемыми пользователем шаблонами соседства и правилами перехода. ***Scheme –*** прозрачный и довольно небольшой, однако достаточно мощный язык, пригодный для использования в качестве универсального языка программирования. Язык разработан для обеспечения различных стратегий реализации, из которых большинство является открытым программным обеспечением. Есть прямые интерпретаторы (*подобные* ***Basic***), компиляторы (*подобные* ***C*** *или* ***Pascal***), а также и компиляторы для мобильной виртуальной машины (*подобные* ***Java***). Вполне определенный интерес представляет и программа ***CABuilder*** создания ***3-OC***, тогда как соответствующая ей программа ***CAReader*** позволяет осуществлять удовлетворительный анализ структур, созданных первой программой. Достаточно полную информацию по указанным средствам можно найти в [536].

X-X. Чоу создал программно-симуляционную систему ***Trend*** & ***jTrend*** для моделирования в ***OC*** процесса ***самовоспроизведения –*** основной компоненты любой живой системы на Земле. Система состоит из двух частей: ***Trend –*** универсальная ***OC***-среда моделирования с интегрированным компилятором с языка высокого уровня, весьма дружелюбным пользовательским графическим интерфейсом и быстрым кэшированным механизмом симулирования. Так как симулятор гибок по отношению к размерам клеточного пространства, клеточным структурам, шаблонам соседства и правилам перехода единичных автоматов, то ***Trend*** может моделировать почти все ***1-OC*** и ***2-OC***. Он также имеет достаточно развитую возможность отслеживания динамики ***OC***-модели в обратном порядке. Возможно, ***Trend –*** один из наиболее удобных симуляторов ***2-OC***, тогда как вторая часть системы ***jTrend*** является ***Java***-симулятором, наследующим все основные черты ***Trend***. С описанием отмеченных и целого ряда других достаточно интересных ***OC***-симуляторов можно ознакомиться в [452-454,536], значительная их часть распространяется бесплатно.

Интересным представляется и пакет ***(CAT – Cellular Automaton Tool)***, созданный в Институте проблемно-ориентированного программного обеспечения и технологии (*Германия*). Пакет функционирует на операционных платформах ***Windows 3.1, Windows*** для ***Workgroups 3.x, Windows NT*** или ***OS/2 2.1***. Основными целями пакета являлись получение средств для изучения некоторых особенностей парадигмы программирования на параллельных компьютерах на основе ***OC***-модели. При этом, каждая ячейка ***OC***-модели имитирует независимый процессор параллельного компьютера. ***CAT*** служит также в качестве достаточно удобного в работе инструмента для создания ***OC***-моделей [536].

Для эмпирического исследования ***OC***-моделей определенный интерес может представить пакет ***DDLab –*** интерактивная графическая программа для исследования динамики конечных бинарных сетей: от бинарных ***OC***-моделей до вероятностных булевых сетей. ***DDLab*** подходит для исследования сложности, нейронных сетей и аспектов теоретической биологии. Кстати, сеть может быть определена с любой архитектурой от ***OC***-моделей до вероятностных булевых сетей с произвольными связями и неоднородными функциями перехода. При этом, булева сеть либо ***OC***-модель может иметь размерность ***1..3*** и неоднородные размеры шаблона соседства. В процессе выполнения ***DDLab*** имеет возможность вычислять как глобальную динамику сетей, так и традиционную последовательную динамику (*историю*) конфигурациям. Для глобальной динамики есть возможность обратного выполнения для генерации конфигураций-*предшественников*. В частности, можно получать все множество неконструируемых конфигураций (*в нашей терминологии*). С рядом как типичных, так и специальных приложений системы ***DDLab*** для исследования сетей, бинарных ***OC***-моделей и связанных с ними вопросов можно ознакомиться в [269,279,455,456]. Версии ***DDLab*** функционируют на платформах ***Linux/PC, DOS-PC, Mac*** и ***UNIX/Xwindows/Sun*** [484,536].

Достаточно интересным для исследования и изучения ***OC***-моделей представляется нам программный пакет ***JFLAP***, созданный в ***1990*** и ныне развиваемый под руководством ***С. Роджер. JFLAP –*** программное обеспечение для экспериментирования с такими формальными автоматами и грамматиками, как многоленточные машины Тьюринга, недетерминированные конечные автоматы, недетерминированные автоматы с магазинной памятью, некоторые типы грамматик, синтаксического анализа и ***L***-систем [536].

Для изучения проблем *фрактальной* геометрии группой ***Stone Soup*** (*Канада*) была создана программа ***Fractint*** [457], представляющая собой генератор фракталов и поддерживающая платформы ***Ms-Dos, Windows, Unix*** и ***Mac***. Это – наиболее универсальная фрактальная программа среди программного обеспечения подобного типа. Насколько нам известно, это, пожалуй, наилучший на сегодня фрактальный генератор. Немало весьма интересных проблем фрактальной геометрии было исследовано с помощью ***Fractint***. В частности, ***В. МакУортер*** создал весьма неплохую обучающую программу для ***L***-систем, используя программу ***Fractint***. Согласно предположению, что ***L***-системы и ***OC***-модели во многих отношениях являются весьма похожими, мы уверены, что немало исследователей ***OC***-моделей найдет программу ***Fractint*** достаточно интересным средством. Наш опыт в этом отношении говорит в пользу данного предположения.

В курсе лекций [458] рассмотрены практические методы и основные камни преткновения при создании компьютерных симулирований таких объектов, как ***OC***-модели и сети. Основной процесс модельной конструкции, симулирования и анализа проиллюстрирован рядом интересных практических примеров. Кроме того, лекция представляет концепцию и стратегию компьютерного симулирования, представляющего экспериментальные наблюдения, теоретические модели, а также их логические следствия. Целый ряд представленных в ней соображений могут оказаться достаточно полезными, прежде всего, авторам создаваемых симулирующих средств для различных ***OC***-моделей.

Подобный эмпирический подход к исследованию ***ОС-***моделей не позволяет, естественно, получать строгие математические результаты, однако дает возможность не столько получать вполне конкретные результаты, сколько позволяет сформулировать довольно интересные для дальнейших исследований предположения и гипотезы**.** Для простых же типов ***ОС-***моделей на этом пути удается получать даже вполне исчерпывающие ответы относительно тех либо иных динамических свойств путем перебора всех возможных вариантов, например**,** для бинарных ***1-ОС*** с достаточно простыми индексами соседства**.** Однако и в этом случае требуются достаточно производительные компьютеры.

Новый подход к компьютерному симулированию ***ОС-***подобных моделей состоит в создании для их описания эффективных лингвистических средств **–** высокопараллельных языков программирования. Но в данном направлении возникают достаточно сложные проблемы как организации**,** так и описания параллельной обработки в ***ОС-***моделях**,** которые могут быть ориентировочно распределены на три общих класса, а именно**:**

- ***параллелизм на уровне одновременного выполнения множества различных задач;***
- ***параллелизм на уровне одновременного выполнения отдельных частей и/или операций одного и того же алгоритма;***
- ***различного уровня сочетания обоих типов параллелизма.***

ОС-модели допускают все три уровня параллелизма, но в их реализации возникают затруднения различной сложности по следующим направлениям, а именно**:**

- ***синхронизация параллельных процессов;***
- ***сложность подготовки алгоритмов для реализации в вычислительной ОС-модели;***
- ***сложность параллельного программирования;***
- ***количество требуемых ресурсов (число элементарных автоматов ОС-модели);***
- ***сокращение времени (за счет увеличения требуемых ресурсов ОС-модели).***

Далее, не вдаваясь в детали, мы обсудим эти аспекты относительно двух ***первых*** классов *параллелизма***.** Интуитивно проблемы синхронизации в случае ***второго*** класса представляются более сложными из-за функциональной связи отдельных частей того же самого алгоритма. Сложность подготовки алгоритма для реализации его в *однородной вычислительной среде* ***(ОВС)*** определяется сложностью так называемой процедуры «***распараллеливания***» последовательных алгоритмов. Эта процедура достаточно сложна даже просто потому, что мы должны пересмотреть ***(****прежде всего для себя самих****)*** последовательный подход к вычислениям сам по себе, который формировался в течение длительной истории человечества. А ломка традиций, как известно, влечет весьма большие сложности.

Даже простой пример типа распараллеливания алгоритма матричного умножения, которое позволяет делать это легко, вызывает в большинстве случаев большие трудности, связанные с традиционностью последовательного мышления. Таким образом, переход к параллельным вычислениям требует серьезного пересмотра многих наших традиционных подходов к вычислениям. С другой стороны, сложность процедуры распараллеливания определяется, естественно, также непосредственно внутренними специфическими особенностями алгоритма. Много интересных примеров распараллеливания представлено в многочисленных работах, например, [11,12,15,36,40,48,49,54,202,357,459-462]. Целый ряд весьма интересных вопросов по сложности распараллеливания алгоритмов, включая в вычислительных ***ОС-***моделях, обсуждается в работах [465,466], а также в ряде статей и трудов конференций [463-467,536].

Сложность программирования параллельных алгоритмов *первого* класса довольно близка и к сложности средств распараллеливания**,** встроенных в ряд известных языков программирования. С другой стороны, современные языки программирования не располагают какими-либо удобными средствами для представления параллельных алгоритмов

из *второго класса*. Вследствие чего возникает необходимость разработки языков программирования, позволяющих наиболее эффективно описывать подобные алгоритмы.

Здесь было бы вполне уместным, на наш взгляд, упомянуть следующий момент. Ввиду устойчивости традиций последовательного мышления маловероятно, что мы сразу же найдем самое подходящее решение данной проблемы. Поэтому, следующее предложение заслуживает особого внимания. Прежде всего, анализируется большое количество распараллеливаемых алгоритмов, чтобы установить общие объективные закономерности в их структуре и взаимосвязях их отдельных частей. Даже такая работа позволит обнаружить ряд объективных закономерностей, которые впоследствии смогут послужить основанием модели языка для параллельного программирования. По нашему мнению, такая модель должна учесть следующие важные аспекты, а именно:

♦ автоматическое затребование дополнительных вычислительных ресурсов наряду с наличием возможности частичной трансляции при последовательной обработке в критическом состоянии (*отсутствие требуемых ресурсов*). Данный подход весьма актуален для повышения живучести модели относительно требуемых вычислительных ресурсов.

На основе такой модели мы получаем возможность создавать языки программирования, наиболее приемлемые для описания параллельной обработки. Кроме того, мы предполагаем, что более детальный анализ вышеуказанных общих аспектов параллельной обработки в каждом классе алгоритмов позволит разработать некоторые критерии степеней распараллеливания, позволяя приписать любой алгоритм одной из групп параллелизма, и на основе данной информации формировать процесс обработки его в ***ОВС***.

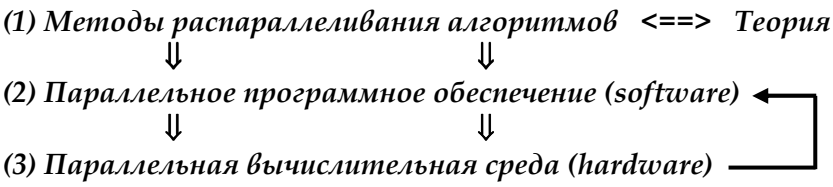
Поэтому существует весьма настоятельная потребность разработки теории параллельных алгоритмов, которая несомненно должна включить анализ степени параллелизма. Интересно также определить классы задач, с различной эффективностью решаемые в ***ОВС (ОС-моделях)***. При этом, теория параллельных алгоритмов должна включать два общих аспекта: ***теоретический*** и ***прикладной***. Теоретический аспект включает, вообще говоря, изучение возможностей и свойств параллельных алгоритмов, которые являются строго присущими параллелизму, а в более широком смысле феномены параллельной и последовательной обработки информации не касающиеся, на самом деле, самой сути вычислений. Тогда как прикладной аспект должен состоять в разработке (*универсальных и специальных*) процедур распараллеливания реальных алгоритмов, методики распараллеливания, вопросов реализации в ***ОВС*** конкретных параллельных алгоритмов и т. д. Следовательно, теория параллельных алгоритмов должна иметь структуру, в значительной мере аналогичную структуре теории последовательных алгоритмов. Теоретические аспекты параллельных алгоритмов изучены несколько лучше [202,356,365,372,470-474], тогда как работа по прикладным аспектам находится в значительной степени в стадии становления. Эта область довольно быстро развивается, и много новых приложений обнаруживают пересечения с целым рядом важных научных дисциплин [202,353,356-358, 361-363,367,373,460-463,475,476,536].

Успех в этом направлении в значительной степени определит эффективность прикладной разработки и вычислительных ***ОС***-моделей. В данной связи необходимо обратить внимание на следующий момент. Действительно, производительность ***ОС***-моделей не имеет теоретического предела из-за параллельной обработки и возможности неограниченного наращивания требуемых ресурсов в виде единичных автоматов, тогда как скорость выполнения каждого конкретного алгоритма и имеет собственный более низкий предел, который зависит от таких общих параметров как степень распараллеливания и временные характеристики используемых вычислительных ресурсов.

Временной ***предел*** вычислительных ресурсов определяется физическими свойствами материалов и максимальной скоростью v передачи информации в среде ($v < c$, *где* c – *универсальная константа – скорость света в вакууме*). Степень распараллеливания произволь-

ных алгоритмов лежит в весьма широком диапазоне и, скорей всего, предельные границы этого диапазона достаточно неопределенны, ибо не существует как действительно параллельных алгоритмов, так и действительно последовательных за исключением тривиальных. Исследование спектра распараллеливания поможет сформировать один из основных компонентов теоретических и прикладных аспектов теории параллельных алгоритмов. Таким образом, разработанная теория параллельных алгоритмов позволит, в частности, определить временные возможности моделей параллельных компьютеров.

Так как параллельные алгоритмы (*которые сами по себе не добавляют ничего нового к самой сущности вычислений*) позволяют реализовывать эффективные во *временном* отношении системы обработки информации, то мы можем придти к выводу о необходимости практической тенденции основных теоретических результатов в данном направлении. Системы, основывающиеся на параллельных формальных вычислительных моделях, должны учитывать следующие три основных структурных уровня, а именно:



Наряду с этим, для создания наиболее эффективных *систем параллельной обработки информации* (***СПОИ***) необходимо, на наш взгляд, разрабатывать каждый уровень с учетом требований предыдущего уровня в соответствии с данной иерархией уровней. В вышеуказанной схеме ***первый*** уровень представляет собственно *параллельную алгоритмизацию* (*процесс распараллеливания последовательного алгоритма*). Тогда как ***второй*** уровень представляет набор алгоритмических языков для описания параллельных процессов. Такие языки базируются как на традиционных языках программирования (*например*, ***Fortran, Pascal, C, Ada, PL/1*** *и др.*) со вставленными средствами распараллеливания, так и на новых лингвистических средствах, априори ориентируемых на параллельную обработку. Наконец, на ***третьем*** уровне мы имеем дело с параллельными аппаратными средствами, которые основаны на некоторой формальной параллельной вычислительной модели, включая ***ОС-***модели либо другие модели так называемого *массивного* параллелизма. Кроме того, выбранная модель параллельных аппаратных средств представляет на рассмотрение вполне определенные требования к собственно *лингвистическим* средствам – *параллельным* языкам программирования, как это отмечается в вышеупомянутой структурной схеме параллельной обработки информации и вычислений [5,54-56,88,90,536].

Таким образом, формальная параллельная вычислительная модель требует *специализированных* лингвистических средств, которые должны описывать с максимальной эффективностью допускаемый моделью уровень распараллеливания вычислений либо обработки в целом. Лингвистические средства для современных *коммерческих* параллельных вычислительных систем, основанных на *различных* формальных вычислительных моделях (*исключая* ***ОС-****подобные модели*), а также перспективы их развития рассматриваются достаточно подробно в работах [5,11,12,36,94-96,369,477-482,536].

В настоящее время во многих странах проводится интенсивная работа по проблематике параллельной обработки и параллельных алгоритмов. Современное состояние этих разработок вместе с попытками их систематизации представлено в ряде трудов конференций, книг, статей и др. [477-482,536]. Так, сборник [461] представляет всесторонний обзор недавних разработок в весьма быстрорастущей и изменяющейся области параллельных алгоритмов. Он охватывает основные разделы тематики такие, как модели и механизмы параллельных компьютеров, дискретные и комбинаторные алгоритмы, математические статьи по распараллеливающим компиляторам, параллельные алгорит-

мы для матричных вычислений, дифференциальные уравнения, генерация псевдослучайных чисел, а также новые параллельные компьютерные системы и их программное обеспечение. Книга [462] охватывает основные элементы параллельной обработки и параллельных алгоритмов. Она уникальна тем, что самодостаточна и охватывает все фундаментальное о параллельной обработке информации – от компьютерной архитектуры до параллельного программирования и параллельных алгоритмов. Книга может послужить хорошим справочником для профессионалов, интересующихся всеми этапами параллельной обработки и параллельного программирования. Наши книги [94-96] (*раздел «Языки параллельного программирования»*) предназначены для новичков в параллельном программировании, но также могут представить довольно полезный материал для профессионалов, интересующихся всеми этапами параллельного программирования.

В настоящее время мы имеем достаточно много аппаратно-программных систем, предназначеных для параллельной обработки. Эти системы используют как различную параллельную аппаратную архитектуру, так и параллельное программное обеспечение (*как системное, так и прикладное*) [11,12,13,48-50,52,353,356-359,361-363,365,367,369,372,373, 460-462,470,471,473,474]. Так, в наших работах [42,52] представлена ***П**араллельная **С**истема **О**бработки **И**нформации* (***ПСОИ***) и ***П**араллельная **У**правляющая **С**истема* (***ПУС***) для ***ОВС*** и показано, что на основе данных систем *информационное распараллеливание* позволяет создавать системы обработки данных высокой эффективности вплоть до систем с прямым экономичным эффектом. В работе [51] мы представили описание ***ПУС*** в терминах систем алгоритмических алгебр. Это представление основано на автоматной модели ***ПУС*** и позволяет использовать системы алгоритмических алгебр для оптимизации программного обеспечения ***ПУС***. При этом, вышеуказанные работы на самом общем уровне использовали ***ОС***-концепцию в качестве формальной параллельной модели вычислений. Однако, ряд параллельного программного обеспечения использует параллельные алгоритмы, присущие именно вычислительным ***ОС***-моделям. Например, вышеупомянутая ***ПУС*** использует ряд параллельных алгоритмов, присущих биологической ***ОС***-модели [26] и которые основаны на принципе ***глобально-локального*** действия [23]. Достаточно интересный подход к использованию высокопараллельных ***ОС***-алгоритмов может быть найден в [459]. В настоящее время имеется ряд параллельного программного обеспечения, ориентируемого на различные архитектуры параллельных аппаратных средств. К настоящему времени имеется также ряд *высокопараллельных* языков программирования, ориентируемых, прежде всего, на вычислительные ***ОС***-модели. Эти языки формируют как лингвистические, так и исследовательские инструментальные средства для довольно широкого класса ***ОС***-моделей [241,243,250,428,438-440,453,483,536].

Практическая реализация вычислительных ОС-моделей. Группа венгерских исследователей, возглавляемая ***Т. Легенди***, в процессе работы по клеточным процессорам существенно упростила и модифицировала клеточную модель ***Дж. фон Неймана*** и его последователей [124,128,169,170,175,288-291]. Дальнейшие исследования в этом направлении привели их к созданию практических реализаций вычислительной ***ОС***-модели в виде так называемых «клеточных процессоров Легенди», а затем и клеточных ***ML***-сопроцессоров для ***IBM***-совместимых ***ПК*** [171,175]. Многолетнее сотрудничество исследовательских групп ***Т. Легенди*** (*Венгрия*) и ***Р. Фольмара*** (*Германия*) способствовало созданию как работающих моделей клеточных процессоров, так и их удовлетворительной теоретической проработке, включая создание компьютерных симулирующих средств системного и прикладного параллельного программного обеспечения. В рамках совместной деятельности по указанной проблематике проводился целый ряд известных международных ***PARCELLA***-конференций, издавались сборники трудов [156,165,179,308,536].

В трудах ***PARCELLA*** [464-467] представлен целый ряд интересных результатов и по конкретным вычислительным архитектурам, и по отдельным устройства, основывающимся

на ***ОС-***моделях**.** Представленные здесь работы охватывают чрезвычайно широкий круг, прежде всего, прикладных вопросов ***ОС-***моделей, а именно: клеточная диагностика, самоконтролируемые элементарные процессоры в регулярных матрицах, надежные сети для булевых функций небольшой сложности, быстрые параллельные алгоритмы в систолических массивах, модульные высокопараллельные вычисления и архитектуры, фундаментальные исследования по клеточной обработке, конвейерные автоматы как модель для нециклических систолических систем, параллельные алгоритмы в обработке изображений, параллельное микропрограммирование, ***ОС-***методика в параллельной архитектуре ***VLSI*****,** параллельная клеточная память**,** массивы микропроцессоров и др**.** Из отечественных практических разработок по реализации вычислительных ***ОС-***моделей можно отметить результаты групп исследователей из Новосибирска, С-Петербурга, Таганрога, Москвы и Кишинева [176-178]**.** Особый интерес представляют здесь достаточно перспективные разработки**,** выполненные в Таганроге под руководством ***А.В. Каляева*** и в Новосибирске под руководством ***О.Л. Бандман.*** Целый ряд достаточно интересных и перспективных разработок в данном направлении сделан и в других странах [536].

Другой довольно интересный и перспективный подход к практической реализации вычислительной ***ОС-***модели предложили ***Т. Тоффоли*** и ***Н. Марголус,*** создав серию так называемых «машин клеточных автоматов» ***(****Cellular Automata Machines* **– *CAM)*** [150-152,165, 318,376]. В настоящее время последней моделью является ***CAM-8*** [165], популярное описание ***CAM-***серии и результатов экспериментов с ними можно найти в прекрасной книге [150]. Практическое применение ***CAM-***моделей оказалось весьма эффективным при моделировании сложных задач гидродинамики**,** экологии и изучении ряда математических свойств ***ОС-***моделей**,** обработки образов**,** физического моделирования**,** получения специальных эффектов и целого ряда др. [166,366,384,392,394]**.** Серия ***CAM*** вывела ***ТОС-***проблематику на качественно новый уникальный уровень**,** дополнив формальные ***ОС-***модели их *прямыми* вычислительными аналогами**.** Это обстоятельство позволяет весьма существенно расширять прикладную модельную ***ТОС-***проблематику по многим направлениям**.** Несколько детальнее ***ML-***сопроцессоры и ***CAM*** представлены в разделе ***8.3*****.**

К настоящему времени имеется целый ряд других весьма интересных практических реализаций вычислительных ***ОС-***моделей, из которых отметим лишь некоторые [410,436, 485-495]**.** В частности**,** в [486] авторы обсуждают принципы ***ОС-***моделей и весьма детально представляют разработку расширяемой машины с программой решения лабиринтной задачи. Обилие материала по прикладной тематике вычислительных ***ОС-***моделей не позволяет дать их сколько-нибудь удовлетворительный анализ**.** Заинтересованному читателю рекомендуются труды таких конференций, как [360-363,473,476,479,480,493] и им подобных, а также в различных журналах соответствующей тематики [371,536]. Ввиду больших успехов микроэлектроники и перспектив нанотехнологий ряд авторов уже сейчас предлагают практические подходы к реализации сверхбольших интегральных схем на основе концепции ***ОС-***моделей**,** которые могут быть разработаны в ближайшее время**.** В связи с развитием технологии интегральных схем ***(****где сама специфика производства такова, что там весьма удобно создавать устройства итеративной архитектуры****)*** наряду с новыми подходами к созданию перспетивных архитектур ***ВТ (****квантовые клеточные процессоры, нанокомпьютеры и др.****)*** с широким использованием нанотехнологий интерес к ***ТОС-***проблематике неуклонно растет. ***Клеточная логика*** имеет дело с математическими моделями и техникой для анализа и синтеза цифровых сетей на основе вычислительных ***ОС-***моделей, однако ввиду обширности данной тематики ее рассмотрение выходит за рамки настоящей монографии. В [497,536] представлена наиболее полная библиография по ***ОС-***моделям**,** параллельной обработке информации и связанным с ними темам, включая статьи, книги, труды конференций, научные отчеты, журналы и т.д.

Глава 7. Проблема декомпозиции глобальных функций перехода в классических ОС-моделях

Проблема ***декомпозиции*** *глобальных функций перехода* ***(ГФП)*** в ***ОС-***моделях представляет большой теоретический и прикладной интерес. Основной задачей декомпозиции ***ГФП*** является определение эффективных процедур, позволяющих по заданной ***ГФП*** определять композицию более простых функций, эквивалентную исходной ***ГФП.*** Данная проблема аналогична задаче расчленения сложной системы на более простые подсистемы и представляет большой интерес для многих разделов ***ТОС-***проблематики. В частности, проблема непосредственно примыкает к вышеупомянутой проблеме сложности ***A(X).*** Она имеет самое непосредственное отношение к вопросам конструктивной сложности, играющим весьма важную роль при конкретных реализациях различного рода ***ОС-***моделей. Первые постановка и результаты по проблеме декомпозиции восходят к ***С. Аморозо*** и ***Дж. Эпштейну*** [316], показавшим, в частности, что во множестве всех бинарных ***1-***мерных ***ГФП*** существуют функции, не представимые в виде композиции конечного числа более простых функций того же класса и типа. Используя довольно простую численную процедуру, ***Д. Батлер*** [141,142] показал, что во множестве всех ***d-***мерных ***ГФП*** существуют функции, не представимые в виде так называемой ***минимальной композиции*** конечного числа более простых ***ГФП*** из того же множества функций. В ряде наших работ [3,5,9,53-56] проблема декомпозиции ***ГФП*** получила свое дальнейшее развитие, а полученные по ней результаты позволили рассмотреть ее с ряда новых весьма интересных точек зрения, рассматриваемых несколько ниже.

Прежде всего, проблема декомпозиции в определенной мере относится к проблеме сложности ***ГФП: может ли произвольная ГФП быть представлена композицией конечного числа более простых функций того же класса?*** При этом, будем говорить, что ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***проще*** функции $\tau^{(m)}$ ***(****обе функции одинаковой размерности и определены в одном и том же самом конечном* ***A-****алфавите****)*, если $n < m$. Более того, вышеупомянутые три проблемы в ***ОС-***моделях: ***сложности*** конечных ***КФ, полноты*** для полигенных структур и ***декомпозиции ГФП*** оказываются тесно связанными, представляя во всех своих взаимосвязях достаточно обширную и перспективную область исследований [5,8,9,54-56,88,90,536].

Наши первые результаты, относящиеся к проблеме декомпозиции, базировались на более ранних результатах по неконструируемости в классических структурах и позволили решить данную проблему для случая ***1-ОС*** [41,44]. Основным результатом в данном направлении явилось доказательство существования ***1-***мерных ***ГФП*** с произвольными ***X-***индексом соседства и ***A-***алфавитом внутренних состояний, проблема декомпозиции для которых имеет отрицательное решение. Однако, для дальнейшего обсуждения проблемы декомпозиции ***ГФП*** нам понадобится ряд новых понятий и определений.

<u>Определение 26</u>. Проблема декомпозиции ГФП (d-ПДФ) сводится к вопросу о возможности представления произвольной ГФП $\tau^{(n)}$ ***в виде композиции конечного числа более простых функций того же класса, а именно:***

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)}\,\ldots\ldots\,\tau^{(n_k)} \qquad (n \geq 3;\ n_j < n) \qquad \textbf{(59)}$$

где глобальные функции $\tau^{(n)}$, $\tau^{(n_j)}$ $(j=1..k)$ ***имеют одинаковую размерность и определены в одном и том же A-алфавите внутренних состояний единичного автомата; при этом, для глобальных функций*** $\tau^{(n_j)}$ ***допускаются кратные вхождения в представление*** **(59).**

При этом, сразу же имеет смысл акцентировать наше внимание на кажущемся *(на первый взгляд)* недоразумении, которое может возникнуть из самого факта отрицательного ре-

шения проблемы декомпозиции ***ГФП*** и универсальности ***ОС***-моделей с простейшими индексами соседства. Действительно, произвольная классическая ***d-ОС*** моделируется структурой той же размерности и с простейшим индексом соседства, соответствующий ***ШС*** которого содержит только ***(d+1)*** единичных автоматов. Однако в случае моделирования мы имеем дело, вообще говоря, с различными множествами ***КФ***, на которых действуют моделируемая и моделирующая структуры, тогда как в случае проблемы декомпозиции ***ГФП*** и функции, составляющие ее декомпозицию, действуют на одном и том же ***C(A,d)***-множестве конфигураций и в одном и том же ***A***-алфавите.

Наряду с хорошо известной ***d-ПДФ*** весьма интересно исследовать так называемую ***обобщенную*** проблему декомпозиции ***d***-мерных ***ГФП (d-ОПДФ)***, заключающуюся в вопросе о возможности представления произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в виде композиции (**59**) при условии, что глобальные функции $\tau^{(n_j)}$ представления не связаны обязательным ограничением $(n_j < n)$ $(j=1 .. k)$, допуская знак равенства и исключая тривиальные случаи представления. Таким образом, в случае ***d-ОПДФ*** в представлении (**59**) допускается использование произвольных ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ $(n_j \le n)$, имеющих одинаковые с исходной $\tau^{(n)}$-функцией и размерность, и алфавит. Очевидно, что положительное решение ***d-ПДФ*** для произвольной ***ГФП*** влечет за собой положительное решение для нее и ***d-ОПДФ***, тогда как в общем случае обратное неверно. Следовательно, ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ***, вообще говоря, являются ***неэквивалентными*** проблемами декомпозиции ***ГФП***. Наряду с общей ***d-ПДФ*** значительный интерес представляют вопросы *специального* представления ***ГФП*** в виде композиции конечного числа более простых функций. Под ***специальным*** будем понимать любое представление произвольной ***ГФП*** в виде (**59**) при условии, что как исходная $\tau^{(n)}$-функция, так и составляющие ее декомпозицию $\tau^{(n_j)}$-функции выбираются из заданного класса функций, в указанном количестве и т.д., т.е. на них накладываются некоторые специальные ограничения, имеющие ту или иную трактовку в конкретных контекстах.

Прежде всего, нас будет интересовать вопрос взаимосвязи свойств неконструируемости ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и входящих в ее представление (**59**) глобальных функций перехода $\tau^{(n_j)}$ $(n_j<n)$. В этом отношении (*используя результат теоремы* ***16)*** несложно убедиться в справедливости следующего утверждения, а именно: ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***обладает НКФ тогда и только тогда, когда по меньшей мере одна из ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ $(n_j < n)$ ***обладает НКФ; если по крайней мере одна из ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ $(n_j < n)$ ***обладает НКФ-1, то и их композиция*** $\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)} \tau^{(n_2)} \dots \tau^{(n_k)}$ ***будет обладать НКФ-1 и/или НКФ.*** Данный результат используется при рассмотрении ряда свойств *декомпозиции* глобальных функций перехода в классических ***ОС***-моделях.

7.1. Декомпозиция специальных глобальных функций перехода в классических ОС-моделях

Однако, перед рассмотрением вопросов декомпозиции ***ГФП*** *специальных* классов вновь вернемся к случаю классических ***1-ОС***, для которых ***1-ПДФ*** в общем случае имеет отрицательное решение, представленное в наших работах [3,5,44,53-56,63,65,67,77,88,90,536].

Теорема 102*. Для произвольного конечного A-алфавита существует бесконечное множество 1-мерных ГФП, для которых 1-ПДФ имеет отрицательное решение.*

Как уже отмечалось, данный результат впервые был нами получен на основе результатов по неконструируемости в классических ***1-ОС***, а затем передоказан более конструктивными методами на основе результатов ***Х. Ямада*** и ***С. Аморозо*** по проблеме полноты

для полигенных ***d-ОС*** и наших результатов по неконструируемости *(гл. 3* [54-56]*)*. Получив отрицательный ответ на решение ***1-ПДФ*** в общем случае, мы оставляем в стороне и целый ряд важных вопросов, связанных со структурой множества ***ГФП***, не имеющих вышеуказанного представления, с влиянием на возможность решения проблемы декомпозиции основных параметров и свойств классических ***1-ОС*** *(алфавита внутренних состояний, индекса соседства, неконструируемости и т.д.)*. Для исследования отмеченных и других вопросов по проблеме декомпозиции нам потребовались новые подходы и методы, часть из которых будет рассмотрена нами несколько ниже.

Прежде всего, рассмотрим класс всех бинарных ***1-ОС***, для которых ***1-ПДФ*** согласно теореме ***10.2*** в общем случае имеет отрицательное решение. В рамках данного класса исследуем влияние на решение ***1-ПДФ*** ограничения проблемы на случай *всех бинарных* ***ГФП***, не обладающих неконструируемостью ***НКФ***-типа, т.е. инъективных глобальных функций. Из результатов по неконструируемости в классических ***1-ОС*** известно, что доля таких структур *(не обладающих* ***НКФ****)* невелика и достаточно быстро убывает с ростом размера ***ШС***. Более того, класс таких структур является замкнутым относительно операции композиции, что весьма существенно для решения ***1-ПДФ***. Следующий результат дает ответ на поставленный выше вопрос [5,54-56,88].

<u>Теорема 10.3</u>. В классе всех бинарных инъективных одномерных ГФП 1-ПДФ имеет в общем случае отрицательное решение.

Итак, сужение класса всех одномерных бинарных ***ГФП*** до собственного подкласса инъективных функций сохраняет отрицательность решения ***1-ПДФ***. При этом, наряду с общей ***d-ПДФ*** значительный интерес представляют вопросы специального представления ***ГФП*** в виде композиции конечного числа более простых функций. При этом, под специальным представлением будем понимать *любое* представление ***ГФП*** в виде (**59**), которое отлично от определения **2.6**, т.е. в виде композиции заданного числа функций, функций из заданного множества и т.д. Некоторые из такого типа специальных представлений рассматриваются нами несколько ниже.

В связи с отрицательным в общем случае решением ***d-ПДФ*** возникает ряд интересных сопутствующих задач, среди которых вполне естественно можно выделить следующую. Пусть ***M(A,d,G)*** будет подмножеством множества всех ***d***-мерных ***ГФП***, определенных в некотором *конечном* ***A***-алфавите и обладающих некоторым *общим* для них ***G***-свойством. Тогда ***частная*** проблема декомпозиции сводится к вопросу о возможности представления произвольной ***ГФП*** из ***M(A,d,G)***-множества в виде композиции (**59**) функций из того же ***M(A,d,G)***-множества. Данная частная ***d-ПДФ*** представляет значительный теоретический и прикладной интерес в зависимости от соответствующего выбора определяющего множества ***M(A,d,G)*** глобальных функций перехода классических ***ОС***-моделей.

Прежде всего, рассмотрим ***1-ПДФ*** относительно класса всех ***1***-мерных линейных ***ГФП***, определенных в разделе ***3.2*** книги. Функции данного класса обладают общим ***G***-свойством универсальной воспроизводимости конечных ***КФ***. Ниже будут приведены основные результаты исследований по проблеме декомпозиции для классов ***ГФП***, включающих и функции из ***M(A,d,G)***-множества. Здесь же мы рассмотрим ряд более глубоких вопросов декомпозиции ***ГФП*** для одного интересного подмножества ***M(A,d,G)***-множества – линейных ***1***-мерных ***ГФП***, соответствующие ***ЛФП*** которых определяются следующими линейными соотношениями, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1,x_2,...,x_n)=(x_1+x_n+\sum_{2}^{n-1} b_k x_k) \pmod a;\ b_k\in\{0,1\};\ x_k\in A \quad (k=1..n-1)$$

Данное подмножество ***M(A,d,G)***-множества ***ГФП*** будем обозначать через ***M*(A,1,G)***. В этой связи рассмотрим замкнутость ***M*(A,1,G)***-множества относительно операции ***композиции***, для чего целесообразно представить его в виде *объединения* двух непересекаю-

щихся подмножеств $M^*_1(A,1,G)$ и $M^*_2(A,1,G)$ (*для краткости в дальнейшем* M^*_1 *и* M^*_2) соответственно подмножеств **ГФП** $\tau^{(n)}$ $(n \geq 2)$ со связным и несвязным шаблонами соседства размера n; т.е. $M^*(A,1,G) \equiv M^*_1 \cup M^*_2$ и $M^*_1 \cap M^*_2 = \emptyset$, где $\emptyset$ – пустое множество. Глобальные функции перехода из этих подмножеств будем обозначать соответственно через $\tau_1^{(n)}$ и $\tau_2^{(n)}$. При сделанных предположениях имеет место следующий основной результат [53-56], имеющий целый ряд весьма интересных приложений.

Теорема 104. ***Множество $M^*(A,1,G)$ и его подмножество M^*_1 незамкнуты относительно операции композиции входящих в них ГФП. Никакая ГФП $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ не может быть представлена в виде композиции двух более простых функций из того же самого M^*_1-множества.***

Несмотря на результат данной теоремы, можно показать [54], что расширение множества **ГФП**, допускаемых в качестве элементов представления (**59**) для произвольной функции из M^*_1, на множество функций M^*_2 позволяет положительно решать ***1-ПДФ*** для глобальных функций перехода из M^*_1-множества, а именно.

Теорема 105. ***Каждая ГФП $\tau_1^{(2k)} \in M^*_1$ представима в следующем виде $\tau_1^{(2k)} = \tau_1^{(k)} \tau_2^{(k+1)} = \tau_2^{(k+1)} \tau_1^{(k)}$, где $\tau_1^{(k)} \in M^*_1$ и $\tau_2^{(k+1)} \in M^*_2$ с индексом соседства $X_2 = \{0,k\}$ $(k=2,3,\ldots)$. Каждая ГФП $\tau_1^{[p(2k+1)]} \in M^*_1$ представима в виде $\tau_1^{[p(2k+1)]} = \tau_1^{(p)} \tau_2^{[p(2k+1)-2]} = \tau_2^{[p(2k+1)-2]} \tau_1^{(p)}$, $(p=3,5,7,9,\ldots;\ k=1,2,3,4,\ldots)$. Каждая ГФП $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ при условии $n=p \times q$ представима в следующем виде $\tau_1^{(n)} = \tau_2^{(n-p+1)} \tau_1^{(p)} = \tau_2^{(n-q+1)} \tau_1^{(q)}$, где участвующие в представлении ГФП функции $\tau_1^{(n)}$ из M^*_2-множества имеют симметричные индексы соседства.***

Из этого результата следует, что любая ***ГФП*** $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ при составном целом n представима композицией двух более простых глобальных функций из множества $M^*(A,1,G) \equiv M^*_1 \cup M^*_2$. Для окончательного решения вопроса с M^*_1-множеством требуется рассмотреть случай ***ГФП*** $\tau_1^{(n)}$ при простом целом n. Не вдаваясь в многочисленные и довольно трудоемкие подробности анализа такого типа глобальных функций, приведем довольно интересный результат, выражаемый следующей теоремой. Интересующийся же деталями читатель отсылается к [53], содержащей и ряд других интересных результатов.

Теорема 106. ***Глобальная функция перехода $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ представима в виде композиции конечного числа более простых ГФП из $M^*(A,1,G)$-множества тогда и только тогда, когда n является составным числом.***

Таким образом, проблема декомпозиции ***ГФП*** $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ относительно множества функций $M^*(A,1,G)$ алгоритмически разрешима и в случае ее положительного решения существуют удовлетворительные конструктивные разрешающие алгоритмы. Совершенно иная картина имеет место в случае ***ГФП*** из M^*_2-множества глобальных функций. Многие ***ГФП*** $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$ представимы композицией конечного числа более простых функций из $M^*(A,1,G)$-множества независимо от природы числа, определяющего размер ***ШС*** исследуемой ***ГФП***. Но следует иметь в виду, что с ***ШС*** размера n существует $N = 2^{n-2}-1$ различных ***ГФП*** $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$ и не все из них могут иметь вышеупомянутое представление. В частности, из 7 бинарных ***ГФП*** $\tau_2^{(5)} \in M^*_2$ данное представление из конечного числа более простых функций из $M^*(B,1,G)$-множества имеют 5 функций, тогда как из 15 бинарных функций $\tau_2^{(6)} \in M^*_2$ – только 6 функций и т.д. Наряду с этим, для каждого целого n

≥ 5 и произвольного ***A***-алфавита существуют ***ГФП*** $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$, имеющие вышеуказанное представление (**59**) с соответствующими ограничениями [5,53-56,77,88,90,536].

Теорема 107*. Для произвольных целого* $n \geq 5$ *и A-алфавита существует не менее n-4 ГФП* $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$, *представимых в виде композиции* $\tau_2^{(n)} = \tau_2^{(n-1)}\ \tau_1^{(2)}$ *двух ГФП.*

Однако, несмотря на данный результат, анализ большого числа ***ГФП*** из множества M^*_2, проведенный посредством специальной симулирующей программы, реализованной в среде пакета ***Mathematica*** [93], позволил подтвердить следующее предположение: ***Для произвольных целого*** $n \geq 4$ ***и A-алфавита существуют ГФП из*** M^*_2***-множества, не представимые в виде композиции конечного числа более простых функций из множества M*(A,1,G).*** Таким образом, проблема декомпозиции ***ГФП*** относительно ***M*(A,1,G)***-множества также имеет в общем случае отрицательное решение. Исследование проблемы декомпозиции ***ГФП*** интересно распространить на случаи высших размерностей и проследить за изменением представленных выше результатов в зависимости от *увеличения* размерности ***ГФП*** из рассмотренного класса глобальных функций ***ОС***-моделей.

В отличие от ***M*(A,1,G)*** множество ***M*(B,1,G)*** одномерных бинарных линейных ***ГФП*** образует собственный подкласс класса всех одномерных линейных ***ГФП*** и замкнуто относительно операции композиции, образуя относительно данной операции полугруппу. Поэтому, приведенные выше результаты естественным образом распространяются и на ***M*(B,1,G)***-множество ***ГФП***, представляющее во многих теоретических и прикладных аспектах ***ТОС*** большой самостоятельный интерес. На примере исследования ***1-ПДФ*** относительно ***M*(A,1,G)***-множества линейных ***ГФП*** был изучен целый ряд глубоких свойств глобальных функций перехода относительно данной проблемы, а именно: влияние типа ***ШС*** (*связный или несвязный*), числа (*составное или простое*), определяющего его размер, а также типа функций, составляющих представление (**59**) ***ГФП***. В рамках дальнейшего развития данной проблематики можно не только перенести подобные исследования на *общий* случай ***M(A,d,G)***-множества линейных функций, но и определить ряд других интересных с теоретических и прикладных точек зрения ***MW(A,d,L)***-множеств ***ГФП***, наделенных некоторым общим для них ***L***-свойством, например симметричностью.

Еще один весьма интересный подкласс класса всех классических ***ОС***-моделей относительно проблемы декомпозиции ***ГФП*** представляют собой структуры с рефрактерностью {***d-OCP(r,P)***; *определены в гл.* ***1***}. Такие структуры имеют целый ряд био-медицинских интерпретаций, а в последнее время они начинают использоваться также для решения задач распознавания образов, исследования свойств и топологии цифровых фигур и т.д. В наших работах [1,3,5,15,45,78,85] представлен ряд интересных теоретических и эмпирических результатов по динамике ***d-OCP(r,P)***, полученных с использованием компьютерного моделирования. Здесь же структуры данного типа обсуждаются относительно проблемы *декомпозиции* их глобальных функций перехода. Каждая структура ***d-OCP(r,P)*** определяется такими важными параметрами как *порог возбудимости* ***(P)*** и *глубина рефрактерности* ***(r)***. На основе этих параметров и дифференциации ***A***-алфавита внутренних состояний имеется возможность исследования специфических динамических свойств такого типа структур, состоящих в распространении ***возбуждений (1-****состояний)* в среде единичных автоматов структуры. Следующий результат представляет решение проблемы декомпозиции ***ГФП*** для класса всех ***d-OCP(r,P)*** [5,53-56,63,78,85,88,90].

Теорема 108*. Проблема декомпозиции ГФП в классе всех структур d-OCP(r,P)* ($d \geq 1$) *с рефрактерностью имеет отрицательное решение.*

Данный результат говорит об отрицательном решении ***d-ПДФ*** в классе всех ***ГФП*** с рефрактерностью без каких-либо ограничений на их порог возбудимости и глубину рефрактерности, т.е. рассматривается класс *всех* таких глобальных функций перехода, соотве-

тствующие ***ЛФП*** которых характеризуются тем, что они переводят единичный автомат структуры, находящийся в возбужденном состоянии, в состояние рефрактерности. Теперь предположим, что рефрактерная ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ имеет произвольный порог возбудимости $1 \le P \le n-1$ и глубину рефрактерности $r \ge 1$. Тогда с учетом сделанного предположения имеет место следующий важный результат [54-56,88,90,536].

Теорема 109. В классе B(r) всех одномерных рефрактерных ГФП с глубиной рефрактерности $r \ge 1$ никакая глобальная функция не представима в виде композиции конечного числа функций из того же B(r)-множества; B(r) представляет собой множество изолированных относительно операции композиции глобальных рефрактерных функций перехода ОС-моделей с рефрактерностью.

Таким образом, результат теоремы ***109*** дает исчерпывающее решение проблемы декомпозиции в ***B(r)-***классе всех одномерных ***ГФП*** с рефрактерностью ***r-***глубины. Более того, каждая функция из ***B(r)-***класса находится на собственном уровне сложности, определяемом ***P-***порогом возбудимости и ***X-***индексом соседства. Следовательно, изучение многих важных динамических свойств распределения возбужденных состояний в среде единичных автоматов структуры даже для случая ***1-OCP(r,P)*** носит более индивидуальный характер в зависимости от основных характеристик структур с рефрактерностью. Результат теоремы ***109*** распространяется и на *рефрактерные* однородные структуры ***d-OCP(r,P) (d > 1)*** с довольно общего вида ***X-***индексом соседства [5,54-56,88,90,536].

Рассмотрим ***VA-***множество классических ***1-OC***, определяемых ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ вида:

$$\sigma^{(n)}(x_1,x_2,x_3,...,x_n)=\begin{cases} a-1, & if < x_1,x_2,x_3,...,x_n >=< 000...010 > \\ x_n+a-1 \pmod a, & if < x_1,x_2,x_3,...,x_n >=< 000...01b > \quad (b \neq 0) \\ x_n, & otherwise \end{cases}$$

Можно показать, что для каждой ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ структуры из ***VA-***множества, определенной в алфавите $A=\{0,1,...,a-1\}$, имеет место соотношение $\tau^{(n)a} \equiv \tau_E^{[a(n-1)+1]}$, где $\tau_E^{(m)}$ – тождественная функция, характеризуемая определяющим соотношением $(\forall c \in C(A))(c\tau_E^{(m)} \equiv c)$. Таким образом, каждая тождественная ***ГФП*** $\tau_E^{(m)}$ $(n \ge 3; a \ge 2)$, определенная в ***A-***алфавите, представима в виде композиции из a идентичных более простых $\tau^{(n)}$-функций с дефектом [53], равным единице. Очевидно, для каждой функции $\tau^{(n)} \in VA$ произвольная ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ является периодической с периодом $\le a$ и для нее имеет место неконструируемость только типа ***НКФ-2***. Ряд других интересных специальных представлений ***ГФП*** в виде композиции конечного числа более простых функций рассмотрен в наших работах [5,8,9,53-56,88,90,114,536] и в последующих разделах настоящей главы.

7.2. Некоторые подходы к решению общей проблемы декомпозиции глобальных функций перехода

В предыдущем разделе был рассмотрен ряд вопросов проблемы декомпозиции относительно ряда специальных классов ***ГФП***, а также представлены и результаты решения ***1-ПДФ*** на основе подходов, использующих результаты ***Аморозо-Ямада*** по проблеме полноты, и наших результатов по проблеме неконструируемости в классических ***ОС-***моделях. В настоящем разделе мы представим результаты исследования *общей* проблемы декомпозиции ***ГФП*** на основе новых перспективных подходов, базирующихся на использовании результатов и методов в теории функций алгебры логики и ***a-***значных логик, а также на использовании формального аппарата теории групп, полугрупп и алгебр и су-

щественном обобщении метода решения ***d-ПДФ*** на основе исследований по проблеме неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. Наряду с этим будет показана тесная связь проблемы декомпозиции ***ГФП*** с проблемой сложности конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях и *проблемой полноты* для полигенных ***ОС***-моделей. Обсуждаемые здесь подходы и методы решения ***d-ПДФ*** представляют определенный интерес и при исследованиях других вопросов ***ТОС***-проблематики и ее прикладных аспектов [536].

Прежде всего, для решения проблемы декомпозиции ***ГФП*** предлагается подход, базирующийся на использовании функции ***Шеннона***, введенной для оценки сложности реализации функций алгебры логики. Хорошо известно, что любая функция алгебры логики реализуется соответствующей логической схемой, состоящей из некоторых базовых функциональных элементов. Здесь в качестве таких базовых элементов выбираются элементы, реализующие следующие операции: ***конъюнкции***, ***дизъюнкции*** и ***отрицания.***

Для описания сложности логических схем вводятся следующие функции. Пусть каждой логической схеме ***M***, реализующей некоторую функцию алгебры логики, поставлено в соответствие неотрицательное число ***L(M)*** – сложность схемы, а ***L(σ)*** – минимум сложностей всех схем ***M***, реализующих некоторую логическую **σ**-функцию. Более того, пусть $L(n) = max_{\sigma} L(\sigma)$, где максимум берется по всем функциям $\sigma^{(n)}$, зависящим от ***n*** логических переменных. В случае, когда максимум достигается, ***L(n)*** есть такое наименьшее число, что схемами сложности не более, чем ***L(n)*** можно реализовать *любую* функцию $\sigma^{(n)}$ алгебры логики (*или соответствующей ЛФП классической* ***d-ОС***). Функция ***L(n)*** впервые была введена ***К. Шенноном*** для контактных схем и им же были получены первые значительные результаты по ней. Впоследствии данная функция ***L(n)*** получила имя автора и стала широко использоваться для оценки сложности функциональных схем. Важной задачей является исследование поведения функций ***L(σ)*** и ***L(n)***; при этом, оба аспекта исследования оказываются тесно взаимосвязанными [5,54-56,88,90,536].

В настоящее время верхние оценки, асимптотически равные нижним, получены только для сравнительно немногих типов функциональных схем. При этом, под типом схемы понимается, в первую очередь, набор базовых функциональных элементов, из которых конструируются схемы, реализующие ту или иную функцию $\sigma^{(n)}$ алгебры логики. А так как наша задача сводится к сравнительному анализу функций $\sigma^{(n)}$, то мы вполне можем ограничиться некоторым конкретным набором базовых функциональных элементов, т. е. конкретным типом функциональных схем, в рамках которого проводится соответствующий сравнительный анализ. В качестве таких схем выбираем схемы из функциональных элементов в базисе ***G***={***And***, ***Or***, ***Not***}, для которых найдены асимптотические выражения для функции ***К. Шеннона*** при условиях асимптотического равенства верхних и нижних оценок их сложности.

Сложностью схемы ***M*** из функциональных элементов, реализующей логическую $\sigma^{(n)}$-функцию, будем называть число ее элементов и обозначать как $Q=L(\sigma^{(n)})$. Пусть теперь $L(\sigma^{(n)})$ есть наименьшая сложность схем, реализующих произвольную $\sigma^{(n)}$-функцию, и $L(n)=max_{\sigma} L(\sigma^{(n)})$, где максимум берется по всем $\sigma^{(n)}$-функциям. Иными словами, величина ***L(n)*** – наименьшее число элементов в схеме, достаточное для реализации *любой* булевой функции от ***n*** переменных. При доказательстве нашего результата существенно используется фундаментальный в теории булевых функций результат ***О. Лупанова*** [6]: ***Имеет место асимптотическое равенство $L(n)=2^n/n$, причем для любого $\delta > 0$ доля логических $\sigma^{(n)}$-функций, для которых справедливо соотношение $Q = L(\sigma^{(n)}) \le (1 - \delta)x2^n/n$, стремиться к нулю с ростом n-значения.***

Несмотря на возможные обобщения данного результата на случай произвольного *конечного базиса* и ряд других случаев, им вполне воможно ограничиться для дальнейших рас-

смотрений. Очевидно, что каждую ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, заданную в бинарном алфавите $B=\{0,1\}$, можно рассматривать как некоторую функцию алгебры логики. А так как композиция ***ГФП*** взаимно однозначно определяется специальной суперпозицией соответствующих им ***ЛФП***, то далее будет идти речь именно о суперпозиции $\sigma^{(n)}$-функций в бинарном ***B***-алфавите. С этой целью для каждого целого ***n*** выбирается ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ с максимально возможной сложностью ***L(n)***. Затем на основе искомой композиции конечного числа бинарных ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ $(n_j < n;\ j=1 .. k)$ для произвольной $\tau^{(n_j)}$-функции определяется соответствующая ей **Σ**-схема суперпозиции ***ЛФП*** $\sigma^{(n_j)}$ и оценивается ее ***L(Σ)***-сложность, сравниваемая затем со сложностью ***L(n)*** исходной $\sigma^{(n)}$-функции. Проведенный, наконец, сравнительный анализ позволяет сформулировать следующий основной результат [53-56,88].

<u>Теорема 110</u>. Для любого заданного конечного базового G_f-множества 1-мерных бинарных ГФП существует такое целое $n_o > 0$, что для каждого целого $n \geq n_o$ существует не менее одной бинарной ГФП $\tau^{(n_j)}$, для которой 1-ПДФ имеет отрицательное решение.

Следует отметить, что аналогичный результат по ***1-ПДФ*** для бинарного случая был получен нами в работе [41] на основе результатов по универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ*** в классических ***1-ОС***. Результат теоремы ***110*** получен в предположении, что ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ имеет произвольный вид, т.е. не требуется обязательного выполнения условия $\sigma^{(n)}(x,x, ..., x)=x$, что позволяет распространить вытекающие из него следствия по решению ***d-ПДФ*** на случай и ***нестабильных d-ОС***. Более того, при доказательстве теоремы не участвовало понятие размерности, а только ***ШС***, представленный произвольным индексом соседства. Поэтому результат теоремы ***110*** сохраняет силу также и для ***ГФП*** в произвольных бинарных ***d-ОС*** $(d \geq 1)$. Действительно, ***ШС*** в ***d-ОС*** всегда можно представить в виде *минимального* ***d***-мерного параллелепипеда с центральным автоматом в его верхнем *левом* углу, если рассматривать, не нарушая общности, случай с бинарными ***2-ОС***. В таком случае ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ представляет собой функцию алгебры логики от переменных числом, большим ***n***, для которой некоторые переменные являются несущественными. На основе теоремы ***110*** уже несложно получить отрицательное в общем случае решение ***d-ПДФ*** для случая бинарных ***ГФП***.

Следует отметить, что композиции ***ГФП*** соответствует суперпозиция ***ЛФП***, которая является существенным сужением общего понятия суперпозиции функций. Действительно, относительно введенной нами суперпозиции ***ЛФП*** при доказательстве теоремы ***110*** [53] функции $\sigma^{(n)}$ в бинарном ***B***-алфавите не обладают конечным базисом. На языке же алгебры логики бинарные $\sigma^{(n)}$-функции соответствуют классу функций, сохраняющих константу ноль, который обозначается через ***To***. Известно, что каждый базис в ***To*** содержит не более трех функций, т.е. класс функций ***To*** обладает конечным базисом. В определении же базиса для функций алгебры логики используется понятие суперпозиции функций в общем виде, тогда как полученное нами отрицательное решение ***d-ПДФ*** говорит об отсутствии конечного базиса относительно суженного понятия суперпозиции функций. Следовательно, результаты по ***a***-значным логикам $(a > 2)$ во многих случаях нельзя непосредственно переносить на случай ***ЛФП***, определенных в ***A***-алфавите общего вида, хотя методы ***a***-значных логик и представляются весьма перспективными для исследования целого ряда свойств динамики классических ***ОС***-моделей [88,90,536].

В общем случае ***A***-алфавита структуры не представляется возможным непосредственно обобщать вышеприведенные результаты по бинарным ***ГФП***, поэтому мы и вынуждены прежде всего обратиться к ***a***-значным логикам $(a > 2)$, относительно которых следует отметить, что при решении их задач приходится сталкиваться с большими сложностями и особыми обстоятельствами [5,53]. В ***a***-значных логиках исследование произвольной сис-

темы функций на полноту сопряжено с большими техническими трудностями. А доказательства полноты конкретных систем во множестве функций ***a***-значной логики проводятся, как правило, посредством методов сведения их к заведомо полным системам функций, что в целом ряде случаев встречает весьма существенные затруднения [5,88,536].

Рассмотрим теперь ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенную в произвольном алфавите $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ $(a>2)$, как функцию ***a***-значной логики. Предположим, что существует такое конечное базовое ***G***-множество ***ЛФП***, что каждая локальная функция $\sigma^{(n)} \notin G$ может быть представлена в виде конечного числа суперпозиций ***ЛФП*** из ***G***-множества. Используя здесь терминологию и обозначения работы [53] и обозначая множество всех функций ***a***-значной логики через ***L(a)***, получаем, что замыкание ***G***-множества совпадает с ***L(a)***, т.е. $[G] = L(a)$. Очевидно, ***G***-множество является полной системой в ***L(a)***. А так как ***G***-множество по предположению конечно, то всегда можно выбрать минимальное подмножество $G^* \subseteq G$ такое, что ***G****-множество является полной системой в ***L(a)***, тогда как никакое его подмножество полной системой в ***L(a)*** не является. Таким образом, предположение о существовании для ***L(a)***-множества конечного базового ***G****-подмножества эквивалентно наличию в ***L(a)*** конечного базиса. Следовательно, задачу о декомпозиции ***ГФП***, определенных в произвольном ***A***-алфавите, можно свести к задаче о функциональной полноте в ***a***-значных логиках, исследование которой существенно связано с так называемыми предполными классами [10,53]. Вопросы исследований по ***a***-значным логикам достаточно полно представлены, в частности, в работе [323].

<u>Определение 27</u>. Класс D функций, принадлежащих замкнутому R-классу из множества L(a), называется предполным в R, если D представляет собой неполную в R систему, но присоединение к ней любой функции $f \in R \setminus D$ обращает D в полную в R систему функций

На основе известных результатов по ***a***-значным логикам получаем, что число предполных в ***L(a)*** классов конечно и не превышает величины 2^{a^a}. Но это, как можно показать [54], противоречит тому, что при фиксированном целом ***a***-значении в ***a***-значной логике всегда найдется базис, состоящий из сколь угодно большого, но конечного числа функций, в том числе предложенный нами для класса функций ***L(a)*** ***G****-базис. Следовательно, класс функций ***L(a)*** не может иметь конечного ***G****-базиса. Нам остается только оценить влияние этого факта на вопрос существования конечного базиса для более узкого класса ***L(a,0)*** функций ***a***-значной логики, удовлетворяющих условию стабильности $\sigma^{(n)}(0,0,\ldots,0)=0$. В результате проведенной нами оценки [54] доказано отсутствие конечного базиса и для класса функций ***L(a,0)***, что позволяет нам сформулировать результат, являющийся аналогом теоремы ***110*** для случая функций ***a***-значной логики и представляющий определенный теоретический интерес.

<u>Теорема 111</u>. Класс L(a,0) локальных функций перехода $\sigma^{(n)}$ при условии $n \geq 2$ и $a > 2$ не имеет конечного базиса.

На основе данного результата подобно бинарному случаю уже нетрудно получить отрицательное решение проблемы декомпозиции ***ГФП*** и в общем случае [5,54-56,88].

<u>Теорема 112</u>. Среди всех d-мерных ГФП, определенных в A-алфавите и имеющих произвольный индекс соседства, существует бесконечное множество функций, для которых d-ПДФ ($d \geq 1$) имеет отрицательное решение.

Аналогичный результат может быть получен и на основе результатов (*представленных в главе* ***4***) по проблеме сложности конечных ***КФ*** в ***d-ОС*** [54-56]. Невозможность положительного решения ***d-ПДФ*** для произвольной ***ГФП*** позволяет естественным образом ввести понятие сложности и для глобальных функций перехода подобно случаю конечных ***КФ*** в ***d-ОС***. Таким образом, из анализа понятий сложности конечных ***КФ*** и ***ГФП*** в клас-

сических ***d-OC*** вытекает, что в их основе лежит невозможность существования некоторого конечного базового множества для конечных ***КФ*** и ***ГФП*** соответственно.

Из вышесказанного можно со всей определенностью сделать вывод о возможности плодотворного использования в исследованиях по ***ТОС***-проблематике аппарата и методов, разработанных в алгебре логики и ***a***-значных логиках, а также результатов по проблеме сложности конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях. Наряду с этим для исследования проблемы декомпозиции ***ГФП*** можно использовать и алгебраические методы. Действительно, изучению множеств многоместных функций, замкнутых относительно различных естественно определенных операций, отводится в современной алгебре весьма важное место. В частности, представляют интерес множества функций, обладающих теми или иными свойствами. Так, например, изучаются множества ***n***-местных функций, замкнутых относительно операций суперпозиции, находятся абстрактные характеристики получаемых таким образом алгебр. Хорошо известным примером таких алгебр являются алгебры ***Менгера n***-местных функций [536].

Как известно, ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, осуществляющие отображение множества ***КФ*** $C(A, d)$ на себя, образуют полугруппу относительно операции композиции глобальных $\tau^{(n)}$-функций; пусть $L(a,d)$ обозначает полугруппу всех таких ***d***-мерных глобальных отображений $\tau^{(n)}$: $C(A,d) \to C(A,d)$. Можно показать, что $L(a,d)$ является некоммутативной полугруппой с единицей, в качестве которой служит тождественное преобразование, оставляющее любую конфигурацию структуры без изменения с точностью до переноса. Исследование свойств композиции ***d***-мерных ***ГФП***, определенных в ***A***-алфавите, в ряде случаев можно свести к исследованию соответствующих им свойств полугруппы $L(a,d)$. Для дальнейшего изложения определим некоторые необходимые алгебраические понятия. Подгруппа ***G*** полугруппы ***S*** с единицей называется ***максимальной*** подгруппой полугруппы ***S***, если она не содержится строго ни в какой другой подгруппе данной полугруппы. Существование максимальных подгрупп впервые отмечено ***Шварцем*** для периодической ***S***-полугруппы, а также и ***Уоллесом*** и ***Кимура*** для произвольной ***S***-полугруппы. Приведем еще один пример существования *максимальных* подгрупп в полугруппах, определяемых глобальными отображениями классических ***ОС***-моделей. Покажем, что полугруппа $L(a,d)$ содержит одну максимальную группу, где под максимальной понимается такая ***G***-группа, содержащаяся в полугруппе $L(a,d)$, которая не может быть расширена путем добавления к ней новых элементов из множества $L(a,d)\backslash G$.

С *взаимной однозначностью* глобального параллельного отображения $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ тесно связана проблема исследования свойств классических ***ОС***-моделей алгебраическими методами. Известно [3], в общем случае множество всех отображений $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ не удовлетворяет групповым аксиомам (*точнее, аксиоме об обратном элементе*), даже при условии исключения из рассмотрения глобальных отображений, обладающих неконструируемостью типов ***НКФ***, ***НКФ-1*** и ***НКФ-3***. Однако, рассматривая множество $G(d)$ ***d***-мерных ***ГФП***, для которых глобальные отображения $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ являются взаимно однозначными, можно показать [54], что оно образует группу относительно операции композиции. Данный результат позволяет применять групповые методы исследования динамики классических ***d-OC***, т.е. сводить изучение целого ряда свойств таких структур к исследованию соответствующих им свойств группы $G(d)$, а также составляющих ее подгрупп. В частности, из определения множества $G(d)$ уже нетрудно получить и максимальность $G(d)$-группы, принадлежащей полугруппе $L(a,d)$ $(d \geq 1)$ всех глобальных параллельных отображений $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$.

Под ***разложением S***-полугруппы понимается представление ее в виде объединения непересекающихся подполугрупп S_k $(k=1,2,3,...)$. Для того, чтобы разложение полугруппы представляло некоторую ценность для изучения ее строения и определяющих свойств,

необходимо, чтобы подполугруппы S_k были полугруппами более специального, нежели S, типа, например, простыми полугруппами или группами. В этом смысле полугруппа $L(a,d)$ параллельных отображений разлагается в объединение непересекающихся полугруппы $L^*(a,d)$ и максимальной группы $G(d)$, а именно имеет место следующее соотношение $L(a,d)=L^*(a,d)\cup G(d)$ и $L^*(a,d)\cap G(d)=E$, где E – единичная группа, состоящая только из одного единичного элемента (*единицы полугруппы*). Решение многих вопросов по свойствам $L(a,d)$-полугруппы можно свести к решению соответствующих вопросов для полугруппы $L^*(a,d)$ или группы $G(d)$, что и делается ниже.

Предположим теперь, что каждая ***ГФП*** $\tau^{(n)}\in L(a,d)$ может быть представлена в виде композиции конечного числа более простых функций из некоторого конечного множества $G_f\subset L(a,d)$. В данном случае $L(a,d)$ будет полугруппой с конечным числом образующих. Действительно, множество $G_f\subset L(a,d)$ тогда и только тогда будет ***системой образующих*** для полугруппы $L(a,d)$, когда каждый элемент множества можно представить не менее, чем одним способом в форме произведения (*композиции*) конечного числа степеней элементов (***ГФП***) из G_f-множества. А так как, по предположению, G_f-множество конечно, то легко следует и наше предыдущее заключение.

Система образующих G_f-множества называется ***неприводимой***, если никакая ее истинная подсистема уже не является для полугруппы $L(a,d)$ системой образующих. Под множеством $G_f\subset L(a,d)$ будем в дальнейшем понимать именно неприводимую систему образующих и называть ее ***базисом*** $L(a,d)$-полугруппы. Сказанное в полной мере можно отнести и к группе $G(d)\subset L(a,d)$. Подгруппу $G^*(d)$ группы $G(d)$ будем называть ***замкнутой***, если для любых ее двух элементов $g_1,g_2\in G(d)\setminus G^*(d)$ композиция g_1g_2 не принадлежит $G^*(d)$-подгруппе. Для дальнейшего нам понадобится ряд достаточно простых результатов, представленных в наших работах [5,54-56,88].

Прежде всего, если полугруппа $L(a,d)$ имеет конечный G_f-базис, то ***максимальная*** группа $G(d)\subset L(a,d)$ также имеет конечный базис G^* такой, что имеют место следующие соотношения $G_f=G^*\cup G^{\#}$, $G^*\cap G^{\#}=\emptyset$ и $G^{\#}$ – конечный базис полугруппы $L(a,d)\setminus G(d)$. При этом, если $G(d)$-группа не имеет конечного базиса, то не имеет конечного базиса и полугруппа $L(a,d)$. Если $G(d)$-группа содержит n замкнутых подгрупп, то число N элементов G_f-базиса группы не менее величины n ($N\geq n$). Из данного результата легко получить и важное для дальнейшего следствие, а именно: ***если $G(d)$-группа содержит бесконечное число замкнутых подгрупп, то она не может иметь конечного базиса***. Данные результаты переносятся и на случай произвольных алгебраических полугрупп. В дальнейшем, не нарушая общности, будем отождествлять ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ с соответствующими им параллельными глобальными отображениями $\tau^{(n)}: C(A,d)\to C(A,d)$ классических ***d-OC***.

Рассмотрим теперь несколько детальнее одно представление $L(a,d)$-полугруппы согласно нашим результатам по неконструируемости в классических ***d-OC*** (глава 2). Хорошо известно [53], что множество всех параллельных глобальных $\tau^{(n)}: C(A,d)\to C(A,d)$ отображений можно представить в виде *объединения* семи непересекающихся подмножеств, которые относительно составляющих их глобальных отображений (***ГФП***) обладают следующими основными определяющими характеристиками, а именно:

G_1 ***: ГФП обладают всеми четырьмя типами неконструируемости (НКФ, НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3);***
G_2 ***: ГФП обладают неконструируемостью типов НКФ (НКФ-3) и НКФ-1 при отсутствии для них НКФ-2;***

G_3: ГФП обладают неконструируемостью типов НКФ (НКФ-3) и НКФ-2 при отсутствии для них НКФ-1;

G_4: ГФП обладают неконструируемостью только типа НКФ-2; при этом, определяемые ими глобальные отображения не являются взаимно однозначными;

G_5: ГФП обладают неконструируемостью только типа НКФ-1;

G_6: ГФП обладают неконструируемостью только типа НКФ (НКФ-3);

$G_7 \subset G_6$: ГФП определяют взаимно однозначные параллельные глобальные отображения $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$.

Можно убедиться, что относительно операции композиции множества G_k **(k=1..6)** образуют некоммутативные полугруппы, а множество G_7 образует группу. Таким образом, полугруппа ***L(a, d)*** всех параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$ в ***d-OC*** может быть представлена в виде объединения конечного числа непересекающихся подполугрупп и группы, т.е. $L(a,d)=\cup_k G_k$ **(k=1..7).** Данный анализ структуры подполугрупп G_j и G_7-группы позволяет сформулировать следующий основной результат по разложению полугруппы ***L(a,d)*** всех глобальных отображений ***OC-***моделей.

<u>Теорема 113</u>. Полугруппа L(a,d) параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$, определяемых классическими OC-моделями, может быть представлена в виде объединения шести непересекающихся подполугрупп G_k (k=1..6), не имеющих конечных систем образующих, и одной максимальной G(d)-группы. Относительно полугруппы $L(a,d)\backslash G(d)$ множества G_h (h=4 .. 6) являются изолированными подполугруппами.

Относительно ***G(d)-***группы следует сделать одно важное замечание**.** Рассмотрение большого числа ***1-***мерных бинарных отображений $\tau^{(n)} : C(B,1) \to C(B,1)$ и, в первую очередь, отображений, образующих подполугруппу G_4**,** позволило высказать предположение о том**,** что ***G(d)*** является ***единичной группой***, т.е. состоит только из тождественных глобальных отображений. Однако, дальнейшие исследования [55,56,88] показали, что вопрос о структуре ***G(d)-***группы остается до некоторой степени открытым. Предпринятое более детальное исследование *бинарных* ***1-OC*** на предмет обнаружения взаимно однозначных отображений $\tau^{(n)} : C(B,1) \to C(B,1)$**,** отличающихся от тождественных**,** оказалось вполне успешным. Следующая теорема представляет наилучший полученный в этом направлении результат, представляющий и определенный теоретический интерес.

<u>Теорема 114</u>. Полугруппа L(a,1) ($a \geq 3$) всех 1-мерных параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)} : C(A,1) \to C(A,1)$, определяемых классическими OC-моделями, может быть представлена в виде объединения шести попарно непересекающихся подполугрупп G_k (k=1..6), не имеющих конечных систем образующих, и одной максимальной G(a)-группы, которая является объединением подгруппы T* всех тождественных отображений $\tau^{(n)}{}_o$ ($n \geq 2$) с конечной системой P(a,2) образующих и определяющим соотношением $\tau^{(n)(a-1)!} = \tau^{(2)}{}_o$ и, возможно, подгруппы взаимно однозначных отображений, отличных от вышеперечисленных отображений.

Результаты теорем ***113, 114*** говорят в пользу необходимости дальнейшего продолжения исследований в данном направлении**,** учитывая все многообразие возможностей уже для одномерного бинарного случая [19,53-56,88,90,536]**.** В частности**,** следующий результат иллюстрирует многообразие возможностей уже для бинарных классических ***1-OC*.**

<u>Теорема 115</u>. Для любого целого $n \geq 3$ существует не менее 2^{n-1}-n бинарных одномерных ГФП $\tau^{(n)}$, обладающих следующими свойствами, а именно:

- ***для ГФП $\tau^{(n)}$ отсутствуют НКФ, НКФ-3 и НКФ-1 при наличии для нее НКФ-2;***
- ***каждая КФ $c \in C(B,1,\phi)$ для ГФП $\tau^{(n)}$ является периодической; при этом, существуют периодические с-КФ с минимальным р-периодом, величина которого определяется из неравенства $(|c|+n-2)/(n-1) < p = 2^k$;***
- ***отображение $\tau^{(n)} : C(B,1,\infty) \to C(B,1,\infty)$ не взаимно однозначно;***
- ***для данных ГФП $\tau^{(n)}$ проблема 1-ПДФ имеет отрицательное решение.***

Данный результат является существенным обобщением ряда лемм из [3], но и он не дает исчерпывающего решения вопроса даже относительно структуры группы ***G(1)***, участвующей в приведенном представлении *полугруппы* ***L(a,1)*** одномерных глобальных отображений. Наряду с этим, данный результат еще раз иллюстрирует все многообразие и богатство форм поведения конечных ***КФ*** уже в случае классических бинарных ***ОС***-моделей. Таким образом, из результатов теорем ***113-115*** следует, что группа ***G(d)*** в представлении полугруппы ***L(a,d)*** содержит нетривиальные тождественные взаимно однозначные глобальные отображения, а для каждой из шести подполугрупп G_j ***(j=1..6)***, определяемых представлением ***L(a,d)***, ***d-ПДФ*** имеет в общем случае отрицательное решение.

В заключение настоящего раздела на основе понятия ***бесконечных ВСКФ (∞-ВСКФ)*** определим еще один подход к решению проблемы *декомпозиции* ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях. С этой целью детально исследовалась *подполугруппа* G_4 одномерных глобальных параллельных отображений $\tau^{(n)} : C(A,1) \to C(A,1)$, для которых был обнаружен ряд интересных динамичесих свойств. Для дальнейшего нам понадобится ряд новых понятий и определений [5,54-56,88,90].

<u>Определение 28</u>. Под парой бесконечных ВСКФ (∞-ВСКФ) понимается пара КФ $c_1, c_2 \in C(A,d,\infty)$ таких, что имеет место $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c_3 \in C(A,d,\infty) \neq \square$ (где $\square$ – нулевая КФ).

Будем говорить, что бинарная ***ГФП $\tau^{(n)}$*** реализует ***перевертыш*** (*либо обладает им*), если на некоторой паре кортежей $\langle x_1x_2...x_{n-1}0\rangle$, $\langle x_1x_2...x_{n-1}1\rangle$ соответствующая ей ***ЛФП $\sigma^{(n)}$*** принимает значения $\sigma^{(n)}(x_1x_2...x_{n-1},x_n) = x_n+1 \ (mod\ 2)$. Число перевертышей для произвольной ***ГФП*** называется ее ***дефектом***, который в определенной степени характеризует степень отклонения ее от тождественной ***ГФП***. Определим один полезный класс ***$E^{\#}$ ГФП*** из подполугруппы ***G_4***, ***ЛФП*** которых определяются следующим образом, а именно:

$$E^{(n)}(x_1,x_2,...,x_n) = \begin{cases} 0, & if\ x_j = 0, \quad x_{n-1} = x_n = 1 \quad (j = 1..n-2) \\ 1, & if\ x_j = 0, \quad x_{n-1} = 1 \quad (j = 1..n-2,\ n) \\ x_n, & otherwise \end{cases}$$

Данный класс ***ГФП*** из-за целого ряда специфических динамических свойств представляет определенный интерес для дальнейших исследований даже безотносительно проблемы декомпозиции. Рассматривая теперь подкласс ***ГФП*** из множества $E^{\#} \subset G_4$, имеющих ***дефект***, равный единице, показывается [53], что композиция двух таких функций есть снова функция из ***G_4***-множества, но с дефектом, отличным от единицы. На основе анализа множеств пар ***∞-ВСКФ*** для ***ГФП*** из ***$E^{\#}$***-множества удается установить точный вид этих пар для каждой из функций ***$E^{\#}$***-класса, что позволяет доказать следующий результат: ***для любого целого $n \geq 3$ ГФП из $E^{\#}$-класса имеют, в общем случае, отрицательное решение 1-ПДФ.*** Данный результат позволяет получать конструктивное отрицательное решение ***1-ПДФ***, а также имеет и другие интересные приложения [536]. Некоторые из них будут рассмотрены нами ниже в несколько ином контексте.

Для решения вопроса наличия для подполугруппы G_4 конечного базиса вводится один класс $Ar \subset G_4$ **ГФП,** для которых проведено достаточно детальное исследование структуры пар **∞-ВСКФ.** Предложенный подход является конструктивным и позволяет сделать вполне убедительные предположения о возможности переноса полученных в этом направлении результатов и на общий случай классических **1-ОС.** Базовый же результат для дальнейших исследований представляет следующая основная теорема [5,53,88].

Теорема 116. Для любого целого n≥3 существуют 1-мерные бинарные ГФП $\tau^{(n)} \subset G_4$***, обладающие множеством пар ∞-ВСКФ только следующего вида, а именно:***

$$C_1^{\infty} = \ldots\ldots g_{j+p+1}^1 g_{j+p}^1 \cdots g_{j+1}^1 g_j^1 g_{j-1}^1 g_{j-2}^1 \cdots g_1^1 X$$
$$C_2^{\infty} = \ldots\ldots g_{j+p+1}^2 g_{j+p}^2 \cdots g_{j+1}^2 g_j^2 g_{j-1}^2 g_{j-2}^2 \cdots g_1^2 X$$
$$where\ (g_j^1, g_j^2)\ -\ any\ pair\ of\ 2\text{-}element\ set$$
$$\{(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}, x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n-1}^1), (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n-1}^1, x_1 x_2 \ldots x_{n-1})\}$$
$$(x_k \in \{0,1\},\ k = 1..n-1;\ j = 1,2,3,\ldots)$$

где X – произвольная бинарная КФ, а кортежи $<x_1 x_2 \ldots x_{n-1}>$, $<x^1{}_1 x^1{}_2 \ldots x^1{}_{n-1}>$ ***различны и определяются видом бинарных кортежей длины n, на которых ГФП*** $\tau^{(n)} \subset G_4$ ***реализует перевертыш.***

На основе специальным образом определенного класса $\Gamma\Phi\Pi\ \tau^{(n)} \subset G_4$, удовлетворяющих условиям теоремы **116,** и детального анализа структуры пар существующих для них **∞-ВСКФ** получаем [53] следующий результат**:** ***подполугруппа*** G_4 ***1-мерных бинарных ГФП не имеет конечного базиса.*** Из детального анализа $\Gamma\Phi\Pi\ \tau^{(n)} \subset G_4$, удовлетворяющих условиям теоремы **116,** можно сделать вывод о том**,** что среди функций G_4**-**подполугруппы существуют функции**,** обладающие *парами* **∞-ВСКФ,** состоящими из подконфигураций, имеющих вполне определенный набор составляющих их компонент **(***отрезков конфигураций***)** минимальной длины **(n - 1).** Более того, для таких функций существуют пары **∞-ВСКФ,** состоящие из периодических **КФ** с минимальным периодом **(n-1).** При этом, *составляющая компонента* **(СК)** конфигураций пары **∞-ВСКФ** до некоторой степени *аналогична внутреннему блоку* **(ВБ)** классических **ВСКФ,** определенных и рассмотренных нами в разделе **2.3** книги. При этом интересно отметить, что полученные нижние оценки для минимальных размеров**:** **СК** пар **∞-ВСКФ** для $\Gamma\Phi\Pi\ \tau^{(n)} \subset G_4$**,** **ВБ** классических **ВСКФ** и **НКФ-1** для случая классических **1-ОС** совпадают и равны **(n-1),** т.е. на единицу меньше размера **ШС** соответствующей классической однородной структуры.

Пусть теперь некоторая $\Gamma\Phi\Pi\ \tau^{(n)} \subset G_4$ удовлетворяет условиям теоремы **116** и обладает парами **∞-ВСКФ** периодических конфигураций c^{∞}, b^{∞} с минимальным периодом величины **(n-1).** Результатом применения к таким парам **∞-ВСКФ** $\Gamma\Phi\Pi\ \tau^{(n)}$ являются конфигурации $h^{\infty}=c^{\infty}\tau^{(n)}=b^{\infty}\tau^{(n)}$**,** имеющие период также величины **(n-1).** Более того, ни одна периодическая **∞-ВСКФ** с периодом**,** меньшим, чем **(n-1),** не может для таких $\Gamma\Phi\Pi\ \tau^{(n)} \subset G_4$ быть прообразом какой-либо пары **∞-ВСКФ.** Следовательно, существуют $\Gamma\Phi\Pi\ \tau^{(n)} \subset G_4$**,** для которых ни одна периодическая **∞-ВСКФ** с периодом меньшим**,** чем **(n-1),** не может для таких функций быть *прообразом* какой-либо пары **∞-ВСКФ.** Проведя достаточно детальный анализ множества $SGAK \subset G_4$ всех таких глобальных функций, получаем новое решение **1-ПДФ** [54], определяемое следующей основной теоремой.

Теорема 117. Полугруппа L(a,1) всех 1-мерных параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)} : C(A,1) \to C(A,1)$ не имеет конечного базиса. Для каждого целого $n \geq 3$ существует 1-мерная ГФП $\tau^{(n)}$, определенная в произвольном конечном A-алфавите, для которой 1-ПДФ имеет отрицательное решение.

Аналог теоремы ***117*** на основе одного алгебраического подхода был получен ***В. Боднарчуком*** и ***Г. Цейтлиным.*** Работая по ***ПО***-преобразованиям, эквивалентным классическим ***1-ОС***, они на основе изучения одного класса полугрупп, определенных такими преобразованиями, доказали, что такие полугруппы (*а значит и* ***1-****мерные* ***ГФП)*** не могут иметь конечного базиса [324,325]. Более строго их результат сводится к следующему.

Рассматривается множество всех одномерных бесконечных *периодических* ***КФ*** в ***A***-алфавите с ***p***-периодом. Обозначая такое множество через Φ_p, вводится множество Ψ_p глобальных функций, осуществляющих взаимно однозначное отображение множества Φ_p на себя. Очевидно, что множества Ψ_p ***(p=1,2,...)*** являются подполугруппами полугруппы Ψ всех глобальных отображений $\tau^{(n)} : C(A,1) \to C(A,1)$. Показывается, что подполугруппы Ψ_p попарно различны и изолированы. Таким образом, существует бесконечная совокупность Ψ_p ***(p=1,2,3,...)*** изолированных подполугрупп полугруппы Ψ. Но алгебра с бесконечной совокупностью изолированных подалгебр, как известно, не содержит конечных систем образующих. Следовательно, полугруппа Ψ не имеет конечных систем образующих, т.е. для нее отсутствует ***конечный базис.***

Такой алгебраический подход позволяет решать проблему декомпозиции ***ГФП*** для ***ОС***-моделей только на принципиальном уровне – возможность или невозможность положительного решения ***d-ПДФ*** в классе всех ***ГФП.*** Тогда как метод исследования ***1-ПДФ*** на основе теоремы ***116*** позволяет получить более сильный результат, включающий также элементы конструктивного определения вида ***ГФП***, для которых ***ПДФ*** имеет отрицательное решение. В этом плане было бы весьма интересным распространить данный подход и на общий случай классических ***ОС***-моделей. При этом следует отметить, что предложенный нами метод решения ***1-ПДФ***, базирующийся на понятии ***∞-ВСКФ***, является существенным обобщением метода решения проблемы декомпозиции ***ГФП*** на основе результатов по проблеме неконструируемости в классических ***ОС***-моделях [54-56,536].

В следующих разделах на основе возможности полиномиального представления локальных функций перехода ***(ЛФП)*** в классических ***ОС***-моделях проводится дальнейшее обсуждение общей и обобщенной проблем ***ГФП***, а также связанных с ними вопросов по сложности ***ГФП*** и алгоритмической разрешимости проблемы их декомпозиции.

7.3. Проблема сложности глобальных функций перехода в классических ОС-моделях и вопросы ее алгоритмической разрешимости

В данном разделе на основе одного алгебраического подхода, представляющего и более широкий интерес для математической теории ***ОС***-моделей и ее весьма многочисленных приложений, рассматриваются вопросы исследования общей ***(d-ПДФ)*** и обобщенной ***(d-ОПДФ)*** проблем декомпозиции ***ГФП.*** Вопросы алгоритмической разрешимости играют в современной математике чрезвычайно важную роль и составляют широкий класс так называемых ***массовых*** задач. Ряд задач такого класса, связанных с однородными структурами, рассматривался выше. Здесь вопросы алгоритмической разрешимости относятся к обеим проблемам декомпозиции ***ГФП*** для случая классических ***ОС***-моделей. *Общая*

проблема алгоритмической разрешимости декомпозиции сводится к следующему вопросу: ***Существует ли алгоритм, состоящий в определении того, будет ли иметь положительное решение d-ПДФ и/или d-ОПДФ для произвольной d-мерной ГФП $\tau^{(n)}$, определенной в A-алфавите?*** Учитывая специфику проблемы декомпозиции, прежде всего, с прикладной точки зрения, при положительном решении данного вопроса было бы весьма желательным установление конструктивного разрешающего алгоритма. В данном направлении имеет место следующий результат, а именно: ***Для произвольной d-мерной ГФП $\tau^{(n)}$, определенной в A-алфавите, существует конструктивный алгоритм, решающий для нее как d-ПДФ, так и d-ОПДФ.*** Действительно, несложно убедиться, что для каждой конкретной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенной в ***A***-алфавите, существует *конструктивный* алгоритм, устанавливающий возможность решения для нее как ***d-ПДФ***, так и ***d-ОПДФ***. Не нарушая общности, поясним его суть для случая ***d-ПДФ*** на примере ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,\ldots,a-1\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,\ldots,n-1\}$. Для функции $\tau^{(n)}$ с ***ШС*** размера ***n*** в качестве составляющих ее декомпозицию

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)}\,\ldots\ldots\,\tau^{(n_k)} \qquad (n \geq 3;\ n_j < n) \qquad (\varphi)$$

могут выступать произвольные ***сочетания ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ при условии единого ***A***-алфавита ***(j=1..k).*** Число таких групп $\mathfrak{R}^{(p)}$ функций относительно размеров ***ШС*** конечно и равно ***n-2*** $(p\in\{2,3,4,\ldots,n-1\})$***.*** При этом, каждая из этих групп содержит по a^{a^p-1} ***(p=2..n-1) ГФП,*** чьи ***ЛФП*** определяются параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$x_1x_2x_3\ldots x_p \to x^*_1 \quad x^*_1,\quad x_j\in A\ (j=1..p)$$

С другой стороны, ввиду ***ШС*** размера ***n*** $(n\geq 3)$ для исходной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ для обеспечения представления **(φ)** допустимо лишь конечное число $\wp(n)$ сочетаний ***ГФП*** с ***ШС*** размера $< n$, зависящее от величины ***n.*** Например, для $n=4$ $\wp(4) = \#\{\tau^{(2)3}, \tau^{(2)}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(2)}\} = 3$, тогда как для $n=6$ $\wp(6)=\#\{\tau^{(2)5}, \tau^{(2)3}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(2)3}, \tau^{(3)2}\tau^{(2)}, \tau^{(2)}\tau^{(3)2}, \tau^{(4)}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(4)}, \tau^{(4)}\tau^{(2)2}, \tau^{(2)2}\tau^{(4)}, \tau^{(2)}\tau^{(5)}, \tau^{(5)}\tau^{(2)}\} = 11$, где ***#(H)*** – мощность множества ***H.*** Все допустимые сочетания легко получить только на основе размера ***n*** исходного ***ШС.*** Нижеследующий пример иллюстрирует тестирование двух допустимых сочетаний $\tau^{(3)2}\tau^{(2)}$ и $\tau^{(4)}\tau^{(2)2}$ для случая шаблона соседства размера $n = 6$, а именно.

$\tau^{(3)}$:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\tau^{(3)}$:	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		
$\tau^{(2)}$:	x''_1	x''_2				
	x^*_1					

$\tau^{(4)}$:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\tau^{(2)}$:	x'_1	x'_2	x'_3			
$\tau^{(2)}$:	x''_1	x''_2				
	x^*_1					

При этом, легко заметить, что имеет место соотношение $\tau^{(h)k}\tau^{(q)m} \equiv \tau^{(q)m}\tau^{(h)k}$, а $\tau^{(h)k} = \tau_1^{(h)}\tau_2^{(h)}\tau_3^{(h)}\ldots\tau_t^{(h)}$ $(t=1..k)$***.*** После вычисления всех возможных сочетаний $\Omega^{(n)}$ указанного вида для ***ШС*** конкретного размера ***n*** и всех возможных ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ групп $\mathfrak{R}^{(p)}$ $(p=2..n-1)$ в алфавите ***A*** разрешающий алгоритм сводится к простому (*но весьма объемному)* перебору на предмет ***приемлемости*** того либо иного сочетания из $\Omega^{(n)}$ в качестве представления **(φ)** для исходной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$***.*** Суть такой приемлемости хорошо прослеживается, например, для представлений $\tau^{(6)}=\tau^{(3)2}\tau^{(2)}$ и $\tau^{(6)}=\tau^{(4)}\tau^{(2)2}$ вышеприведенного примера посредством применения ко всем ***КФ*** $<x_1x_2x_3\ldots x_p>$ последовательно соответственно ***ГФП*** $\tau_1^{(3)}\tau_2^{(3)}\tau^{(2)}$ и $\tau^{(4)}\tau_1^{(2)}\tau_2^{(2)}$ $\left(\tau_1^{(3)},\tau_2^{(3)}\in\mathfrak{R}^{(3)};\ \tau^{(2)},\tau_1^{(2)},\tau_2^{(2)}\in\mathfrak{R}^{(2)};\ \tau^{(4)}\in\mathfrak{R}^{(4)}\right)$ с последующим сравнением полученных результатов с параллельными подстановками $x_1x_2x_3\ldots x_6 \to x^*_1$, определяющими искомую ***ГФП*** $\tau^{(6)}$***.*** При этом, при указанном тестировании в качестве

сочетаний $\tau_1^{(3)}\tau_2^{(3)}\tau^{(2)}$ и $\tau^{(4)}\tau_1^{(2)}\tau_2^{(2)}$ должны проверяться всевозможные ***ГФП*** из множеств $\mathfrak{R}^{(2)}$, $\mathfrak{R}^{(3)}$ и $\mathfrak{R}^{(4)}$. В общем случае допустимые сочетания $Sp\ \{p=1..\wp(n)\}$ из $\Omega^{(n)}$ можно вычислять из следующего определяющего соотношения, а именно:

$$(\forall n\geq 3)\left(\sum_{j=1}^{n-2} m_j(n_j-1)=n-1\right);\ \ m_j\text{ - integers};\ 0\leq m_j\leq(n-1);\ n_j\in\{2,3,...,n-1\};\ j=1..(n-2)$$

$$Sp=\tau_1^{(n_1)m_1}\tau_2^{(n_2)m_2}\tau_3^{(n_3)m_3}...\tau_h^{(n_h)m_h}$$

С учетом допустимых значений n_j (*размеров* ***ШС*** *составляющих сочетаний из* $\Omega^{(n)}$) вышеприведенное соотношение принимает следующий весьма простой вид, а именно:

$$(\forall n\geq 3)\left(\sum_{j=1}^{n-2} j*m_j=n-1\right);\ \ m_j\text{ - integers};\ \ 0\leq m_j\leq(n-1);\qquad (j=1..n-2)$$

Для целочисленного решения линейных уравнений этого типа (*диофантовых уравнений*) существует ряд методов в теории чисел, нами здесь не рассматриваемых. Очевидно, что все *неотрицательные* целочисленные решения m_j данного линейного уравнения и представляют допустимые сочетания, составляющее множество $\Omega^{(n)}$ всевозможных представлений вида (φ) для исходной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$. И в этом случае допустимые сочетания принимают следующий достаточно простой вид, а именно:

$$\tau^{(2)m_1}\tau^{(3)m_2}\tau^{(4)m_3}...\tau^{(n-1)m_{n-2}},\ \ where\ \ \tau^{(p)0}\equiv 1;\quad p=1..n-2$$

С учетом данного определяющего соотношения, в число допустимых сочетаний, содержащих более одной ***ГФП***, входят и все перестановки из составляющих их функций, например, $\{\tau^{(2)3}\tau^{(3)}\tau^{(4)2},\ \tau^{(2)3}\tau^{(4)2}\tau^{(3)},\ \tau^{(3)}\tau^{(2)3}\tau^{(4)2},\ \tau^{(3)}\tau^{(4)2}\tau^{(2)3},\ \tau^{(4)2}\tau^{(3)}\tau^{(2)3},\ \tau^{(4)2}\tau^{(2)3}\tau^{(3)}\}$. В частности, в качестве допустимых выступают сочетания следующего вида, а именно:

$$\left\langle\begin{matrix}\tau^{(2)(n-1)};\ \tau^{(2)(n-k-2)}\tau^{(k+2)},\tau^{(k+2)}\tau^{(2)(n-k-2)} & (k=1..n-3);\quad n\geq 3\\ \tau^{(p)}\tau^{(n-p+1)},\tau^{(n-p+1)}\tau^{(p)} & (p=3..]n/2[),\ where\ ]h[-\text{ integer no lesser than } h\end{matrix}\right\rangle$$

На основе сочетаний из множества $\Omega^{(n)}$ можно проводить и доказательство существования ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, не имеющих представления вида (59, φ). В качестве примера рассмотрим группы ***ГФП*** $\mathfrak{R}^{(4)}$ и $\mathfrak{R}^{(6)}$ в произвольном *A*-алфавите. Допустимые сочетания для этих групп определяются соответственно множествами $\Omega^{(4)}=\{\tau^{(2)3},\ \tau^{(2)}\tau^{(3)},\ \tau^{(3)}\tau^{(2)}\}$ и $\Omega^{(6)}=\{\tau^{(2)5},\ \tau^{(2)3}\tau^{(3)},\ \tau^{(3)}\tau^{(2)3},\ \tau^{(3)2}\tau^{(2)},\ \tau^{(2)}\tau^{(3)2},\ \tau^{(4)}\tau^{(3)},\ \tau^{(3)}\tau^{(4)},\ \tau^{(4)}\tau^{(2)2},\ \tau^{(2)2}\tau^{(4)},\ \tau^{(2)}\tau^{(5)},\ \tau^{(5)}\tau^{(2)}\}$.

$$N4=a^{a^4-1};\quad N4^*=\left(a^{a^2-1}\right)^3+a^{a^2-1}a^{a^3-1}+a^{a^3-1}a^{a^2-1}=a^{3a^2-3}+2a^{a^3+a^2-2};$$

$$N4>N4^*\equiv a^{a^4-1}>a^{3a^2-3}+2a^{a^3+a^2-2}\equiv 1>\frac{1}{a^{a^4-3a^2+2}}+\frac{2}{a^{a^4-a^3-a^2+1}};\qquad a\geq 2$$

$$N6=a^{a^6-1};\quad N6^*=\left(a^{a^2-1}\right)^5+2\left(a^{a^3-1}\right)^2a^{a^2-1}+2\left(a^{a^2-1}\right)^3a^{a^3-1}+2a^{a^4-1}a^{a^3-1}+2\left(a^{a^2-1}\right)^2a^{a^4-1}+$$
$$2a^{a^5-1}a^{a^2-1}=a^{5a^2-1}+2a^{2a^3+a^2-3}+2a^{a^3+3a^2-4}+2a^{a^4+a^3-2}+2a^{a^4+2a^2-2a-1}+2a^{a^5+a^2-2}$$

$$N6>N6^*\equiv a^{a^6-1}>\ a^{5a^2-1}+2\left(a^{2a^3+a^2-3}+a^{a^3+3a^2-4}+a^{a^4+a^3-2}+a^{a^4+2a^2-2a-1}+a^{a^5+a^2-2}\right)\equiv$$

$$1>\frac{1}{a^{a^6-5a^2}}+2*\left(\frac{1}{a^{a^6-2a^3-2a^2+2}}+\frac{1}{a^{a^6-a^3+3a^2+4}}+\frac{1}{a^{a^6-a^4-a^3+1}}+\frac{1}{a^{a^6-a^4-2a^2+2a}}+\frac{1}{a^{a^6-a^5-a^2+1}}\right)$$

Очевидно, что число всех ***ГФП*** $\tau^{(4)}$ равно ***N4***, а $\tau^{(6)}$ равно ***N6***, тогда как число всех видов допустимых сочетаний для них определяются как ***N4**** и ***N6**** соответственно. Если имеют место соотношения ***N4 > N4**** и ***N6 > N6****, то среди ***ГФП*** $\tau^{(4)}$ и $\tau^{(6)}$ будут существовать функции, не представимые в виде ***(59, φ)***. Вышеприведенные несложные выкладки это именно весьма наглядно и доказывают.

Приведенные выкладки справедливы и для общего случая ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***(n≥3)***, однако более громоздки. Вышеприведенный алгоритм решения ***d-ПДФ*** относительно несложно реализуем программно, однако и в таком случае ввиду роста мощности ***A***-алфавита и размера ***n ШС*** тестируемой ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ временные издержки становятся весьма существенны даже на достаточно мощных вычислительных кластерах. С увеличением размера ***n ШС*** растет и длина допустимых сочетаний из $\Omega^{(n)}$ в качестве представления ***(59,φ)*** для исходной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, т.е. число входящих в них ***ГФП*** из множеств $\Re^{(p)}$ ***(p=2..n-1)***. Так, для ***n = 9*** длина допустимых сочетаний $\tau^{(2)2}\tau^{(3)}\tau^{(5)}$ и $\tau^{(2)}\tau^{(3)}\tau^{(4)}\tau^{(2)2}$ равна соответственно ***3*** и ***4***.

Естественно, предложенный разрешающий алгоритм достаточно громоздок, однако он позволяет получать *(при их наличии)* все представления вида ***(59,φ)***, допустимые для данной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, т.е. дает исчерпывающее конструктивное решение проблемы. Его трудоемкость, порой, весьма существенно снижается, если ограничиться получением любого допустимого представления вида ***(59, φ)***. Не взирая на разрешимость ***d-ПДФ***, имеется и ряд более частных проблем, решение которых известно и не столь громоздко. Начнем с изложения наиболее простых случаев.

Прежде всего рассмотрим важный, особенно с прикладной точки зрения, случай специального представления произвольной ***ГФП*** при ограниченном числе представляющих ее функций в соотношении (**59**), т.е. при условии ***k<k*=const***. В связи с проблемой декомпозиции возникает весьма интересный и важный вопрос ее алгоритмической разрешимости. Для предложенного специального случая данный вопрос алгоритмически разрешим и доказательство этого факта достаточно просто [53]. При этом, разрешающий алгоритм является конструктивным и легко реализуемым уже на персональных ЭВМ [15]. Аналогичным образом можно рассматривать разрешимость ***d-ПДФ*** и для ряда других специальных случаев ***ГФП***-представления вышеуказанного вида (**59**).

В этом плане интересно рассматривать проблему декомпозиции не только относительно всего множества ***ГФП***, но и относительно ряда его подмножеств. Пусть ***GSAK*** будет множеством всех ***d***-мерных ***ГФП***, определенных в произвольном конечном ***A***-алфавите и таких, что для каждой функции $\tau^{(n)} \in GSAK$ и ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ выполняется следующее соотношение $|c| \le |c\tau^{(n)}|$, $|c|$ - максимальный диаметр произвольной ***c-КФ***. Тогда в классе ***GSAK ГФП d-ПДФ*** алгоритмически разрешима [5,54,88].

<u>Теорема 118</u>. В классе GSAK d-мерных ГФП d-ПДФ алгоритмически разрешима и для нее существует конструктивный разрешающий алгоритм.

С прикладной и ряда теоретических точек зрения большой интерес представляет проблема представления произвольной ***ГФП*** в виде ***минимальной композиции*** (**59**), когда выполняется следующее соотношение: $\Sigma_j n_j = n+k-1;\ n_j < n\ (j=1\ ..\ k)$. Для данного специального случая представления вопрос алгоритмически разрешим и доказательство его разрешимости конструктивно; при этом, разрешающий алгоритм имеет достаточно простую разрешающую компьютерную процедуру [15,56]. С проблемой декомпозиции тесно связана и так называемая проблема простейшего представления произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, состоящая в определении наименьших размеров ***ШС*** функций, входящих в представление (**59**) исходной глобальной функции. Нетрудно убедиться, что ***d-ПДФ/d-ОПДФ*** алгоритмически разрешима, если разрешима проблема и простейшего представления

произвольной ***ГФП***. Ввиду практической значимости ***d-ПДФ/d-ОПДФ*** весьма важным представляется получение существенно конструктивных разрешающих алгоритмов, позволяющих для произвольной ***ГФП*** устанавливать *невозможность* решения вышеуказанных проблем либо давать исчерпывающие решения в виде искомых конкретных разложений вида (**59**). На таком уровне разрешимости вопросы простейшего представления проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** эквивалентны.

Общая проблема алгоритмической разрешимости ***d-ПДФ*** является обобщением очень интересной более частной проблемы декомпозиции: ***Существует ли для произвольной ГФП положительное решение d-ПДФ при условии принадлежности входящих в ее представление (59) функций произвольному базовому подмножеству G множества всех глобальных функций тех же d-размерности и A-алфавита?*** В данном направлении имеет место следующий основной результат [72], имеющий целый ряд важных приложений.

Теорема 119. Относительно произвольного базового G-подмножества множества всех d-мерных ГФП, определенных в алфавите A={0,1,2,...,a-1} (a – простое), d-ПДФ алгоритмически разрешима.

В определенной степени промежуточной между *общей* и *частной* проблемами алгоритмической разрешимости ***d-ПДФ*** является проблема однозначности представления произвольной ***ГФП*** в виде композиции конечного числа более простых функций. Из результатов исследования ***d-ПДФ*** известно о наличии ***ГФП***, для которых эта проблема имеет отрицательное решение, и функций, допускающих даже более двух различных нетривиальных положительных решений проблемы. В связи с этим возникает интересный вопрос существования ***ГФП***, допускающих только единственное положительное решение ***d-ПДФ***. В этой связи можно сразу же отметить одно важное свойство ***ГФП***, составляющих единственное представление вида (**59**) исходной функции – *отрицательное* решение для каждой из них ***d-ПДФ***. Следовательно, необходимо искать такие ***ГФП*** на основе классов функций, имеющих отрицательное решение ***d-ПДФ***. Для этого достаточно рассмотреть класс ***G* ГФП***, определяемых ***ЛФП*** следующего общего вида, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j \pmod a; \quad x_j \in A, \quad a - prime \quad (j = 1 .. n)$$

Можно показать [72], что в классе таких ***ГФП*** существуют функции, допускающие только единственное положительное решение ***d-ПДФ***. Таким образом, среди всех ***d-***мерных ***ГФП***, определенных в произвольном ***A-***алфавите, можно выделить три непересекающихся класса функций относительно *возможного* решения общей ***d-ПДФ***, представляющих интерес со многих точек зрения как теоретических, так и прикладных, а именно:

- ***не имеющие положительного решения d-ПДФ;***
- ***имеющие положительные решения d-ПДФ;***
- ***имеющие единственное положительное решение d-ПДФ.***

В связи с этим возникает вопрос существования эффективной процедуры определения ***однозначности*** решения ***d-ПДФ*** для произвольной ***ГФП***. Нетрудно убедиться, что при положительном решении данного вопроса будет положительно решаться и общая проблема алгоритмической разрешимости ***d-ПДФ***.

С проблемой представимости ***ГФП*** в виде композиции конечного числа более простых функций связан и вопрос *взаимосвязи* типов неконструируемости ***ГФП*** и функций, составляющих ее декомпозицию. При этом, замкнутость множества $C(A,d,\infty)$ относительно глобального отображения, определяемого ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, играет весьма существенную роль в вопросе обладания однородной структурой (*и опосредствованно ее* ***ГФП***) типами неконструируемости ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3***. В этом направлении представляет интерес вопрос: ***действительно ли произвольная ГФП*** $\tau^{(n)}$, ***представимая в виде композиции***

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)}\,\ldots\ldots\,\tau^{(n_k)} \qquad (n \geq 3;\ n_j < n),$$

определяет глобальное отображение, относительно которого множество $C(A,d,\infty)$ является незамкнутым, тогда и только тогда, когда по меньшей мере одна из функций $\tau^{(n_j)}$ $(j=1..k)$, входящая в представление, определяет глобальное отображение, относительно которого будет иметь место незамкнутость множества $C(A,d,\infty)$. Справедливость данного утверждения послужила бы в качестве довольно важного результата для исследований в ***ОС***-проблематике в контексте ***d-ПДФ***, между тем он отрицателен.

Определенный интерес представляет вопрос влияния на свойство ***незамкнутости*** множества $C(A,d,\infty)$ относительно отображения, определяемого ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, наличия подобного свойства для ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ $(j=1..k)$, составляющих вышеуказанную декомпозицию. В основе получения ответа на данный вопрос лежит тот довольно очевидный факт, что ввиду возможного наличия неконструируемости ***НКФ***-типа для любой из ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ она вполне может обусловить неконструируемость ***КФ*** c^{∞}_j из множества $C(A,d,\infty)$ для ***ГФП*** $\tau^{(n_{j+1})}$ $j \geq 2$, что, в свою очередь, не обеспечит на ней перехода к конечной ***КФ***, а именно:

$$c^{\infty}_o\tau^{(n)} = c^{\infty}_o\tau^{(n_1)} \rightarrow c^{\infty}_1\tau^{(n_2)} \rightarrow \ldots \rightarrow c^{\infty}_{j-1}\tau^{(n_j)} \rightarrow c^{\infty}_j\tau^{(n_{j+1})} \rightarrow \ldots \rightarrow c^{\infty}_{k-1}\tau^{(n_k)}$$

Исходя из этих соображений, попытаемся найти пример *композиции*, базирующейся на указанной возможности. С этой целью рассмотрим композицию двух ***1***-мерных бинарных ***ГФП*** $\tau^{(2)}, \tau^{(3)}$, чьи ***ЛФП*** определяются следующими параллельными подстановками

$$\sigma^{(2)}(x,y) = x \vee y; \quad \sigma^{(3)}(x,y,z) = \begin{cases} x \oplus y \oplus z, & if\ x = 1 \\ z\ , & if\ x = 0 \end{cases}; \qquad x,y,z,t \in B = \{0,1\}$$

$$\sigma^{(4)}(x,y,z,t) = \begin{cases} 0, & if\ < xyzt > \in \{0000,\ 0100, 1001, 1100\} \\ 1, & otherwise \end{cases}; \quad \vee - disjunction; \oplus - XOR$$

Несложно убедиться, что для определенной таким образом ***ГФП*** $\tau^{(3)}$ имеет место соотношение: $c^{\infty}=(0101)^{\infty}$, $c^{\infty}\tau^{(3)}=\square$, т.е. $C(B,1,\infty)$ незамкнуто относительно отображения $\tau^{(3)}$. С другой стороны, можно убедиться, что для ***ГФП*** $\tau^{(4)} = \tau^{(2)}\tau^{(3)}$ не существует бесконечных ***КФ*** c^{∞} таких, что $c^{\infty}\tau^{(4)}=\square$, т.е. $C(B,1,\infty)$ замкнуто относительно отображения $\tau^{(4)}$. В то же всемя очевидно, что для незамкнутости $C(A,d,\infty)$ относительно отображения $\tau^{(n)}$, необходимо наличие незамкнутости $C(A,d,\infty)$ относительно по меньшей мере одного из отображений, определяемого ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, составляющей декомпозицию функции $\tau^{(n)}$.

Таким образом, может быть сформулирован следующий довольно интересный результат, а именно: *Для того, чтобы ГФП $\tau^{(n)}$, представимая в виде композиции вида*

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)}\,\ldots\ldots\,\tau^{(n_k)} \qquad (n \geq 3;\ n_j < n),$$

определяла глобальное отображение, относительно которого множество $C(A,d,\infty)$ является незамкнутым, необходимо (но не достаточно), чтобы по меньшей мере одна из функций $\tau^{(n_j)}$ $(j=1..k)$, входящая в представление, определяла глобальное отображение, относительно которого будет иметь место незамкнутость множества $C(A,d,\infty)$.

С вопросом однозначности решения ***d-ПДФ*** для некоторых типов ***ГФП*** тесно связано и отсутствие положительного решения ***d-ПДФ*** в общем случае. Действительно, наличие ***ГФП***, имеющих единственное представление вида (**59**), предполагает отсутствие такого представления для любой из функций, составляющих композицию исходной ***ГФП***, т.е. существование ***ГФП***, для которых ***d-ПДФ*** имеет отрицательное решение. Таким образом, именно отсутствие положительного решения ***d-ПДФ*** в общем случае обусловливает наличие ***ГФП***, допускающих ***единственное*** возможное положительное решение ***d-ПДФ***. Следовательно, любой пример ***ГФП***, имеющей единственное решение ***d-ПДФ***, доказы-

вает отрицательность решения в общем случае самой ***d-ПДФ.*** Интересные примеры такого типа ***ГФП*** можно найти в наших работах [5,53-56,88,90,536].

Теперь мы переходим к обсуждению еще одного алгебраического подхода к исследованию ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ,*** представляющего значительный интерес для изучения динамических свойств классических ***d-ОС*** вообще. В этом же контексте будут передоказаны и некоторые ранее представленные результаты по проблеме декомпозиции и приведены новые результаты, полученные благодаря именно данному подходу. В основе подхода лежит возможность представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенной в ***A***-алфавите, в полиномиальной форме следующего общего вида, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j \quad (mod\ a) \qquad (60)$$

где $b_j \in A$ и Y_j – переменная из множества $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ либо произведение степеней этих переменных. Один из основных результатов по ***a***-значным логикам ***(a > 2)*** гласит: ***любая функция a-значной логики представима полиномом по (mod a) вида (60) тогда и только тогда, когда a – простое число.*** Данный результат оказывается весьма полезным не только для представления полиномами по ***(mod a) 1***-мерных ***ЛФП,*** определенных в ***A***-алфавите. Его можно успешно использовать и для ***d***-мерных ***ЛФП,*** представляя специальным образом индекс соседства классических ***d-ОС.*** На наш взгляд, способ полиномиального представления ***ЛФП*** найдет достаточно широкое применение в математической теории ***ОС***-моделей и ее многочисленных приложениях. Здесь же он будет использован для дальнейшего исследования как общей, так и обобщенной проблем декомпозиции в классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$. Для более практического использования предложенного метода кратко рассмотрим вопрос полиномиального представления произвольной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенной в ***A***-алфавите. Теоретической основой полиномиального представления ***ЛФП*** служит следующий основной результат [5,53,88].

<u>Теорема 120</u>. Любая ЛФП $\sigma^{(n)}$***, определенная в конечном A-алфавите, представима полиномом над M от n переменных степени не выше*** $n*(a-1)$ ***тогда и только тогда, когда алгебраическая система*** $M = \langle A; +; x \rangle$ ***является полем.***

Если ***a***-число является простым, то поле $M=\langle A; +; x \rangle$ также будет простым. Так как простое поле ***M*** *изоморфно* кольцу классов вычетов кольца целых чисел по ***(mod a),*** то в этом случае мы вполне можем ограничиться только представляющими полиномами по ***(mod a).*** Следует отметить, что при $a=p^k$ ***(p -*** *простое и* $k > a$ ***-*** *любое целое)* алгебраическую систему $M=\langle A; +; x \rangle$ также можно преобразовать в поле, вводя специфические операции сложения и/или умножения, но в таком случае представляющие ***ЛФП*** полиномы над таким ***M***-полем будут довольно неудобны для исследования в плане изучения свойств локальных функций. Поэтому в случае невозможности представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ полиномами по ***(mod a)*** в целом ряде случаев целесообразно использовать несколько иные подходы. Один интересный пример *алгебраической системы* для полиномиального представления ***a***-значных логических функций при ***a***-составном приведен в теореме ***43*** и детально обсуждается в наших работах [5,84]. Задача полиномиальной представимости по ***(mod a) ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ имеет конструктивное решение для случаев ***a***-простого и ***a***-составного в среде вышеуказанной алгебраической системы [5,53-56,84], допуская эффективные компьютерные ализации, базирующиеся на следующем простом алгоритме.

Полином P_n ***(mod a),*** представляющий ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, имеет в общем случае следующий вид:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = P_n = \sum_{j=1}^{a^n} \varpi_j x_1^{j_1} x_2^{j_2} ... x_n^{j_n} \quad (mod\ a); \quad j_k, \varpi_j, x_p \in A;\ j = 1..a^n;\ k, p = 1..n \qquad (61)$$

Но тогда, используя метод неопределенных коэффициентов для определения ω_j-значе-

ний, нетрудно убедиться в наличии конструктивного способа решения задачи полиномиального представления произвольной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенной в ***A***-алфавите при ***a*** – простом. Действительно, подставляя в (**61**) упорядоченные всевозможные кортежи вида $<x_1,x_2, ..., x_n>$ значений переменных $x_p \in A$ $(p=1..n)$, получаем неоднородную систему линейных уравнений относительно ω_j-неизвестных, имеющую матричное представление

$$WX = H \ (mod\ a) \qquad (62)$$

где ***W*** – вектор-столбец ω_j-неизвестных, ***H*** – вектор-столбец значений ***ЛФП*** на всевозможных $<x_1,x_2, ..., x_n>$-кортежах значений переменных $x_p \in A$ $(p=1..n)$ и ***X*** – ***(j×j)***-матрица из значений по ***(mod a)*** на вышеуказанных кортежах.

Решение линейной системы (**62**) и позволяет получать явное представление для произвольной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ в виде полинома P_n ***(mod a)***. Данная система представляет собой систему линейных алгебраических сравнений, которую можно трактовать как систему линейных алгебраических уравнений ***WX = H*** над конечным полем ***Z/(a)***, содержащим ***a*** элементов. Число решений такой системы сравнений будет числом ***Z/(a)***-рациональных точек алгебраического многообразия, определяемого системой уравнений (**62**). Поэтому наряду с теоретико-числовыми методами к решению систем типа (**62**) высокого порядка можно применять и методы алгебраической геометрии. В работе [53] предложен весьма простой параллельный алгоритм решения систем уравнений типа (**62**) на однородных вычислительных системах под управлением пакета параллельной обработки информации ***ПСОИ*** [11,12], разработанного еще в ***1980*** в Эстонском филиале ***ВГПТИ ЦСУ СССР***.

С вопросом полиномиального представления ***ЛФП*** над ***A***-полем тесно связан и весьма интересный вопрос о ***приводимости*** этих полиномов над ***A***-полем, т.е. их возможности представления в виде произведения конечного числа более простых полиномов над ***A***-полем, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1,x_2,x_3,...,x_n) = \prod_1^k F_j(x_{j_1},x_{j_2},x_{j_3},...,x_{j_n}); \quad j_n \in \{1,2,...,n\} \quad (j=1..p; p \le n)$$

В более общей постановке данный вопрос сводится к возможности представления полинома, отвечающего некоторой ***ЛФП***, определенной в ***A***-алфавите, в виде некоторой ***F***-функции более простых полиномов или полиномов определенного типа над ***A***-полем. Данный вопрос представляет интерес как с точки зрения изучения целого ряда свойств ***ЛФП*** в классических ***ОС***-моделях, так и в плане практической реализации на их основе вычислительных и иных конструкций различного назначения [536].

Проблема разложимости представляющих полиномов по ***(mod a)*** на множители непосредственно связана с вопросами исследования динамики классических ***ОС***-моделей алгебраическими средствами. Например, если для некоторой классической ***ЛФП*** представляющий ее полином допускает разложение следующего вида, а именно:

$$P(x_1,x_2, ..., x_n) = (x_j - b)^k P_1(x_1,x_2, ..., x_n) \ \ (mod\ a); \quad j \in \{1,2, ..., n\}; \ b \in A \setminus \{0\}; \ k \ge 1$$

то соответствующая ей ***ГФП*** классической ***1-ОС*** будет обладать неконструируемостью типов ***НКФ (НКФ-3)*** и/или ***НКФ-1***. Следовательно, вопрос приводимости представляющих ***ЛФП*** полиномов представляется достаточно важным средством анализа динамики классических ***ОС***-моделей. Однако, практическое использование его весьма затрудняется тем, что для произвольного числового ***A***-поля строение ***неприводимых*** над ***A*** полиномов очень разнообразно и не существует каких-либо общих методов, устанавливающих *приводимость* либо *неприводимость* полиномов от $n > 1$ переменных. Это, отчасти, может быть объяснено тем фактом, что для каждого ***A***-поля существуют неприводимые над ним полиномы от $n > 1$ переменных любой наперед заданной степени. Поэтому при решении проблемы определения *приводимости* полиномов часто приходится использо-

вать весьма искусные приемы либо решать задачи динамики классических ***ОС***-моделей иными, более приемлемыми методами [5,15,53-56,82,88,90,536].

Среди множества всех полиномов над ***A***-полем можно выделять ряд интересных классов. Особую роль играют полиномы, в нормальной форме которых все слагаемые одночлены имеют относительно совокупности переменных одну и ту же степень. Такие полиномы называются ***однородными*** или ***формами***. Интерес к формам объясняется их особым значением для ряда вопросов из различных областей математики, включая также области прикладного назначения. Изучение форм основывается обычно на том, что их выражения могут быть существенно упрощены при помощи замены переменных, что позволяет достаточно эффективно проводить изучение свойств соответствующих им ***ЛФП*** классических ***ОС***-моделей [5,15,53-56,74,82,88,90,536].

Еще один интересный класс составляют симметрические полиномы. Полином от $n > 1$ переменных над ***A***-полем называется ***симметрическим***, если он не изменяется ни при каких обратимых перестановках его существенных переменных. Хорошо известно, что множество всех симметрических полиномов от n переменных образует подкольцо кольца всех полиномов от n переменных над ***A***-полем. Для наших же целей особый интерес представляет случай, когда полином над ***A***-полем представим сложной функцией в виде полинома от симметрических полиномов. При этом особую роль играют симметрические полиномы над ***A***-полем, называемые ***элементарными*** полиномами, а именно:

$$p_k(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{1}^{r} R_j(k,x_1,x_2,...,x_n); \qquad r = C_n^k / k!$$

$$p_1(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j; \qquad p_n(x_1,x_2,...,x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j$$

где $R_j(k,x_1,x_2,...,x_n)$ – всевозможные, различные с точностью до симметрии, размещения из элементов $\{x_1,x_2,...,x_n\}$-множества по k. Например, элементарные полиномы $\{P_1, P_n\}$ имеют представленный выше вид. Основным здесь является следующий результат: ***Любой симметрический полином над A-полем может быть представлен лишь единственным образом в виде полинома от элементарных симметрических полиномов*** P_k $(k=1..n)$.

Для практического решения данной задачи можно использовать метод неопределенных коэффициентов, применяя его к элементарным симметрическим полиномам, на которые разлагается любой симметрический полином.Например, симметрический полином $S(x_1,x_2,x_3) = \Sigma X_j^3 \ (mod\ a)\ (j=1\ ..\ 3)$ имеет представление вида: $S(x_1,x_2,x_3) = P_1^3 - 3P_1P_2 + 3P_3 \ (mod\ a)$. Теория *симметрических* полиномов, в основе которой лежит вышеприведенный основной результат, имеет многочисленные применения в различных вопросах теории полиномов. Причины, объясняющие роль *симметрических* полиномов, лежат очень глубоко и с полной ясностью обнаруживаются лишь при изучении свойств *автоморфизмов* алгебраических полей. В контексте ***ТОС***-проблематики симметрические полиномы, определяющие *симметричные* ***ЛФП (ГФП)*** классических ***ОС***-моделей, также представляют повышенный интерес, ибо такого типа ***ОС***-модели при определенных условиях обладают, в частности, свойством *универсальной* или *существенной* воспроизводимости по Муру конечных ***КФ***. Наряду с этим ***ОС***-модели с *симметричными* ***ГФП*** представляют большой как сугубо теоретический, так и прикладной интерес в биологических, математических, физических и вычислительных науках, а также в ряде других приложений [54,88,536].

Класс *элементарных симметрических полиномов* ***(ЭСП)*** от n переменных над ***A***-полем достаточно тесно связан с проблемой декомпозиции ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях. Обозначим класс ***ГФП*** классических ***1-ОС***, ***ЛФП*** которых представимы ***ЭСП***, через $\Psi(n,a)$. Нетрудно убедиться, что любая ***ГФП*** $\tau_j^{(n)} \in \Psi(n,a)$, кроме первой (P_1) и последней (P_n),

имеет по крайней мере следующее общее представление, а именно:

$$\tau_j^{(n)} = \tau_1^{(n-j+1)}\tau_j^{(j)};\quad \tau_j^{(n)} \in \psi(j,a);\quad \tau_1^{(n-j+1)} \in \psi(n-j+1,a)$$

$$\sigma_1^{(n-j+1)}(x_1,x_2,...,x_{n-j+1}) = \sum_1^{n-j+1} x_k \pmod a;\quad \sigma_j^{(j)}(x_1,x_2,...,x_j) = \prod_1^{j} x_k \pmod a \quad (1<j<n)$$

Вопрос представимости первой ***ГФП*** из ***Ψ(n,a)-***множества довольно детально обсуждался в разделе ***7.1.*** А так как произведение есть своего рода аналог операции сложения**,** то результаты для функции $\tau_1^{(n)} \in \Psi(n,a)$ довольно легко распространяются и на функцию $\tau_n^{(n)} \in \Psi(n,a)$**.** Для каждого целого $n \geq 2$ ***ГФП*** $\tau_1^{(n)}$ и $\tau_n^{(n)}$ будем называть ***базисными*** функциями множества ***E(n,a)*** *всех симметричных* ***ГФП*** от не выше**,** чем ***n*** переменных в ***A-***алфавите. Следовательно, каждая ***ГФП*** $\tau_j^{(n)} \in E(n,a)$**,** кроме базисных, представима в виде композиции двух ***базисных*** функций $\tau_1^{(n-j+1)}\tau_j^{(j)}$ **(1<j<n).** В свою очередь, произвольная ***базисная*** функция из ***E(n,a)-***множества не всегда представима в виде композиции более простых базисных функций**.** Вышесказанное позволяет сформулировать следующий достаточно интересный результат [5,53-56,82,88,90,536].

<u>Теорема 121</u>. Каждая ГФП $\tau^{(n)} \in E(n,a)$, кроме базисных, представима в виде композиции $\tau_1^{(n-j+1)}\tau_j^{(j)}$ (1<j<n) двух более простых базисных функций. Произвольная базисная функция из E(n,a)-множества не всегда имеет подобное представление.

Вышепредложенный метод полиномиального представления ***ЛФП*** от ***n*** переменных над ***A-***полем при ***простом a*** естественно распространяется и на бинарный случай, т.е. при ***a=2.*** Действительно, любая бинарная ***ЛФП*** является булевой функцией, сохраняющей константу ноль. Для дальнейшего нам понадобится ряд понятий и определений.

<u>Определение 29</u>. Элементарная конъюнкция называется монотонной, если она не содержит отрицаний переменных; формула следующего общего вида, а именно:

$$P(x_1,x_2,x_3,...,x_n) = \sum_{k=1}^{s} \Theta_k \pmod 2$$

где Θ_k (k=1 .. s) – попарно различные монотонные элементарные конъюнкции над множеством всевозможных бинарных кортежей $<x_1,x_2,x_3,...,x_n>$, представляет полином Жегалкина. Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в такой полином, называется степенью полинома Жегалкина.

Из теории булевых функций хорошо известно, что каждая булева функция представима соответствующим полиномом ***Жегалкина,*** т.е. каждая бинарная ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ однозначно представима полиномом ***Жегалкина*** от ***n*** переменных степени не выше, чем ***n.*** Для построения полинома ***Жегалкина,*** реализующего произвольную бинарную ***ЛФП,*** используется ряд методов, среди которых можно выделить метод неопределенных коэффициентов**,** подобный случаю ***a-***значных логик**.** Другой метод**,** предложенный в работе [53] и имеющий компьютерную реализацию, может служить основой и для доказательства возможности представления произвольной булевой функции полиномом ***Жегалкина.***

В более общей постановке следует иметь в виду, что бинарные ***ОС-***модели удобнее всего исследовать в рамках так называемой ***алгебры Жегалкина,*** являющейся разновидностью алгебры логики [326]. Это объясняется тем фактом**,** что в ***алгебре Жегалкина*** *каждая* функция алгебры логики от ***n*** переменных *однозначно* представима приведенным полиномом от x_k-переменных не выше первой степени, тогда как его c_k-коэффициенты являются элементами бинарного ***{0,1}-***поля ***(k=1..n).*** Операции над *приведенными* полиномами производятся подобно случаю обычных полиномов с целочисленными коэффициентами. И именно эта близость ***алгебры Жегалкина*** обычной элементарной алгебре

полиномов объясняет ее преимущества с методической точки зрения, а также упрощает ряд исследований бинарных ***ЛФП***, представимых такими полиномами. Более того, ***алгебра Жегалкина*** допускает естественное обобщение на случай ***a***-значных логик, если ***a*** – степень простого числа. Это позволяет довольно эффективно применять аппарат теории полиномов над конечными полями к исследованиям как ***a***-значных логик, так и ***ОС***-моделей в случае более общих типов ***A***-алфавита их внутренних состояний.

Рассмотрим ***SV***-множество всех ***симметрических ГФП*** $\tau^{(n)}$ $(n \geq 2)$, определенных в произвольном ***A***-алфавите и не обладающих неконструируемостью типов ***НКФ*** и ***НКФ-3***. В этом случае нетрудно убедиться, что ***SV***-множество образует ***полугруппу*** относительно операции композиции. Согласно гипотезы, сформулированной в разделе ***3.2***, каждая из ***ГФП SV***-множества обладает свойством универсальной *воспроизводимости*; ***ГФП*** $\tau^{(2)} \in SV$ определяется ***ЛФП*** вида $\sigma^{(2)}(x_1,x_2)=x_1+x_2 \ (mod\ a);\ x_1, x_2 \in A=\{0,1,....,a-1\}$ $(a \geq 2)$. Следовательно, для каждого целого $m \geq 3$ существуют ***ГФП*** $\tau^{(m)} \in SV$, представимые в виде композиции $\tau^{(m)} = \tau^{(m-1)}\tau^{(2)}$, где $\tau^{(2)}, \tau^{(m-1)} \in SV$. С другой стороны, можно показать, что ***ГФП*** $\tau^{(n)} \in SV$, определяемые *линейными* ***ЛФП*** следующего вида $\sigma^{(n)}(x_1,x_2,...,x_n)=\Sigma_k\, x_k \ (mod\ a)$, не представимы в виде композиции более простых функций из ***SV***-множества. Следовательно, ***SV***-полугруппа ***ГФП*** не имеет конечной системы ***образующих*** элементов.

Для установления факта обладания произвольной классической ***1-ОС***, заданной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, свойством универсальной воспроизводимости *(с учетом сказанного и упомянутой гипотезы)* можно использовать следующий конструктивный алгоритм. Очевидно, что *симметричность* произвольной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ устанавливается конструктивно. Также конструктивно устанавливается выполнение для нее следующих базовых соотношений:

$$(\forall <x_1x_2...x_{n-1}>)(\forall x, y \in A)(x \neq y \Rightarrow \sigma^{(n)}(x_1x_2...x_{n-1},x) \neq \sigma^{(n)}(x_1x_2...x_{n-1},y)) \qquad (63)$$

Если ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ удовлетворяет соотношениям (**63**), то согласно определения *7* соответствующая ей ***ГФП*** не будет обладать парами ***ВСКФ***, а значит *(согласно теореме **7**)* и неконструируемостью типов ***НКФ*** и ***НКФ-3***. С другой стороны, на основе соотношений (**63**) легко убедиться, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\forall <x_1x_2...x_{n-1}>)(E!x)(\sigma^{(n)}(x_1x_2...x_{n-1},x) = 0),$$

на основе которого легко доказывается возможность построения на основе ненулевого кортежа $<x_1x_2...x_{n-1}x_n>$ такого, что $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_{n-1},x_n)=0$ *(ввиду вышеуказанных условий)*, бесконечной *вправо* ***КФ*** $c^{\infty} \in C(A,1,\infty)$ такой, что будет справедливым следующее определяющее соотношение $c^{\infty}\tau^{(n)} = \square$, а именно:

$$c^{\infty} = \overbrace{x_1x_2x_3.....x_{n-1}x_nx_{n+1}}x_{n+2}\ .....$$
$$\tau^{(n)}: \quad \Downarrow\underbrace{\qquad\qquad}$$
$$\square = 0\,0\,0\,0.....0.....$$

Следовательно, согласно теоремы *18* определенная вышеуказанным способом классическая ***1-ОС*** будет обладать неконструируемостью типа ***НКФ-1***. Другой способ доказательства, представляющий самостоятельный интерес, сводится к следующему. Для классических ***1-ОС*** с *симметрическими* ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, удовлетворяющими соотношениям (**63**), имеют место следующие определяющие соотношения, а именно:

$$(\forall x \in A \setminus \{0\})(\sigma^{(n)}(0, 0, 0, ..., 0, x) = \sigma^{(n)}(x, 0, 0, 0, ..., 0) \neq 0)$$

на основе которых легко убедиться в том, что для каждой ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ ***ГФП*** структуры генерирует последовательность $<c>[\tau^{(m)}]$ ***КФ*** строго возрастающей длины. Из данного факта, в частности, следует обладание структурой неконструируемостью типа ***НКФ-1*** при отсутствии для нее ***НКФ*** и ***НКФ-3***. Согласно вышеуказанной гипотезе ***Art***-множес-

тво симметрических ***ГФП***, ***ЛФП*** которых удовлетворяют соотношениям (**63**), обладает и общим свойством *универсальной воспроизводимости* конечных ***КФ*** и образует полугруппу относительно операции *композиции*, не имеющую конечной системы образующих. Сказанное и завершает доказательство существования *конструктивного* алгоритма, который позволяет по виду ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ классической ***1-ОС*** идентифицировать принадлежность ее к ***SV***-множеству структур, обладающих общим свойством универсальной воспроизводимости конечных ***КФ***. Однако, следует иметь в виду, что данный алгоритм не позволяет исчерпывающе идентифицировать все ***SV***-множество, что требует дополнительного исследования. Требование обязательности отсутствия для классической ***1-ОС*** с симметрическими ***ГФП*** неконструируемости ***НКФ***-типа действительно актуально ввиду наличия такого типа структур. Так, например, классическая ***1-ОС***, определенная *симметрической* ***ЛФП*** следующего простого вида, а именно:

$$000 \Rightarrow 0 \quad 001 \Rightarrow 1 \quad 010 \Rightarrow 0 \quad 011 \Rightarrow 1 \quad 100 \Rightarrow 1 \quad 101 \Rightarrow 1 \quad 110 \Rightarrow 1 \quad 111 \Rightarrow 1$$

с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, обладает парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что исключает для нее возможность обладания свойством универсальной воспроизводимости.

На основе соотношений (**63**) может быть сформулирован результат, полезный во многих рассмотрениях классических ***1-ОС***, а именно: ***классическая 1-ОС, определенная для произвольных A-алфавита и X-индекса соседства, ЛФП которой удовлетворяет соотношениям (63), будет обладать неконструируемостью типа НКФ-1 при отсутствии для нее неконструируемости типов НКФ и НКФ-3.***

Используя возможность полиномиального представления произвольной ***ЛФП***, определенной в алфавите $A=\{0,1,2,...,a-1\}$ (a – *простое либо* $a=2$), можно не только передоказать, обобщить или уточнить целый ряд ранее полученных по проблеме декомпозиции ***ГФП*** результатов, но и существенно продвинуть исследования в данном направлении. Так, на основе исследования ***GSAK***-класса ***ЛФП***, представимых полиномами вида:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = g\sum_{k=1}^{k=n} x_k \qquad (mod\ a), \qquad g \in A$$

над ***A***-полем, и класса всех бинарных ***ЛФП***, представимых полиномами ***Жегалкина***, можно получить следующий основной результат, выражаемый теоремой [5,53,88].

<u>Теорема 122</u>. При простых положительных целых a и n каждая ЛФП $\sigma^{(n)} \in GSAK$ ***непредставима суперпозицией конечного числа более простых функций в том же алфавите*** $A=\{0,1, ..., a-1\}$. ***Для каждого простого*** $n \geq 2$ ***существует бинарная локальная функция*** $\sigma^{(n)}$, ***не представимая суперпозицией конечного числа более простых ЛФП в том же бинарном B-алфавите структуры.***

Из доказательства данной теоремы следует, что на основе представления ***ЛФП*** полиномами по ***(mod a)***, кроме случая ***a***-составного, можно получать *конструктивные* решения проблемы декомпозиции ***ГФП*** без использования вышерассмотренного понятия ***базиса***. Более того, на основе данной теоремы легко доказывается и само отсутствие конечного базиса для множества всех глобальных функций ***ОС***-моделей. С учетом сказанного, получаем общий критерий решения проблемы декомпозиции произвольной ***ГФП***, определенной в конечном ***A***-алфавите ***(a –*** *простое)* [5,53-56,82,88,90,536].

<u>Теорема 123</u>. ГФП $\tau^{(n)}$ ***представима в виде композиции конечного числа более простых глобальных функций в том же A-алфавите тогда и только тогда, когда соответствующий ей полином*** $P_n\,(mod\ a)$ ***может быть представлен суперпозицией полиномов следующего общего вида, а именно:***

$$P_{n_k}(P_{n_{k-1}}(P_{n_{k-2}} \ ..... \ (P_{n_1}) \ ..... \ ))) \quad (mod\ a); \qquad n_j < n,\ j = 1..k$$

Однако метод решения проблемы декомпозиции на основе данного критерия при достаточно большом числе переменных содержит в себе, порой, непреодолимые трудности, хотя в простых случаях может оказаться весьма эффективным средством [15,53-56]. Так как предложенный метод исследования ***ОС***-моделей базируется на основе полиномиального представления ***ЛФП*** над ***A***-полем, то в дальнейшем под алфавитами A_p и A_c будем понимать множество ***A={0,1, ..., a-1}*** соответственно с простым и составным ***a***-числом. Все до сих пор сказанное относительно данного алгебраического подхода относится именно к A_p-алфавиту. Представим теперь ряд новых результатов по общей ***(d-ПДФ)*** и обобщенной ***(d-ОПДФ)*** проблемам декомпозиции ***ГФП***, полученным на основе полиномиального представления над A_p-полем соответствующих им ***ЛФП*** [54-56,88,90,536].

<u>Теорема 124</u>. В общем случае d-ОПДФ для произвольной ГФП имеет отрицательное решение, исключая сугубо тривиальные случаи.

Из представленного результата следует, что снятие ограничения на входящие в декомпозицию ***ГФП*** функции в представлении (**59**) не изменяет, в общем случае, отрицательности решения проблемы такого типа декомпозиции. Так как в общем случае проблемы ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ неэквивалентны***, то следующий результат представляет особый интерес, прежде всего, с теоретической точки зрения [5,53-56,82,88,90,536].

<u>Теорема 125</u>. Если для некоторой d-мерной ГФП проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ эквивалентны, то для нее обе они и алгоритмически разрешимы.

Рассмотрение проблемы декомпозиции во всей ее общности для ***ГФП***, определенных в A_p-алфавите, позволяет получить следующий важный результат [5,54-56,88,90,536].

<u>Теорема 126</u>. Для любой d-мерной ГФП, определенной в A_p-алфавите, проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ эквивалентны и алгоритмически разрешимы.

Результат теоремы ***126*** позволяет получать ответы на ряд вопросов, поставленных в работе [53]. Более того, результаты теорем ***125***, ***126*** показывают, что структура ***A***-алфавита ***ОС***-модели имеет весьма существенное значение для вопроса эквивалентности ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ***. А именно, для случая A_p-алфавита имеет место эквивалентность и разрешимость обоих проблем, тогда как в общем случае A_c-алфавита эти проблемы, вообще говоря, неэквивалентны, а вопрос их разрешимости открыт до сих пор. На основе результатов теорем ***125*** и ***126*** можно доказать следующий важный результат, позволяющий в значительной мере прояснять взаимосвязь решения проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** для общего случая алфавита ***A={0,1,2,...,a-1}*** ***(a –*** *простое)*. Данный результат дает конструктивное решение обоих проблем декомпозиции ***ГФП*** [5,54-56,82,88,90,536].

<u>Теорема 127</u>. Для произвольной d-мерной ГФП $\tau^{(n)}$, определенной в A_p-алфавите, d-ПДФ и d-ОПДФ имеют положительные решения тогда и только тогда, когда исходная $\tau^{(n)}$-функция представима в виде композиции $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(q)}$ $(m, q < n; m + q - 1 = n)$ двух более простых d-мерных функций, определенных в том же самом A_p-алфавите внутренних состояний структуры.

Непосредственно с вопросами общей проблемы декомпозиции абстрактных автоматов связана и проблема оптимизации, которая в случае классических ***ОС***-моделей имеет два основных аспекта, а именно: ***(1) декомпозиция произвольной ГФП на конечное число наиболее простых функций и (2) декомпозиция произвольной ГФП на минимальное число более простых функций***. Нетрудно убедиться, что при наличии конструктивного разрешающего алгоритма (теорема ***127***) второй аспект проблемы минимизации имеет положительное решение, тогда как первый требует дальнейших исследований. При этом, из теоремы ***127*** можно получить следующий достаточно интересный результат [54-56,90].

Теорема 128. Для любого целого $n \geq 3$ существуют d-мерные ГФП $\tau^{(n)}$, определенные в A_p-алфавите, для которых проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ эквивалентны и обе имеют отрицательное решение.

Данный результат представляет еще одно доказательство отрицательности решения как ***d-ПДФ***, так и ***d-ОПДФ*** в общем случае. При этом, на основе доказательства теоремы ***128*** можно решить интересный вопрос об оценке числа ***ГФП***, определенных в A_p-алфавите, для которых обе проблемы ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** имеют положительные решения. Исследование данного вопроса резюмирует нижеследующий основной результат, представляющий и самостоятельный интерес для ***ТОС***-проблематики [5,54-56,71-75,88,90,536].

Теорема 129. Для «почти всех» d-мерных ГФП, определенных в A_p-алфавите, обе проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ имеют отрицательное решение.

Таким образом, получаем довольно неожиданный результат: ***Доля всех d-мерных ГФП, определенных в A_p-алфавите и допускающих положительные решения как d-ПДФ, так и d-ОПДФ, равна нулю.*** Следовательно, относительно операции композиции множество всех ***d***-мерных ***ГФП***, определенных в A_p-алфавите, оказывается довольно четко дифференцированным и имеет хорошие предпосылки для определения в нем соответствующей иерархии сложности входящих в него глобальных функций перехода.

7.4. Проблема сложности глобальных функций перехода в классических ОС-моделях

Из наших предыдущих результатов исследования ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** можно относительно несложно установить, что среди всех ***d***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ $(n \geq 2)$, определенных в A_p-алфавите, относительно проблем *декомпозиции* имеет место бесконечная иерархия сложности ***ГФП***. Будем говорить, что ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ находится на ***s-уровне сложности*** [*обозначение:* $\tau^{(n)} \in L(s)$] тогда и только тогда, когда для нее существует представление следующего определяющего вида, а именно:

$$\tau^{(n)} = \tau_1^{(n_1)} \tau_2^{(n_2)} \tau_3^{(n_3)} \ \ldots\ldots \ \tau_k^{(n_k)} \qquad (n_j \leq s < n) \quad (\exists j)(n_j = s)$$

и отсутствует аналогичное представление при условии $(\exists j)(n_j > s)$ $(j=1..k)$. При этом, если для некоторой ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***d-ПДФ (d-ОПДФ)*** имеет отрицательное решение, то такую функцию будем относить к классу ***L(n)-сложности.*** С учетом представленных выше результатов, определений и доказательства теоремы ***129*** можно получить [54-56,73] следующие асимптотические соотношения, имеющие целый ряд важных применений:

$$(\forall s \geq 2)(\#L(s) > 0); \quad \lim_{s \to \infty} \#L(s) / a^{a_s} \geq 1 \qquad (a - \textit{prime number})$$

где #G – мощность произвольного конечного G-множества

Более того, на основе теоремы ***126*** и определения понятия сложности ***d***-мерных ***ГФП*** относительно проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** имеет место следующий важный результат по разрешимости уровней сложности глобальных функций перехода классических ***ОС***-моделей [54-56,73], представляющий, прежде всего, теоретический интерес в случае исследования алгоритмических свойств динамики классических ***ОС***-моделей как концептуальных моделей пространственно-распределенных динамических систем [79,88,90,536].

Теорема 130. Проблема определения принадлежности произвольной d-мерной ГФП, определенной в A_p-алфавите, к s-уровню сложности алгоритмически разрешима.

На основе введенного нами понятия сложности ***ГФП*** относительно проблемы ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** можно получать интересные характеристики глобальных функций [10,54-56]. Из приведенных выше результатов видно, что мы существенно использовали алгебраические свойства A_p-алфавита, так как произвольная ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ может быть однозначно представлена полиномом по ***(mod a)*** максимальной степени ***n(a-1)*** над A_p-полем, и наоборот. Тогда как в случае A_c-алфавита далеко не каждую ***ЛФП,*** определенную в такого типа алфавите, можно представить в полиномиальной форме указанного выше вида. А именно, имеет место следующий основной результат [5,54-56,73-75,88,90,536].

Теорема 131. Для любого конечного A_c-алфавита доля (H) локальных функций $\sigma^{(n)}$, определенных в такого типа алфавите и допускающих полиномиальное представление по (mod a), удовлетворяет следующему определяющему соотношению, а именно:

$$\frac{1}{a^{a^n-4^n}} \leq H \leq \frac{1}{a^{a^n-(a-2)^n}}$$

Из данного результата следует, что для случая ***a***-составного «***почти все***» ***ЛФП,*** определенные в A_c-алфавите, ***не представимы*** в ***полиномиальной*** форме по ***(mod a)*** для достаточно больших значений параметров ***n*** и/или ***a.*** В этой связи нами был сформулирован следующий вопрос [53]**:** ***возможно ли определить алгебраическую систему, в рамках которой допускалось бы полиномиальное представление произвольной ЛФП, определенной в A_c-алфавите?*** В результате проведенного анализа был предложен пример такой *алгебраической системы* ***(AC)*** [84] ***(****теорема* ***43),*** в которой «***почти все***» ***ЛФП,*** определенные в A_c-алфавите, *однозначно* представимы полиномами по ***(mod a).*** На основе доказательств теорем ***125, 126*** и теоремы ***43*** (**34**) был получен следующий интересный результат относительно проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** в случае общего A_c-алфавита внутренних состояний единичных автоматов ***ОС***-моделей [54-56,73-75,79], представляющий большой теоретический интерес для ***ТОС***-проблематики в целом, а именно.

Теорема 132. Относительно «почти всех» ГФП, определенных в A_c-алфавите, чьи ЛФП допускают полиномиальное представление вида (34), проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ эквивалентны и алгоритмически разрешимы.

Таким образом, на основе теорем ***43*** и ***132*** вышепредставленные результаты исследования проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** распространяются и на «***почти все***» ***ГФП,*** определенные в A_c-алфавите. Однако, не взирая на это мы не можем пока распространить полученные в данном направлении результаты на общий случай ***A***-алфавита, что требует дополнительных исследований. Завершая на этом рассмотрение основных результатов по проблеме декомпозиции ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях, кратко обсудим ряд вопросов, представляющих интерес для дальнейших исследований в данном направлении.

Наряду с предложенным выше алгебраическим методом исследования ***ТОС***-проблематики на основе полиномиального представления ***ЛФП*** к их формальным исследованиям могут быть привлечены методы и результаты по алгебраической теории многозначных логик [327], в частности итеративные алгебры Поста. Интересно также было бы определить и исследовать класс *нетрадиционных* алгебраических систем**,** в рамках которых возможны удовлетворительные представления ***ЛФП,*** определенных в произвольном ***A***-алфавите. Так например, в качестве элементов ***A***-алфавита можно выбирать объекты, изучаемые в алгебраической теории чисел **(***круговые целые***,** *дивизоры и др***.),** а также использовать результаты и методы развитой алгебраической теории чисел [328,536].

Наряду с представлением ***ГФП,*** базирующимся на операции композиции, интересен и ряд других представлений**,** довольно полезных во многих теоретических исследованиях

классических ***ОС***-моделей и их прикладных аспектов. Один пример такого представления рассмотрен в работах [53-56], где для ***ГФП*** определена новая операция ***⊕-сложения***, относительно которой множество всех глобальных функций $\tau^{(n)}$ $(n \geq 2)$ образует конечную аддитивную группу с нулевым элементом. Введение операции ⊕-сложения позволяет расширить возможности представления ***ГФП*** через более простые функции, ибо обычная операция композиции не дает возможности в общем случае получать положительные решения ***d-ПДФ/d-ОПДФ*** для весьма широкого класса глобальных функций. Поэтому было бы весьма интересным определить такой набор возможно более простых операций (*учитывающих именно специфику параллельного функционирования наряду с основными прикладными аспектами классических* ***ОС***-*моделей*), которые давали бы возможность получать для каждой либо «***почти всех***» ***ГФП*** конечные представления их через более простые либо базовые глобальные функции перехода.

Проблема декомпозиции ***ГФП*** имеет место и для других интересных типов ***ОС***-моделей. В частности, для однородных структур на разбиении (***ОСнР***; см. раздел ***1.2) d-ПДФ*** подобно классическим моделям имеет в общем случае отрицательное решение, что подтверждается целым рядом примеров [90]. Однако более детальное исследование данной проблемы для случая ***ОСнР***-моделей встречает определенные затруднения, связанные, в первую очередь, с блочной переразметкой Z^d-пространства [536].

На абстрактном уровне *декомпозиция* сложной ***ОС***-модели соответствует параллельной, последовательной или смешанной работе более простых однородных структур, т.е. сводится к разложению исходной ***ОС***-модели по операциям умножения, сложения, суперпозиции либо по некоторым другим, полезным с теоретической и/или прикладной точек зрения, операциям. Задать некоторую операцию на множестве ***ОС***-моделей – значит указать правило, по которому любым двум структурам из данного множества ставится в соответствие третья структура из этого же множества, тогда как равенство ***ОС***-моделей почти всегда понимается с точностью до изоморфизма. В этой связи можно рассматривать несколько видов декомпозиции ***ОС***-моделей, что в определенной мере и сделано в настоящей главе. Проблема декомпозиции в общем случае ***ОС***-моделей представляет большой интерес со многих точек зрения, но особенно она интересна при исследовании ***ОС***-моделей как самостоятельного формального объекта, а также, прежде всего, при использовании ***ОС***-концепции в качестве основы вычислительных моделей высокопараллельных вычислений и обработки информации.

Наряду с рассмотренной операцией ***композиции*** глобальных функций перехода в ряде случаев целесообразно рассматривать и другие операции, например, операцию ***⊕–суммирования*** конечного числа ***ГФП***, определенных в алфавите $A=\{0,1,\ldots,a-1\}$. Не нарушая общности, рассмотрим ***1***-мерный случай и определяем ⊕-операцию ***суммирования ГФП*** следующим образом. Алфавит A^* состояний ***1-ОС*** структурируется на ***p***-уровнях (*по количеству слагаемых*), а ***ЛФП*** с индексом соседства $X=\{0,1,\ldots,n\}$ определяется как

$$\begin{bmatrix} x_1^1 x_2^1 \ldots x_n^1 \\ x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^p x_2^p \ldots x_n^p \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^{(n)}(x_1^1 x_2^1 \ldots x_n^1) \\ \sigma_2^{(n)}(x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_p^{(n)}(x_1^p x_2^p \ldots x_n^p) \end{bmatrix} \qquad A^* = \left\{ \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \ldots\ldots \\ y^p \end{bmatrix} \equiv \left[y^1 / y^2 / \ldots / y^p \right] \middle| \, y^j \in A;\ j = 1..p \right\}$$

Очевидно, представленная таким образом структура имеет алфавит мощности $\#A^*=a^p$, в котором [***0/0/../0***] определяется состоянием покоя. Несложно убедиться, что относительно каждой ***КФ*** вида **<0/0/../cʲ/../0>** $\{c^j \in C(A,1,\phi)\}$ определенная таким образом структура отражает динамику структуры-слагаемого с ***ГФП*** $\tau_j^{(n)}$ $(j=1..p)$. Следовательно, структура, определяемая ⊕–суммой ***ГФП*** $\tau_1 \oplus \tau_2 \oplus \ldots \oplus \tau_p$, обладает всеми свойствами, присущи-

ми каждой структуре-слагаемому, а также набором дополнительных свойств, определяемых совокупным действием слагаемых, ее составляющих. Например, пусть некоторая ***ГФП*** τ_1 из ***КФ*** $c_0 \in C(A,1,\phi)$ генерирует периодическую последовательность конфигураций с периодом d_1, а ***ГФП*** τ_2 из ***КФ*** $c_1 \in C(A,1,\phi)$ – периодическую последовательность с периодом d_2. Тогда ***ГФП*** $\tau_1 \oplus \tau_2$ из ***КФ*** $<c_0/c_1>$ будет дополнительно генерировать периодическую последовательность ***КФ*** с периодом $d = НОК(d_1, d_2)$, где ***НОК*** – наименьшее общее кратное. В работе [54] представлены более сложные и интересные примеры применения $\oplus$–операции наряду с рядом других операций над глобальными функциями перехода. На этом завершается обсуждение полученных нами основных результатов по проблеме декомпозиции ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях, в основе своей и решающих данную проблему, и определяющих ряд вопросов для дальнейших исследований.

7.5. Специальные вопросы исследований в ТОС-проблематике

В предыдущих разделах книги рассматривались наиболее общие и фундаментальные вопросы динамики классических ***ОС***-моделей, однако в ***ТОС***-проблематике существует целый ряд и более специальных вопросов, представляющих в той или иной степени и самостоятельный интерес. В данном разделе рассматриваются некоторые из таких вопросов; при этом, при отнесении рассматриваемых вопросов к классу ***специальных*** мы руководствовались не только своими личными интересами и вкусом, но и сложившейся к настоящему времени определенной традицией в данном направлении [536].

Исследование ***ГФП*** и сохраняемых ими свойств конфигураций мотивируется как разнообразием прикладных аспектов классических ***ОС***-моделей, так и различными теоретическими рассмотрениями. Установление класса ***ГФП***, сохраняющих заданное свойство ***ОС***-модели, в определенной мере характеризует данное свойство и помогает получать по нему интересные результаты. С другой стороны, зная, что определенная ***ГФП*** либо целый их класс сохраняют некоторое множество свойств соответствующих им ***ОС***-моделей, можно получать определенную характеристику таких глобальных параллельных преобразований. В частности, ***Т. Остранд*** [133] изучал вопрос сохранения глобальным $\tau^{(n)}$-преобразованием некоторых свойств конфигураций, где под *свойством* понималось некоторое подмножество ***C(A,d)***-множества всех ***КФ***, допускаемых классической ***ОС***-моделью. В основу данного исследования было положено следующее понятие сохранимости свойства: ***свойство G сохраняется ГФП, если G-множество замкнуто относительно $\tau^{(n)}$-преобразования, определяемого данной ГФП.*** Основной задачей в данном вопросе является установление хорошо структурированных классов ***ГФП***, *сохраняющих* заданные свойства, представляющие интерес с той или иной точки зрения. Изучаемые в рамках данной проблематики сохраняемые свойства включают специальные множества конечных ***КФ***, периодичность, палиндромы, 2-мерные ***КФ***, инвариантные относительно отображений диэдральной группы квадрата и целый ряд других [536].

В более общей постановке под сохраняемыми понимаются такие свойства классических ***ОС***-моделей как универсальные воспроизводимость и вычислимость, а также специальные типы динамики конечных ***КФ***. Классы ***ГФП***, сохраняющие некоторые из вышеотмеченных свойств, являются подмножествами множества всех глобальных функций, симметричных функций и функций, определяемых в терминах отображений диэдральных групп. В данном направлении получен ряд интересных результатов [133], однако остается еще целый ряд открытых вопросов для дальнейшего исследования.

Вторая группа вопросов связана с исследованием специфических классов параллельных глобальных преобразований и конфигураций в классических ***ОС-***моделях. В этом контексте можно определить целый ряд интересных классов ***ЛФП*** и исследовать те динамические, конструктивные и иные свойства ***ОС-***моделей, которые сохраняются глобальными преобразованиями, определяемыми данными ***ЛФП***. Весьма интересные вопросы возникают в связи с задачей определения влияния типа ***ЛФП*** на структуру генерируемых ***ОС-***моделью ***КФ***, структуру неконструируемых ***КФ*** и т.д. Это тем паче интересная и важная задача, ибо она позволяет в значительной мере прояснять влияние параллельного локального взаимодействия единичных автоматов на глобальную динамику классических ***ОС-***моделей, что весьма важно для различного рода приложений [536].

Исследование свойств специальных типов конфигураций в ***классических ОС-***моделях (*пассивных, периодических, исчезающих и т.д.*) представляет собой как сугубо специфический, так и того либо иного уровня общий интерес для ***ТОС-***проблематики. Так, пассивные ***КФ*** играют важную роль в том случае, когда классические ***ОС-***модели рассматриваются в качестве параллельных алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах и при погружении в них различного рода процессов и объектов. Ряд вопросов, связанных с пассивными и другими ***КФ***, рассматривался в предыдущих главах монографии.

С точки зрения исследования стабильных траекторий динамики классических ***ОС-***моделей определенный интерес представляют периодические конечные ***КФ***. Из теоремы ***75*** следует, что в общем случае проблема определения того, будет ли произвольная начальная ***КФ*** $c_0 \in C(A,d,\phi)$ ***периодической*** в классической ***ОС-***модели алгоритмически неразрешима. Нетрудно убедиться, что подобно случаю пассивных ***КФ***, при наличии в классической ***ОС-***модели периодических ***КФ*** с минимальным ***p-***периодом их множество бесконечно и в нем существуют ***периодические КФ*** сколь угодно большого размера с тем же ***p-***периодом. Более того, если в ***ОС-***модели существуют периодические ***КФ*** с минимальными периодами ***p*** и ***q*** ($p \neq q$), то в ней существуют по меньшей мере и периодические ***КФ*** с минимальным периодом $g=g(p,q)=НОК(p,q)$, где ***НОК –*** наименьшее общее кратное. Доказательство данного факта предоставляем читателю в качестве весьма полезного упражнения, не требующего особой подготовки.

В этой связи возникают следующие два основных вопроса: ***1)*** получение оценки сверху для размеров минимальных периодов как функции основных параметров ***ОС-***модели и ***2)*** выяснение алгоритмической разрешимости проблемы наличия в произвольной классической ***ОС-***модели ***периодических КФ***, исключая тривиальный случай периодической нулевой ***КФ***. При этом, положительное решение первого вопроса влечет за собой алгоритмическую разрешимость и второго вопроса с предоставлением конструктивного разрешающего алгоритма. Тогда как алгоритмическая неразрешимость второго, в свою очередь, влечет за собой отрицательное решение первого вопроса. На сегодня оба указанных вопроса остаются открытыми даже для одномерного случая. Для случая классических ***ОС-***моделей удалось получить нижнюю оценку величины минимального периода, выражаемую следующим основным результатом [3,5,88].

<u>Теорема 133</u>. Существуют классические d-ОС с индексом соседства Мура, имеющие периодические КФ $c \in C(A,d,\phi)$ ***с минимальным периодом*** $p \geq 2^{|c|}-2$, ***где*** $|c|$ ***- диаметр с-КФ. Существуют классические 1-ОС с индексом соседства*** $X=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, ***имеющие периодические КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ ***с минимальным периодом*** $p \geq 2L(|c|)$, ***где L-величина определяется из соотношений (17).***

Доказательство теоремы конструктивно и состоит в определении функционального алгоритма структуры ***1-ОС****, допускающего существование в ней *периодических* ***КФ*** $c \in C(A, d, \phi)$ с минимальным периодом $p=2^{|c|}-2$. Затем показывается, что определенная таким образом структура ***1-ОС**** удовлетворяет достаточному условию погружения ее в клас-

сическую ***d-OC*** с индексом соседства Мура [1,3]. Вторая часть теоремы ***133*** говорит о существовании в классических ***1-OC*** относительно небольших по размеру периодических ***КФ*** с фантастически большими размерами минимального периода**.** Доказательство данного факта базируется на результатах исследования по проблеме ограниченного роста ***(ПОР;*** раздел ***1.2)*** и состоит в выращивании на основе структуры ***1-OC**** из исходной ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ максимально возможной по длине конфигурации с последующей ее редукцией до исходной ***c-КФ.*** Таким образом, функциональный алгоритм такой ***1-OC**** можно получать путем «***склеивания***» модифицированного алгоритма, решающего ***ПОР,*** и обратного ему алгоритма редукции. Затем полученная таким образом структура ***1-OC**** погружается в классическую ***1-OC.*** Данный результат может быть обобщен и на случай высших размерностей. Из результата теоремы ***133*** также следует, что существуют классические ***OC-***модели, имеющие периодические ***КФ*** с любой наперед заданной величиной минимального периода. Определенный интерес наряду с периодическими ***КФ*** конечными представляют и бесконечные периодические в смысле ***Ямада-Аморозо*** [1,3,5].

К проблеме периодических конечных ***КФ*** непосредственно примыкают и вопросы, связанные с понятием *стабильности* и *строгой стабильности* по ***Пуассону.*** Интуитивно стабильность по Пуассону означает, что динамика ***КФ*** $\langle c_o \rangle [\tau^{(n)}]$ в классической ***OC-***модели бесконечно много раз попадает в произвольную окрестность c_o***-КФ*** в топологическом смысле**,** т.е**.** ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ называется ***Пуассон-стабильной*** относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***OC-***модели**,** если существует последовательность неотрицательных целых чисел $m_1 < m_2 < m_3 <$ **...** такая, что $\lim_{p \to \infty} c_o \tau^{(n) m_p} = c_o$**.** Конфигурация $c_o \in C(A,d,\phi)$ называется ***строго Пуассон-стабильной*** относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***OC-***модели, если существует целое $m_o = m_o(c_o) \in N$ такое, что $c_o \tau^{(n) m_o} = c_o$**,** где m_o есть, вообще говоря, функция c_o***-КФ.*** Таким образом, оба понятия Пуассон**-**стабильности характеризуют некоторую предельную динамику классических ***OC-***моделей и по ним получен ряд весьма интересных результатов. В частности, ***T. Сато*** и ***H. Хонда*** [272] установили ряд важных соотношений между инъективностью, суръективностью и *(строгой)* Пуассон**-**стабильностью в классических ***OC-***моделях, основываясь на сугубо топологическом подходе. К понятию Пуассон**-**стабильных ***КФ*** тесно примыкают и определенные нами ***(p-k)-периодические*** конечные ***КФ,*** а полученные по ним результаты естественным образом переносятся на вышеуказанный тип ***КФ,*** в частности, результат теоремы ***75*** в части ***(p-k)-периодических КФ*** и его обобщения на общий случай классических ***OC-***моделей [54-56,536].

В разделе ***6.4*** рассматривались вопросы моделирования произвольных классических ***OC-***моделей структурами с симметрическими ***ЛФП.*** Там же кратко обсуждались и конструктивные возможности ***OC-***моделей с обоими типами ***ЛФП.*** В определенной мере промежуточный этап в конструктивном плане занимают так называемые частично симметричные ***ЛФП.*** Здесь сколько-нибудь значительные исследования пока отсутствуют [54]. В главе ***2*** отмечалось неэвивалентное влияние свойств асимметричности и симметричности ***ЛФП*** в классических ***OC-***моделях на обладание ими того или иного типа неконструируемости. Было бы чрезвычайно интересным продолжить исследование влияния степени симметричности ***ЛФП*** на динамические свойства классических ***OC-***моделей.

С определенными классами ***OC-***моделей связан ряд специальных вопросов динамики. Так, например, в классе структур ***d-OCP(r,P)*** с рефрактерностью *(*раздел ***1.2)*** основным объектом исследования является динамика распространения активности как функция начальной ***КФ,*** индекса соседства, глубины рефрактерности ***(r)*** и порога возбудимости ***(P).*** Будем говорить**,** что в структуре ***d-OCP*** существуют ***незатухающие*** возбуждения тогда и только тогда**,** когда для некоторой начальной ***КФ*** $c_o \in C(A,d)$ и любого момента вре-

мени $t>0$ **КФ** $c_t=c_{t-1}\tau^{(n)}$ содержит по меньшей мере один единичный автомат структуры в возбужденном состоянии**.** Интересно**,** что существование таких возбуждений в ***OC-***моделях с *рефрактерностью* весьма тесно связано с порогом возбудимости**.** Более того**,** в ***OC-***моделях с рефрактерностью не могут существовать области возбуждений произвольной конфигурации**,** а именно**,** имеет место следующий общий результат [1]**:** ***в d-OCP(r,P) (r ≥ 1) недостижима возбужденная область, тождественная шаблону соседства; в данной OCP-модели с индексом соседства Мура только тогда существуют незатухающие возбуждения, когда выполняется соотношение*** $P < 3^{d-1}$**.**

Следовательно, проблема существования для произвольной ***d-OCP(r,P) (r≥1)***, как несложно убедиться, *незатухающих* возбуждений алгоритмически разрешима и в такой ***OCP-***модели не существует достаточно больших сплошных областей возбуждений в момент времени $t>0$**,** т.е**.** ***КФ*** возбужденных состояний носят достаточно разреженный характер. Интересно было бы дать этому факту некоторые адекватные прикладные интерпретации. Возможно, данный феномен связан с обеспечением надежности функционирования нейроноподобных сетей, определяемых ***OCP-***моделями, и способами обработки в них информации. При этом условии понятие неконструируемости в классических ***OC-***моделях может получить новые интересные интерпретации.

Вторая часть вышеупомянутого результата позволяет ввести определенную иерархию в классе всех структур ***d-OCP(r,P)*** относительно возможностей генерации ими конфигураций возбужденных состояний как функции ***d-****размерности* и ***P-****порога***.** Из данного результата, в частности, следует что при $P \geq 3^{d-1}$ в структуре ***d-OCP(r,P)*** любая начальная ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ является исчезающей. В случае произвольного индекса соседства величина ***P-***порога возбуждения является функцией глубины ***r-****рефрактерности* и самого индекса соседства**.** В этой связи весьма интересно обобщить указанные результаты на общий тип ***OCP-***моделей**,** представляющих весьма определенный интерес в плане формального исследования класса сетей *порогового* типа. Целый ряд интересных аспектов исследования ***OCP-***моделей возникает как при изучении специальных вопросов динамики возбуждений ***(****распространение фронта возбуждений через различного рода препятствия***,** *взаимодействие фронтов возбуждений***,** *осциллирующие возбуждения и т.д.)***,** так и при переходах к ряду модификаций ***OCP-***моделей на недетерминированной и стохастической основах**.** В этом отношении довольно существенным подспорьем может оказаться метод компьютерного моделирования [54,65,78,85]. В рамках класса структур ***d-OCP(r,P)*** достаточно эффективно можно проводить формальные исследования различного типа возбудимых сред [1, 3,54-56,85,88,90,134,150,167,198,205,214,346,536].

Японские математики в рамках программы детального исследования вычислительных возможностей ***OC-***моделей показали [185], что для любого детерминированного двухстороннего клеточного автомата ***(КА)*** существует моделирующий его в удвоенное время детерминированный односторонний ***КА***. В классе ***OC-***моделей определяющая направленность передачи информации обеспечивается, прежде всего, типом используемого индекса соседства. Не нарушая общности, рассмотрим классические ***1-OC*** с индексами соседства следующего вида, а именно**:**

$$X_k=\{-k, -(k-1), ..., -2,-1,0,1,2, ..., (n-1)-k\}; \qquad k \in K = \{0,1,2, ..., n-1\}$$

Нетрудно убедиться**,** что для фиксированного ***n-***значения множество $X=\{X_k \mid k \in K\}$ исчерпывает все возможные индексы соседства, определяющие связные шаблоны соседства ***(ШС)*** одного и того же ***n-***размера. Тогда ***k-***значение определяет местоположение в ***ШС*** центрального ***(0-****автомата)***.** При значениях $k=\{0,n-1\}$ получаем ***OC-***модели с индексами соседства $\{X_o,X_{n-1}\}$**,** задающими модели соответственно с {лево**,** право}сторонними определяющими потоками информации. Тогда как при значениях $\{0<k<n-1\}$ мы имеем дело

с индексами соседства X_k, задающими ***ОС***-модели с двухсторонними определяющими потоками информации. Второго типа ***ОС***-модели характеризуются тем, что допускают эффективную реализацию, в частности, встречных потоков информации, а именно:

Индекс соседства структуры	*Шаблон соседства*										*Инфопоток*
$X_0=\{0,1,2,3, ..., n-1\}$	**0**	...	...	...	...	...	...	...	...		⇐⇐⇐⇐
$X_{n-1}=\{-(n-1),-(n-2), ..., -2,-1,0\}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	**0**	⇒⇒⇒⇒
$X_k=\{-k,-(k-1), ..., -1,0,1, ..., (n-1)-k\}$	...	...	...	...	**0**	...	...	...	...	...	⇐⇔⇔⇒

Одно*(двух)*направленные определяющие потоки информации позволяют единичному автомату ***ОС***-модели передавать/принимать информацию в одном *(двух)* направлениях по каждому измерению однородного Z^d-пространства структуры. Из определения классической ***ОС***-модели *(*раздел ***1.1)*** нетрудно убедиться, что для каждой классической ***ОС***-модели с индексом соседства X_k можно определить строго эквивалентную ей модель в том же ***A***-алфавите и той же размерности с индексом соседства $X_p \in X$ $(p \neq k)$. Следовательно, относительно ряда важных характеристик *(например, универсальных вычислимости и воспроизводимости)* классические ***ОС***-модели с одно- и двухсторонними определяющими потоками информации строго эквивалентны.

Тогда как уже конструктивные возможности могут существенно зависеть от определяющих информационных направлений в ***ОС***-моделях. В частности, уже целый ряд задач в классических ***ОС***-моделях с однонаправленными определяющими потоками информации реализуются с существенно большими временными издержками, часто требуя расширения ***A***-алфавита внутренних состояний; при этом, программирование таких ***ОС***-моделей требует и больших усилий. Именно поэтому, располагая *универсальными* ***d-ОС*** с простейшими индексами соседства (раздел ***1.1)***, размер ***ШС*** которых равен ***d+1***, предпочтение отдается структурам с простыми индексами соседства Неймана или Мура. Вопросам влияния направленности определяющих информационных потоков в ***ОС***-моделях посвящен ряд специальных исследований [3,54,88,90,132,135,185-187,190,255,287,536].

К проблематике классических ***ОС***-моделей в качестве возбудимых сред в определенной мере примыкает и весьма интересный класс задач моделирования и исследования роста геометрических фигур, подчиненного того или иного типа ограничениям и рекуррентным правилам, включая фрактальные. Первые попытки математического анализа такого типа задач были предприняты ***С. Уламом*** и его сотрудниками из Лос-Аламосской национальной лаборатории [225], созданной по инициативе «отца» водородной бомбы ***Э. Тэллера*** и давшей миру целый ряд весьма оригинальных разработок, включая и основы современной доктрины звездных войн. Более того, именно из исследования такого типа задач у ***С. Улама*** сформировались зачатки ***ОС***-концепции, с которыми и был ознакомлен ***Дж. фон Нейман,*** использовав их для исследования проблемы самовоспроизведения. ***С. Улам*** и его сотрудники изучили ряд вопросов роста фигур, являющихся промежуточными по сложности между неорганическими объектами *(подобными кристаллическим структурам)* и более сложными структурами, подобными некоторым органическим молекулам. Многие интересные результаты в этом направлении были ими получены посредством компьютерного моделирования на супер-ЭВМ [225,536].

Эмпирические результаты ***С. Улама*** и его сотрудников демонстрируют как сложность и богатство форм, получаемых на основе простых начальных фигур посредством несложных рекуррентных правил, так и сложность их математического анализа. Следовательно, несмотря на кажущуюся сложность и существенную непредсказуемость поведения растущих фугур со временем, содержащееся в них количество информации достаточно мало. Простейшие модели роста фигур ***С. Улама*** погружаемы в классические ***d-ОС*** (***d***=2,

3) и наиболее пригодны для математического исследования их морфологических черт как в пространстве, так и во времени [1]. Для таких моделей ***Дж. Холладей*** сформулировал общее правило, характеризующее морфологию растущих фигур. А полученные нами результаты по исследованию роста фигур в классических ***2-OC*** [1] показывают, что существуют аналоги правил роста ***Дж. Холладея*** для растущих систем, подчиненных и более общим ограничениям, чем ограничения геометрического характера.

Так, например, одна из рассмотренных нами моделей роста может интерпретироваться как самоусложняющаяся система, в которой любая из ее частей, выросшая на временном интервале $[1, 2^k-1]$ $(k>5)$ является *самовоспроизводящейся* в смысле Мура. Следовательно, исследование ***OC***-моделей роста, подчиняющихся различным рекуррентным правилам и ограничениям, может оказаться весьма полезным при прояснении целого ряда важных свойств саморазвивающихся и самоорганизующихся систем различной природы. Работая по моделям ***С. Улама***, ***Д. Баттлер*** и ***С. Нтафос*** [309] показали, что важную роль при анализе таких ***OC***-моделей играет так называемый «*векторный описатель строки*». Они исследовали основные свойства данного описателя и на их основе доказали эквивалентность одной модели роста ***С. Улама*** и ее представления посредством описателя. Однако несмотря на эффективность данного средства при исследовании относительно несложных моделей, при их усложнении она существенно снижается. Особые надежды при исследовании задач роста возлагаются на метод компьютерного моделирования, который с появлением достаточно мощных ***ПК*** становится все более доступным широким кругам исследователей как профессионалов, так и любителей.

Выше уже говорилось о том, что с точки зрения фундаментальных свойств классических ***OC***-моделей замена однородного Z^d-пространства на другое регулярное не добавляет математически ничего нового. Тогда как рассмотрение целого ряда ***OC***-моделей роста показывает, что при одних и тех же ограничениях и рекуррентных правилах роста сложность определения морфологических свойств растущих фигур может весьма существенно возрастать при замене одного типа однородного Z^d-пространства ***OC***-модели на другое. В этой связи было бы весьма интересным более детально исследовать влияние топологии однородного Z^d-пространства ***OC***-модели на изменение основных конструктивных характеристик тех или иных классов погружаемых в них процессов, а в общем случае и изменение конструкционных свойств классических ***OC***-моделей [536].

Рассматривая классические ***OC***-модели в качестве формальной среды для параллельных вычислений и обработки информации, получаем ряд результатов, характеризующих принципиальные свойства таких моделей, оставляя в стороне целый ряд более специальных вопросов, позволяющих прояснять в деталях их более глубокие свойства, играющие весьма важную роль для прикладных аспектов вычислительных ***OC***-моделей. В первую очередь, это относится к организации в ***OC***-моделях вычислений и решению различных задач в минимально возможное время. Здесь наряду с результатами общего характера, связанными с проблемой временной сложности в классических ***OC***-моделях [5,29,37,56, 74,171,287], получены весьма интересные результаты по отдельным классам задач, решаемых в рамках вычислительных ***OC***-моделей [1,3,135,138,160,166,175,178,184-187,252,296, 297,536]. В частности, ***А. Подколзин*** рассмотрел вопрос реализации в классических ***2-OC*** булевых функций с минимальной временной сложностью и предложил асимптотически оптимальное решение задачи.

В терминах задачи о нахождении кратчайших информационных путей между единичными автоматами ***OC****-модели можно формулировать многие теоретические и прикладные задачи оптимальной динамики классических ***OC***-моделей. Большое внимание уделялось и уделяется теоретическим вопросам решения различного типа задач в среде вычислительных ***OC***-моделей в реальное время. В этом направлении можно выделить

отдельную группу задач синхронизационно-оптимизационного характера, типичными представителями которых можно отметить упоминаемые в книге проблемы синхронизации сети автоматов, Французского флага и ограниченного роста. Для решения задач данного класса предложены как специальные, так и значительно более общего уровня решающие параллельные алгоритмы, ориентированные на достаточно широкий круг различного рода приложений. В частности, в процессе исследования проблемы синхронизации сети автоматов наряду с целым рядом специфических были предложены и существенно более общие методы решения. Так, ***Ф. Романи*** определил интересный принцип параллелизма [3], согласно которому время синхронизации сети автоматов с частично симметричными свойствами существенно уменьшается. На основе данного принципа показано, что хорошо известные быстрые методы синхронизации вписываются в рамки его концепции. На этом пути было показано, что каждая связная сеть из ***n*** автоматов может синхронизироваться за время не хуже, чем ***2n***. Анализ предложенного принципа параллелизма позволяет рассматривать его в значительно более общем контексте при исследовании оптимизационно-синхронизационных свойств как конечной, так и бесконечной системы взаимосвязанных конечных автоматов. Еще одна группа оптимизационных задач связана с *минимизацией* требуемых для решения той или иной задачи не временных, а пространственных ресурсов в виде требуемых для вычислений или обработки информации единичных автоматов вычислительной ***ОС-***модели. Здесь особый акцент делается на исследованиях по *структурному* направлению ***ТОС-***проблематики.

Формирование *структурного* направления в ***ТОС-***проблематике носит не только чисто теоретический и методологический интерес; оно позволяет исследовать прикладные аспекты, связанные с использованием параллелизма, присущего ***ОС-***моделям. Так, в частности, с идеей распараллеливания ассоциируется в основном только получение *временного* выигрыша при вычислениях. С этой целью разрабатываются *параллельные* алгоритмы для реализации их на той либо иной вычислительной модели. При этом, вполне естественным и само собой разумеющимся считается увеличение вычислительных ресурсов для реализации параллельного алгоритма относительно реализации *эквивалентного* ему последовательного алгоритма на последовательной модели вычислений.

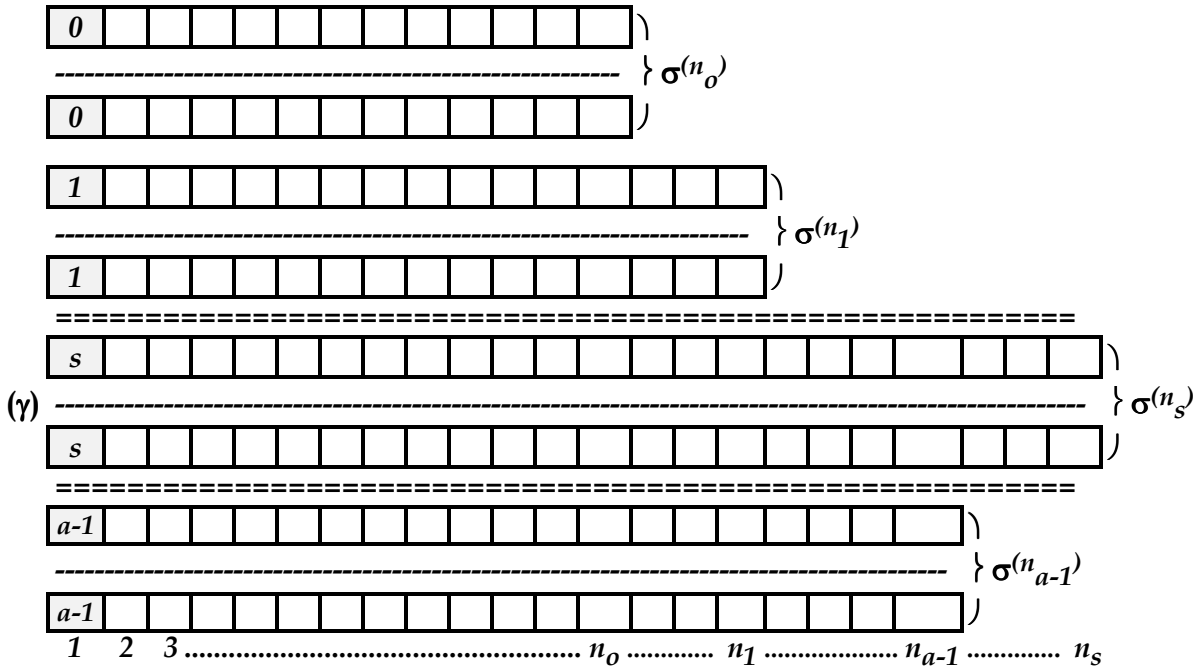
В этой связи возникает весьма интересный вопрос о той цене, которой мы вынуждены расплачиваться за уменьшение времени вычислений. В общем случае данная проблема представляется нам достаточно сложной, поэтому вначале имеет смысл рассмотреть ее на отдельных формальных моделях для наиболее интересных и массовых вычислительных алгоритмов. Так, например, ***Э. Катона*** [171] предложил достаточно оригинальный метод, обеспечивающий решение задачи (*требующей в стандартной постановке* ***m*** *единичных автоматов и* ***t*** *шагов классической* ***2-ОС***) только на [***m/k***] единичных автоматах за ***0(kt)*** шагов модели. Класс подобных оптимизационных задач представляет интерес не только с точки зрения формального исследования вычислительных возможностей ***ОС-***моделей, но и важен с прикладной точки зрения, имея в виду последние успехи микроэлектроники высокой степени интеграции и нанотехнологии, все настойчивее ставящие на повестку дня практические реализации ряда вычислительных ***ОС-***моделей, как одного из путей создания новых перспективных поколений параллельных ***ВС*** [536].

Вопрос построения ***ОС-***моделей с определенными динамическими свойствами, генерирующих заданные последовательности конечных ***КФ***, можно определить как проблему ***реализации***. В целом ряде работ было показано, что данная проблема *конструктивно* разрешима для многих интересных прикладных случаев, однако до сих пор не получен ответ о ее разрешимости даже для ряда важных ***КФ-***последовательностей. Проблема представляется достаточно сложной, но играет чрезвычайно важную как теоретическую, так и прикладную роль в общей ***ТОС-***проблематике. Вместе с тем, общая проблема реализации алгоритмически неразрешима [55,90], т.е.: ***Не существует алгоритма, позволяю-***

щего для произвольной последовательности конечных КФ $\Omega=\{c_o \Rightarrow c_1 \Rightarrow c_2 \Rightarrow ... \Rightarrow c_k \Rightarrow ...\}$ ***определять наличие или отсутствие классической ОС-модели, генерирующей данную конфигурационную Ω-последовательность.***

В последнее десятилетие проявляется большой интерес к новому междисциплинарному научному направлению ***– синергетике,*** исследующему роль коллективных и кооперативных эффектов в самоорганизующихся процессах, устройствах и системах различных природы и назначения [155]. Можно с уверенностью утверждать, что динамика ***ОС-***моделей хорошо отвечает концепциям и проблематике *дискретной* синергетики со многих точек зрения**.** Подобно синергетике**,** одной из основных проблем динамики ***ОС-***моделей является вопрос существования общих принципов, управляющих процессом самоорганизации конечных ***КФ.*** Современная синергетика вообще и дискретная синергетика в частности базируются на трех основных понятиях**:** ***нестабильность***, ***принцип субординации*** и ***параметры порядка.*** Эти понятия имеют достаточно простую интерпретацию на гносеологическом уровне**,** но применение их к любой реальной системе**,** например**,** к классической ***ОС-***модели требует весьма существенных усилий [5,53-56,82,88,90,536].

В этой связи было бы чрезвычайно перспективным исследовать общие принципы самоорганизации в ***ОС-***подобных системах. С более прикладной точки зрения было бы желательным организовать параллельную обработку информации в вычислительных ***ОС-***моделях на основе самоорганизации единичного автомата ***(****или блока автоматов****)*** без использования центральных распараллеливающих устройств. Подобные вопросы могут быть сформулированы для многих других параллельных процессов и феноменов, погружаемых в ***ОС-***модели, для которых самоорганизационный подход может играть весьма существенную роль [5,88,90,536].



Среди множества классов ***ОС-***моделей значительный интерес представляет класс ***ОСнР-***моделей, определенных нами в разделе ***1.2*** и в ряде контекстах рассмотренных в предыдущих главах. Одной из характерных черт таких моделей является относительная простота программирования обратимости их динамики, а также алгоритмическая разрешимость ряда важных динамических свойств, что весьма существенно в плане их физических и ряда иных приложений**.** Наряду с этим**,** по ряду интересных показателей динамика ***ОСнР-***моделей достаточно существенно отличается от динамики классических ***ОС-***моделей, позволяя делать вполне определенные выводы о специфических чертах и ди-

намики асинхронных ***ОС-***моделей в целом. Введенные для сугубо прикладных целей [150-152], ***ОСнР-***модели практически не исследовались в рамках общей ***ТОС-***проблематики и в работе [90] предпринята попытка восполнить данный пробел. Некоторые из наиболее простых и связанных по материалу изложения результатов данного исследования в определенных контекстах упоминаются и в настоящей монографии.

Рассмотрим еще один интересный с ряда прикладных соображений тип классических $ОС = <Z^d, A, \tau^{(n)}, X^*>$, в которых индекс соседства является переменным и определяется внутренним состоянием текущего единичного ***z-***автомата, т.е. $X_z = F(s[z])$. Очевидно, что множество X^* всех допустимых индексов соседства такой ***ОС-***модели конечно и при алфавите $A = \{0,1,2, ..., a-1\}$ внутренних состояний $\#X^* = a$. Следовательно, во множестве X^* можно выбрать индекс соседства, например X_s $(s \in A)$, определяющий максимальный по размеру шаблон соседства ***(ШС).*** Дальнейшее рассмотрение, не нарушая общности, мы проведем на примере одномерных структур, как более иллюстративном.

Для простоты иллюстрации все компоненты переменного X^*-индекса соседства приведены к общему стандартному виду $X = \{0,1,2, ..., n-1\}$. Однако, это нисколько не умаляет степени общности и в случае рассмотрения различных типов частных индексов вида $X' = \{-(n-k-1), ..., -1,0,1, ..., k\}$ $\{k = 0 .. (n-1)\}$. Убедиться в этом предоставляем читателю в качестве весьма несложного упражнения.

Из вышеприведенной довольно простой схемы (γ), поясняющей назначение каждому ***s-***состоянию текущего ***z-***автомата исходной структуры ***1-ОС*** переменного ***ШС*** и соответствующей ему частичной ***ЛФП*** $\sigma^{(n_s)}$, несложно усмотреть, что определив классическую ***1-ОС*** в ***A-***алфавите, с индексом соседства X_s и ***ЛФП*** $\sigma^{`(n_s)}$, вполне однозначно определяемой на основе частичных ***ЛФП*** $\sigma^{(n_k)}$ $\{k = 0..a-1\}$ исходной ***1-ОС*** с переменным индексом соседства $X^* = \{X_s \mid s = 0..a-1\}$, получаем эквивалентную ей классическую структуру. Таким образом: ***Структура d-ОС с переменным индексом соседства, определяемым внутренним состоянием текущего единичного автомата, строго эквивалентна соответствующей классической d-ОС в том же самом A-алфавите внутренних состояний, что и исходная структура.*** Следовательно, ***ОС-***модели с таким образом определенным переменным X^*-индексом соседства составляют собственный подкласс класса всех классических ***ОС-***моделей. В таких моделях параллельные подстановки, определяющие их ***ЛФП,*** дифференцируются по первому символу их левых частей.

Таким образом, в зависимости от своего текущего состояния единичный автомат структуры сам определяет окрестность своих соседей, от которых ему необходимо получить информацию для определения своего последующего состояния, т.е. поведение единичного ***z-***автомата в такого типа ***ОС-***модели носит более ***«интеллектуальный»*** характер. Данный момент представляет определенный интерес с точки зрения целого ряда прикладных аспектов ***ТОС-***проблематики и достаточно детально рассматривается в работе [90] с иллюстрацией целого ряда интересных примеров различного характера.

ОС-модели описанного типа характеризуются индивидуальным выбором индекса соседства единичным автоматом, расширяя круг эффективно представляемых на их основе целого ряда интересных задач. В качестве простого примера, иллюстрирующего ***ОС-***модели с такого типа переменным индексом соседства, рассмотрим бинарную структуру, индекс соседства которой определяется как $X^* = \{X_0 = \{0,1\}, X_1 = \{0,1,2\}\}$. Пусть в такой ***ОС-***модели единичный ***z-***автомат, находящийся в состоянии $\{0 \mid 1\}$, использует соответственно частичные индекс соседства $\{X_0 \mid X_1\}$ и ***ЛФП*** $\{\sigma^{(2)}(x,y) = x+y \ (mod\ 2) \mid \sigma^{(3)}(x,y,z) = x+y+z \ (mod\ 2)\}$ $(x,y,z \in \{0,1\})$ для определения своего последующего состояния. При сделанных предположениях несложно убедиться, что из начальной конечной ***КФ*** $c_0 = \square 1011 \square$ в опре-

деленной нами бинарной ***1-ОС*** с переменным индексом соседства генерируется следующая последовательность ***(в разрезе первых пяти шагов) КФ***, а именно:

Конфигурационная последовательность												***t***
c_0 :					0	0	1	0	1	1	0	0	0
c_1 :				0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
c_2 :			0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	2
c_3 :		0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	3
c_4 :	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	4
c_5 :	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	5

Более того, такая ***КФ-***последовательность имеет ***формульное*** описание, т.е. элементы ее представляются в виде c_{2k-1}=□$(10)^{k-1}$10101□ и c_{2k}=□$(10)^{k}$1011□ ***(k=1,2,3,...); ОС-***модель генерирует ***формульный*** параллельный $L(\tau_n)$***-***язык ***(***глава ***5).*** Данный пример характеризуется также рядом других интересных свойств**.** А именно**,** в таким образом определенной структуре отсутствует неконструируемость типа ***НКФ-1,*** ибо ***(***как нетрудно в этом убедиться***) С(А,∞)-***множество всех бесконечных бинарных ***КФ*** замкнуто относительно глобального **τ-**преобразования структуры. Следовательно, в свете результатов главы ***3*** можно предположить, что для такой структуры не взирая на линейность частичных ***ЛФП,*** определяющих глобальное **τ-**преобразование и ассоциированных с переменным **X*-**индексом соседства**,** не будет иметь места свойства универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ.*** И действительно, в структуре существуют пары ***ВСКФ*** уже вида {**<01|01|01>,<01|10|01>**}**,** а значит и ***НКФ,*** что и доказывает наше предположение**.** В качестве весьма полезного упражнения читателю рекомендуется рассмотреть также и другие примеры ***ОС-***моделей с переменным индексом соседства и исследовать их динамические свойства. В качестве дальнейшего расширения данного типа ***ОС-***моделей можно рассматривать и случай**,** когда индекс соседства единичного ***z-***автомата структуры зависит от истории на некоторую глубину его предыдущих состояний [5,88,90,536].

Таким образом, нами рассмотрены два типа ***ОС-***моделей с *переменным* индексом соседства **–** индексом соседства как функцией соответственно координат и внутреннего состояния единичного ***z-***автомата структуры. И хотя оба типа переменности индекса соседства имеют принципиальные различия, определяемые на их основе ***ОС-***модели имеют свои интересные области приложений. При этом, второй тип переменного индекса соседства образует подмножество ***всех*** классических ***ОС-***моделей аналогично тому**,** как это делают ***ОС*** с рефрактерностью (см. раздел ***1.2).***

Еще об одном аспекте в данной связи имеет смысл сказать особо. Не взирая на простоту такого формального объекта**,** как классические ***ОС-***модели**,** их динамика носит в общем случае весьма сложный характер и весьма часто с большим трудом поддается детальному исследованию**.** Поэтому выделение в классе таких ***ОС-***моделей**,** интересных с той либо иной точки зрения, подклассов структур и их исследование позволяет более глубоко прояснять целый ряд важных вопросов динамики всего класса в целом**.** Вместе с тем дифференциация классических ***ОС-***моделей позволяет более эффективно рассматривать и их прикладные аспекты в целом ряде интересных областей [536].

На этом завершается обсуждение ряда *более* специальных вопросов ***ТОС-***проблематики, которые, естественно, далеко не охватывают всего многообразия данного направления исследований. Более того, в целом ряде случаев наблюдается тенденция интенсивного развития ряда специальных вопросов**,** выдвигающих их в число фундаментальных. Для более полного знакомства со спектром более специальных вопросов ***ТОС-***проблематики читатель отсылается к представленной ниже весьма обширной библиографии и к [536].

Глава 8. Некоторые прикладные аспекты ОС-проблематики

Сфера приложений ***ОС-***моделей во всей их общности в настоящее время достаточна обширна и требует специального рассмотрения, которое выходит за рамки настоящей монографии. Здесь мы лишь кратко отметим наиболее развитые области приложений и с большей детализацией остановимся на прикладных аспектах ***ОС-***проблематики в математических, вычислительных и биологических науках. Наряду и с сугубо самостоятельным интересом в качестве важного математического объекта исследований в настоящее время ***ОС-***концепция с той или иной степенью интенсивности используется в довольно широком диапазоне приложений, а именно: чистая и прикладная математики, кибернетика, синергетика, параллельная обработка информации, теория вычислений, распознавание образов и обработка сигналов, искусственный интеллект, криптография и теория кодирования, математическое и физическое моделирование, математическая и теоретическая биологии, вычислительные науки, урбанистика, геология, логистика и т.д. Более того, ***ОС-***модели могут симулировать не только самые общие феноменологические аспекты реального мира (*конструируемость, параллельная обработка информации, вычислимость, биологические феномены и процессы и др.*), но и непосредственные физические законы и процессы на микроскопическом уровне [536]. ***ОС-***модели представляют собой своего рода формальные рекурсивные миры, тогда как сама рекурсия фундаментальна для математики, информатики, физики, биологии, искусства и даже такой области как лингвистика. Именно поэтому такого типа модели являются весьма востребованными.

Хотя идея использовать дискретные методы для задач моделирования дифференциальных уравнений в частных производных появились довольно давно, однако фактически первое предложение использовать методику ***ОС-***моделей для приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных гидродинамики восходит к таким исследователям как ***Frisch, Hasslacher*** и ***Pomeau.*** В последующем ***ОС-***концепция была использована для получения довольно простых моделей классических дифференциальных уравнений физики, таких как волновое уравнение и уравнение ***Навье-Стокса,*** уравнение теплопроводности, которые можно рассматривать в качестве *предельных* случаев весьма простых процессов комбинаторной динамики. Наряду с этим, однородные структуры позволяют получать достаточно богатую и постоянно расширяющуюся коллекцию моделей, в рамках которых относительно легко можно исследовать разнообразные аспекты ныне бурно развивающейся теории динамических систем, изучающей возникновение и поведение таких коллективных явлений, как фрактальность, упорядочение, турбулентность, хаос и т.д. в системах, состоящих из большого количества элементов, взаимодействующих друг с другом сугубо локальным образом [536].

Во многих случаях ***ОС*** представляют *альтернативный* дифференциальным уравнениям путь анализа динамики сложных систем. Так как пространственная дифференцировка на элементарные автоматы является имманентным свойством однородных структур, то они незаменимы именно там, где дифференциальные уравнения малоэффективны либо и вовсе неприемлемы. В целом ряде случаев отсутствует какой-либо иной метод выяснить динамику начальной конфигурации некоторой динамической системы, чем просто симулировать ее поведение посредством соответствующей ей ***ОС-***модели [536].

Обеспечиваемые на уровне ***ОС-***аксиоматики такие фундаментальные свойства, как *однородность* и *локальность*, а на программном уровне и свойство *обратимости динамики*, позволяют рассматривать ***однородные структуры*** в качестве весьма перспективной среды физического моделирования. Данное и целый ряд других существенных обстоятельств переводят ***ТОС-***проблематику на серьезный ***междисциплинарный*** уровень, превращая ее

в концептуальную среду моделирования, описания и исследования феноменов, процессов и объектов из различных естественно-научных и иных областей. Вместе с тем, именно возможности использования однородных структур в качестве нетривиальной среды физического моделирования позволяет рассматривать их значительно шире, чем просто *(пусть даже и очень интересный)* самостоятельный объект исследований. В этой же связи их можно рассматривать и в качестве нового *концептуального* подхода к организации ***обратимых*** вычислительных процессов в контексте исследования общей теории вычислений и создания новых перспективных средств вычислительной техники.

В настоящее время можно констатировать, что ***OC***-концепция предоставила достаточно перспективную среду моделирования для реализации концептуальных и прикладных аспектов пространственно-распределенных динамических систем из которых наиболее важными прототипами являются физические системы, биологические системы и системы параллельной обработки информации. Достаточно полное представление по прикладным аспектам ***OC***-проблематики можно получить в работах [1,3-5,8,9,23,26-28,32,33, 53-56,58,62,64-67,71-75,90,146,149,150,156,157,161,166,167,171,178,184-187,201,209,213,255,273, 285,308,318,333,354,360,373,374,378,384-388,392,397-405,409-414,416,417,536], а также в цитированных в них многочисленных оригинальных источниках.

8.1. Некоторые аспекты использования OC-моделей в математике

После краткого обсуждения ряда математических приложений ***TOC***-концепции более детально остановимся на применении ее для исследования некоторых интересных проблем комбинаторики, теории чисел и дискретной математики, хотя представленные в данном разделе математические приложения являются далеко не исчерпывающими.

1. Прежде всего использование самой концепции однородного Z^d-пространства в сочетании с аналитическими методами может быть продуктивно использовано для решения ряда математических проблем. Например, данный подход позволил исследовать целый ряд свойств решений некоторых типов целочисленных уравнений [5,54,88]. Например, знаменитая Великая теорема Ферма гласит: ***Не существует решения уравнения***

$$X^n + Y^n = Z^n \text{ для } n > 2 \qquad (\mathfrak{R})$$

в целых положительных числах. Полное решение данной проблемы было получено ***Э. Уайлсом*** в ***1993*** как следствие доказательства гипотезы ***Таниямы–Шимуры,*** относящейся к теории эллиптических кривых и модулярных форм. Представленное доказательство является гигантской цепочкой рассуждений, изложенных в ***100*** страничной математической рукописи. При этом, для многих математиков-профессионалов доказательство гипотезы ***Таниямы–Шимуры*** было несравненно важнее доказательства Великой теоремы Ферма, поскольку из этой гипотезы следует немало важных утверждений. Между тем, существует целый ряд решений той или иной степени общности, базирующихся и на более простой технике с использованием ***OC***-концепции. В частности, используя вышеупомянутый подход [54], было получено одно интересное свойство уравнения ($\mathfrak{R}$), а именно: ***Для достаточно больших целых n целочисленные положительные тройки чисел*** $\langle X, Y, Z^{[n/\ln 2]-1}\rangle$ ***не могут быть решениями уравнения*** ($\mathfrak{R}$). Имеются и другие достаточно интересные результаты по целочисленным уравнениям, полученные на основе указанного подхода [54-56,88], иллюстрирующие его потенции в данном направлении.

Не имеющие на сегодня удовлетворительных прикладных интерпретаций *бесконечные* ***КФ OC***-моделей оказываются весьма интересными как представления действительных

чисел, что позволяет исследовать ряд специальных вопросов теории чисел на новой основе. В работе [154] продемонстрированы интересные примеры ***ОС-***моделей, генерирующих фракталы. Непосредственное исследование вопроса полиномиального представления ***ЛФП*** в классических ***ОС-***моделях алгебраическими методами привело к получению целого ряда полезных сравнений по модулям различных типов [53]. Статистические способы исследования ***ОС-***моделей предложили новый аналитический метод вычисления инвариантных мер для одного интересного класса хаотических систем [153]. Исследования по асимптотическим свойствам стохастических ***ОС-***моделей [21] в качестве сопутствующих позволили сформулировать ряд интересных результатов по *стохастическим регулярным матрицам*. Используя специальным образом организованные конечные ***2-ОС*** *(клеточные структуры* ***Дирихле)***, ***Р. Симсон*** показал [5], что они могут иметь много интересных приложений в статистике и анализе различного рода данных. Конечные ***ОС-***модели используются для исследования различного типа оптимизационных задач из областей чистой и прикладной математик. Группа французских математиков [3] показала, что ***ОС-***модели можно с успехом использовать для решения целого ряда важных задач теории графов: декомпозиция блоков, гамильтоновы циклы, минимизация деревьев и др. Так, на основе графо-топологического подхода ***М. Насу*** [396] показал связь многих важных свойств параллельных отображений, индуцируемых классическими ***1-ОС***, с отображениями, индуцируемыми гомоморфизмами графов, что позволяет проследить более тесную связь между методами теории графов и ***ТОС-***проблематикой. Имеются довольно успешные и весьма интересные примеры применения классических ***ОС-***моделей и их модификаций для решения задач вычислительной геометрии. К оптимизационным математическим задачам, успешно исследуемым средствами ***ОС-***моделей, можно отнести такие популярные задачи, как поиск кратчайшего пути на регулярных решетках, а также поиск выхода из дискретных планарных лабиринтов. Средствами ***ОС-***моделей успешно рассматриваются вопросы решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений, работа с булевыми матрицами и целый ряд других важных математических задач как из чистой, так и прикладной математик [90,158,166,177-179,185-187,196,212,219,232,360,396,536]. Здесь мы представим только ряд примеров использования ***ОС-***концепции для решения достаточно известных математических задач из областей комбинаторики и теории чисел.

2. На основе специальных типов классических ***ОС-***моделей можно получать ряд довольно интересных нетривиальных свойств *обобщенного арифметического треугольника* Паскаля ***(ОТП)*** и чисел Фибоначчи [53]. Для дальнейшего изложения поясним ***ОТП-***понятие. Рассмотрим произвольную строку целых чисел $P_0,P_1,P_2,...,P_k$, которая при $k=0$ вырождается в единственное P_0-число. Образуем из нее новую строку чисел $B_0,B_1,B_2, ..., B_{k+1}$ по следующему простому рекуррентному правилу, а именно:

$$B_0 = P_0; \qquad B_j = P_{j-1} + P_j; \qquad B_{k+1} = P_k \qquad (1 \le j \le k)$$

Про эту новую строку будем говорить, что она получена из предыдущей по закону Паскаля и так далее. Если положить $P_0=1$, то получаем хорошо известный арифметический треугольник Паскаля. Выбираем теперь классическую ***1-ОС*** с индексом соседства вида $X=\{0,1,2, ..., n-1\}$, A-алфавитом внутренних состояний, совпадающим с множеством всех неотрицательных целых чисел, и ***ЛФП*** следующего линейного вида:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad x_j \in A \quad (j = 1..n)$$

Тогда строки ***ОТП*** определяются как конечные ***КФ***, генерируемые в заданной таким образом структуре из начальной ***КФ*** $P_0=\square 1\square$. Пусть члены каждого ***ОТП*** нумеруются слева направо, начиная с нуля, и число, стоящее на p-м месте k-й строки, обозначается че-

рез $T_k^p(n)$. Очевидно, выражение $T_k^p(n)$ определено при любых целых числах $k \geq 0$, $n \geq 2$ и $p=0 .. k$. Пусть теперь $S(k,n)$ обозначает сумму чисел k-й строки **ОТП**. Тогда при сделанных предположениях имеет место следующий достаточно интересный результат [53].

***Теорема 134**. Свойства обобщенного арифметического треугольника Паскаля выражаются следующими определяющими соотношениями, а именно:*

$$S(k,n)*S(k,m)=S(k,n*m);\quad S(k,n)*S(t,n)=S(k+t,n);\quad S^m(k,n)=S(k,n^m);$$
$$S(k,n)/S(t,n)=S(k-t,n);\quad r=k*(n-1)+1;\quad T_n^p(n)=T_k^{r-p}(n);$$
$$\sum_{p=0}^{r} T_k^p(n)=n^k;\quad \sum_{p=0}^{r} T_k^p(n)^2=T_{2k}^k(n);\quad \sum_{p=0}^{r}(-1)^p T_k^p(n)=0$$

Более детальное исследование позволит получить и другие интересные свойства **ОТП**, а также обобщить полученные результаты и на общий d-мерный случай. А так как треугольник Паскаля и числа Фибоначчи имеют весьма тесную связь и с биномиальными коэффициентами, факториалами, рядом важных математических формул и таблиц, то подобные исследования представляют определенный интерес также и при организации параллельных вычичислений на основе **ОС**-моделей. При этом, *линейность* **ЛФП** структуры, генерирующей строки **ОТП**, позволяет предпринять попытку связать столь сугубо математические свойства класса *линейных* **ОС**-моделей с их свойством ***универсальной воспроизводимости*** конечных **КФ** в смысле Мура, в значительной мере обеспечиваемой симметричностью **ГФП** модели и отсутствием для нее неконструируемости **НКФ**-типа.

8.1.1. Решение одной комбинаторной проблемы Г. Штейнгауза

Известным польским математиком ***Г. Штейнгаузом*** более **50** лет тому назад была сформулирована интересная комбинаторная проблема под названием «***плюсы-минусы***», чья суть в нашей терминологии сводится к следующему [5,54-56,88].

Пусть $c(k) = p(1,1)p(1,2)p(1,3) \ldots p(1,k)$ будет *первой* строкой из *бинарных* элементов $p(1,j) \in \{0,1\}$; $j=1..k$. Значения для величины k выбираются только из целочисленного множества $M=\{3+4t,4+4t \mid t=0,1,2, \ldots\}$. Тогда элементы j-й строки длины $(k-j+1)$ получаются из $(j-1)$-й строки длины $(k-j+2)$ по следующему простому рекуррентному правилу, а именно:

$$p(j, i) = p(j-1, i) + p(j-1, i+1) + 1 \ (mod\ 2); \qquad (i=1 .. k-j+1;\ j=2 .. k)$$

Нетрудно убедиться, что в результате такого построения получается треугольная фигура $T(k)$, состоящая из $N=k(k+1)/2$ символов $\{0,1\}$. Так как N являются четными числами для значений $k \in M$, то можно сформулировать следующий интересный вопрос: ***возможно ли для каждого допустимого значения $k \in M$ определить $T(k)$-фигуры, состоящие из равного числа $m=k(k+1)/4$ символов «0» и «1»?*** В случае положительного ответа будем говорить, что $c(k)$-строка является ***решением*** проблемы Штейнгауза (*в дальнейшем для краткости будем использовать термин* ***«Ш-проблема»***) для данного k-значения.

Решением **Ш**-проблемы занимался целый ряд математиков как профессионалов, так и любителей, что позволило получить довольно интересные результаты. Однако ее общее решение оставалось открытым. И только на основе ряда результатов по **ТОС** совместно с компьютерным моделированием удалось получить не только ряд новых довольно интересных результатов, но и исчерпывающее решение проблемы [8,81]. Для дальнейшего нам понадобиться ряд основных определений.

***Определение 30**. Решение S(k) Ш-проблемы для каждого целого $k \in M=\{3+4t,4+4t \mid t=0,1,..\}$ называется производным* [*обозначается: D(k)*], *если оно может быть представлено в виде конкатенации D(k)=S(k1)S(k2)S(k3) ... S(kn) решений для значений $k_j < k$ при $\sum_j k_j = k$ (j=1 .. n). Пусть S(k) будет множеством всех возможных решений Ш-проблемы для некоторого k-значения. Легко убедиться, что S(3) = {000,011,110,101} и S(4) ={1101, 1011, 0011, 1100, 1010, 0101}; эти два множества решений будем называть базовыми. Производное решение D(k) называется базисным* [*обозначается: B(k)*], *если в его D(k)-представлении имеют место следующие соотношения, а именно: $S(kj) \in S(3) \cup S(4)$ (j=1 .. n).*

Множества *производных* и *базисных* решений (*наравне с их элементами*) **Ш-**проблемы для каждого ***k-***значения будем обозначать соответственно как ***D(k)*** и ***B(k)***. *Базисные* решения представляют особый интерес в связи с тем, что они составлены из элементарных базовых решений и в определенной мере иллюстрируют один из интересных примеров феномена самоусложнения *квантового* характера**.** В качестве довольно интересного упражнения читателю рекомендуется убедиться в принадлежности элементов $S(3) \cup S(4)$ множества к решениям ***Ш-***проблемы и найти по крайней мере по одному ***базисному, производному*** и просто решению ***Ш-***проблемы.

Для моделирования процесса генерации указанных ***T(k)-***фигур был определен специальный тип классических ***2-ОС.*** Детальный анализ динамики конечных ***КФ*** в такого типа структурах**,** базирующийся на исследовании глубоких свойств их ***ЛФП*** и ***ГФП,*** позволил доказать**,**что для каждого допустимого значения ***k>2 Ш-***проблема имеет положительные ***S(k)-***решения**.** В то же время**,** используя соответствующие ***ОС-***модели совместно с компьютерным симулированием**,** оказалось возможным получить ряд достаточно интересных свойств решений ***Ш-***проблемы, детализирующих их структуру**.** Общий результат в данном направлении представляет следующая основная теорема [5,9,54-56,81,88,90,536].

***Теорема 135**. Пусть S(k), D(k) и B(k) будут соответственно множествами всех, производных и базисных решений Ш-проблемы для некоторого значения $k \in M$. Тогда для каждого допустимого значения k>2 множество S(k) непусто, и для каждого допустимого значения k>10 имеет место следующее соотношение: #S(k) > #B(k), где #R – мощность произвольного конечного R-множества.*

Таким образом**,** данная теорема дает полное решение ***Ш-***проблемы**,** сформулированной более ***50*** лет тому назад. Для исследования целого ряда количественных характеристик решений ***Ш-***проблемы использовалось компьютерное симулирование посредством специальной симуляционной программы**,** составленной на языке ***Basic*** для отечественного ***ПК ИСКРА-226*** [6,90]. С этой целью симулирующая ***Ш-***проблему классическая ***2-ОС*** погружалась в программную среду**,** позволяющую проводить с ней различного рода экспериментальные исследования в интерактивном режиме с учетом специфических черт симулирующей структуры**.** Весь ход эксперимательного исследования оперативно отражался на экране дисплея. Использование комбинированных методов (*компьютерное моделирование и теоретический анализ соответствующих классических* ***2-ОС)*** позволило получить ряд интересных оценок для всех типов решений ***Ш-***проблемы [5,54-56,88,90,536].

***Теорема 136**. Для каждого целого $k \in \{3+4t,4+4t \mid t=0,1,2,..\}$ имеют место следующие определяющие соотношения, а именно:*

$$\#S(k) \succ 2^{k-r(k)} \quad for \quad r(k) \le [k/2]; \qquad \#B(k) \ge \begin{cases} 2^{3t-2}, & if \quad k \in \{3+4t \mid t=1,2,3,...\} \\ 2^{3t}, & if \quad k \in \{4+4t \mid t=1,2,3,...\} \end{cases}$$

Подобные результаты имеют место и для производных D(k)-решений Ш-проблемы.

Следует отметить, что ***Ш-***проблема может быть существенно обобщена следующим образом. Вместо двух символов {***0,1***} используется стандартный для ***ОС-***моделей алфавит

$A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ и элементы $c(k)$-строки выбираются из данного A-алфавита. Тогда как элементы j-й строки длины $(k-j+1)$ получаются из элементов $(j-1)$-й строки длиной $(k-j+2)$ по следующему простому рекуррентному правилу, а именно:

$$p(j,i) = p(j-1,i) + p(j-1,i+1) + 1 \pmod a; \qquad (i=1\,..\,k-j+1;\ j=2\,..\,k) \qquad (64)$$

В результате чего генерируется треугольная $T(k)$-фигура из $N=k(k+1)/2a$ символов из A-алфавита. Так как значения N являются целыми числами для бесконечного множества k-значений, то возникает следующий вопрос: ***возможно ли для каждого допустимого k-значения определить T(k)-фигуры, содержащие равное число k(k+1)/2 вхождений символов из A-алфавита?*** В такой постановке ***Ш***-проблема называется ***обобщенной.***

Вполне резонно предположить, что *обобщенная* ***Ш***-проблема может получать более широкую интерпретацию, а именно: индекс соседства $X=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ предполагается для нее произвольным. В такой постановке допустимые k-значения выбираются из множества $M^*=\{n+t(n-1) \mid t=0,1,2,\ldots\}$, а рассматриваются ступенчатые фигуры $R(k)$, содержащие $L=[(n-1)t^2 + (3n-1)t + 2(n+1)]/2$ символов из A-алфавита. При сделанных предположениях ***общая Ш***-проблема сводится к вопросу о наличии для каждого допустимого k-значения $R(k)$-фигуры, содержащей равное число L/a вхождений символов из A-алфавита. Обобщение методов решения классической ***Ш***-проблемы позволяет сформулировать следующий основной в этом направлении результат [5,9,54-56,81,88,90,536].

<u>Теорема 137</u>. Для произвольного алфавита $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ и допустимого значения $k\geq 2a$ обобщенная Ш-проблема имеет не менее $2a$ положительных решений. Число $G(k)$ решений обобщенной Ш-проблемы при $A=\{0,1,2\}$ и допустимых значениях $k\in\{2+3t,\ 3+3t \mid t=1,2,\ldots\}$ удовлетворяет соотношению $G(k) > 2^{k-1}$. Для каждого допустимого целого $k\in M^*$, A-алфавита и индекса соседства X общая Ш-проблема имеет не менее $2k$ решений.

В заключение раздела следует отметить, что результаты теорем ***135-137*** можно обобщать и на случай высших размерностей и рекуррентных правил (**64**) более общего вида. Наконец, результаты исследований в этом направлении обсуждаются в работах [54-56,88,90].

8.1.2. Решение одной проблемы Улама из теории чисел

Эвристическое исследование проблемы роста уже в случае двух и трех измерений показывает все многообразие растущих фигур, которое весьма сложно достаточно удовлетворительно характеризовать формальными методами. Поэтому с целью упрощения исследования данной проблемы ***С. Улам*** попытался ввести соответствующие определения и в одномерном случае с надеждой, что некоторые основные свойства так называемых ***последовательностей однозначно определенных сумм (ПООС)*** помогут прояснить картину в данном направлении [1,3,5,123,128,220,225]. Однако не столько с точки зрения проблемы роста, сколько в связи с теорией чисел данная проблема получила большую известность и привлекла к себе внимание целого ряда исследователей. Основная суть данной проблемы достаточно проста и сводится к следующему.

На множестве $M=\{1,2,3,\ldots\}$ целых положительных чисел определяется *бинарная* операция $\varphi: x+y \Rightarrow z$, где $x,y,z\in M$. Элементы z образуют множество $M^*\subset M$. При этом, на операцию φ накладываются следующие ограничения: *(1)* начав с чисел, равных a и b $(a<b)$, все последующие z-элементы получаем как суммы каких-либо двух предыдущих элементов из уже полученной последовательности, но не включаем в них те суммы, которые возможно получать более чем одним способом; *(2)* сами с собой числа не складываются и в сложении обязательно должен участвовать самый правый элемент сформированного отрезка *(a,b) ПООС*. Полученную таким образом числовую последовательность будем назы-

вать ***ПООС(a,b)***. Например, первыми двенадцатью членами ***ПООС(1,2)*** являются следующие натуральные числа, а именно: ***1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28***.

Близнецами в ***ПООС(a,b)*** будем называть пары смежных элементов, отличающихся между собой по значению на величину ***p=p(a,b)***. В дальнейшем любые множества пар близнецов будем обозначать просто ***Б(p)***. Например, ***Б(a+b)*** – множество пар близнецов вида ***p(a,b)=a+b***. Первоначальная постановка проблемы ***С. Улама*** состоит в определении мощности множества ***Б(2)*** для ***ПООС(1,2)***, т.е. пар смежных элементов множества ***M****, отличающихся по значению на **2**. В этой связи ***С. Улам*** выдвинул гипотезу о *бесконечности* ***Б(2)***-множества. Нами данная проблема исследовалась в более общей ее постановке, для чего потребуется ввести ряд дополнительных определений.

Дополнительно к последовательности ***ПООС(a,b)*** будем рассматривать последовательность типа ***ПООС1(a,b)***, отличающуюся от первой только тем, что не требуется обязательного участия в бинарной **φ**-операции правого крайнего элемента уже сформированного ***(a,b)***-отрезка ***ПООС***. Отметим, что оба приведенных варианта ***ПООС*** наряду с самостоятельным интересом в теории чисел имеют ряд весьма интересных *биологических* интерпретаций, связанных с проблемой роста, формализованной для простейшего одномерного случая. Относительно к данной проблеме нами исследовались следующие вопросы поведения ***ПООС*** [3,5,88,90], а именно:

- определение ***частичных плотностей ПООС***, начиная с заданного элемента;
- степень роста ***значений элементов ПООС***, начиная с заданного элемента;
- изменение частичных плотностей ***пар близнецов*** относительно всей ***ПООС***;
- изменение расстояния между ближайшими ***парами близнецов*** в ***ПООС***;
- оценка числа ***пар близнецов*** в заданном отрезке ***ПООС***.

При этом все перечисленные вопросы относятся как к последовательности ***ПООС(a,b)***, так и к ***ПООС1(a,b)*** при произвольных значениях целых положительных чисел ***a*** и ***b***.

Первые наши исследования по ***ПООС***-проблематике основывались на одной довольно простой классической ***2-ОС*** с использованием компьютерного симулирования на ЭВМ второго и третьего поколений [1,3]. Дальнейшее развитие модели и использование развитого симуляционного интерактивного пакета ***POOS*** для ***IBM***-совместимых ***ПК*** позволило существенно продвинуть решение данной проблемы [6,15]. Основные результаты, полученные в данном направлении, можно охарактеризовать следующим образом.

Прежде всего, рассмотрим более сложный случай ***ПООС1(a,b)***-последовательности. Но, к сожалению, алгоритма формирования ***k***-го элемента ***M****-множества (*кроме естественного алгоритма генерации, лежащего в основе определения последовательности*) обнаружить пока не удалось. Однако было установлено, что каждая ***ПООС1(a,b)*** обладает бесконечным множеством пар близнецов по крайней мере одного из следующих типов: ***Б(a)***, ***Б(b)*** или ***Б(a+b)***. Показано, что если a_k есть ***k***-й элемент ***ПООС1(a,b)***, то ***k***-м элементом последовательности ***ПООС1(da,db)*** будет da_k-число. Данное свойство сохраняет силу также и для последовательностей ***ПООС(a,b)***-типа.

Совершенно иная картина имеет место в случае ***ПООС(a,b)***, где удалось получить почти исчерпывающие решения ряда вариантов обобщенной проблемы ***С. Улама***. Например, ***ПООС(1,b)*** при $b \geq 5$ обладает бесконечными множествами ***Б(b)*** и ***Б(b+1)*** пар близнецов, а ее a_k-элементы вычисляются по простым рекуррентным формулам, а именно:

$$a_k = \begin{cases} b+k-2, & if \quad k \in \{3,4,...,b+2\} \\ 4*b-2, & if \quad k = b+3 \\ (k-b+1)*b+[(k-b-3)/2]-2, & otherwise \end{cases}$$

Плотность такой последовательности относительно ***N***-множества составляет величину $\rho=2/(2b+1)$. ***ПООС(a,b)*** при $a>1$ и $b/a-[b/a]>0$ имеет бесконечное множество ***Б(a)*** пар близнецов, а ее плотность относительно ***N***-множества составляет величину $\rho=1/a$. Элементы такой последовательности, начиная с номера $k \geq 3$, вычисляются по рекуррентной формуле $a_k=b+(k-2)a$. В наших книгах [9,15,54] можно найти целый ряд других интересных примеров ***ПООС(a,b)***, для которых можно установить явные функциональные соотношения вида $a_k=F(k,a,b)$ и выяснить другие их поведенческие свойства.

Для характеристики поведения ***ПООС(1,2)***, т.е. классической проблемы ***Улама***, а значит и ***ПООС(a,2a)***, поступаем следующим образом. Наряду с множествами ***K*** и ***A(k)*** (*соответственно номеров* ***k*** *и значений* a_k*-элементов последовательности*) определяем множество ***P*** разностей $\Delta_k=a_{k+1}-a_k$ (*изменение значений элементов* ***ПООС***). Оказывается, что структура ***P***-множества значительно более удобна для исследования. А именно, начиная с номера $k=14$, в ***P***-множестве прослеживается вполне определенная закономерность.

Будем называть элемент $\Delta_k \in P$ ***скачком***, если $\Delta_k \neq \{2,8\}$. ***Нарастающим скачком*** назовем такой элемент $\Delta_k \in P$, который имеет максимальное значение среди всех скачков Δ_k $(j<k)$. Нарастающие скачки не ограничены сверху и их значения растут с ростом ***k***-значения. Интервал из четырех элементов $<2,8,2,\Delta_k>$ (Δ_k – *скачок, не обязательно нарастающий*) будем называть ***базовым***. Оказывается, что начиная с номера $k=14$, все ***P***-множество состоит из базовых интервалов, прилегающих друг к другу, т.е.

$$P = \{<2, 8, 2, \Delta_1> <2, 8, 2, \Delta_2> <2, 8, 2, \Delta_3> <2, 8, 2, \Delta_4> \ldots\ldots <2, 8, 2, \Delta_j>\}$$

Следовательно, изучение ***P***-множества сводится к исследованию поведения подмножества $P1=\{\Delta_k\}$ его скачков. Можно показать, что распределение нарастающих скачков в ***P***-множестве подчиняется определенной закономерности, позволяющей выявить функциональное соотношение $a_k=F(k,d)$ для ***ПООС(d,2d)*** [8,9,15,88]. Это позволяет получить полное решение классической проблемы ***С. Улама***.

<u>Теорема 138</u>. Последовательность ПООС(1,2) обладает бесконечным множеством Б(2) пар близнецов, а ее предельная плотность относительно N-множества целых чисел определяется следующим соотношением, а именно:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{4*(2^{k+2}-4)+14}{(12+P_o)*(2^{k+2}-4)+72*P_o*5^{2k-10}} = 0$$

Для экспериментального исследования ***ПООС*** была создана симуляционная программа на алгоритмическом языке ***PL/1*** в ***0C/EC*** [320] для ***ЕС ЭВМ***, позволившая получить целый ряд интересных эмпирических результатов. В частности, было показано, что частичные плотности ***ПООС(1,2)*** монотонно стремяться к пределу согласно эмпирической формуле $r(k)=14/k^4+m$ $(0 \leq m<0.002)$, тогда как скорость сходимости к данному пределу определяется эмпирической формулой $\Delta(k) = 1.15*10^3*k^{-2.31}$. Более того, реализация на ***ЭВМ*** в определенной мере оптимального алгоритма, позволяющего исследовать довольно важные аспекты динамики ***ПООС***, может служить хорошим примером сложной во временном отношении задачи. В этом плане удалось получить удовлетворительную эмпирическую оценку временной сложности задачи в виде $t(p)=4.472*10^{-6}*p^{2.92}$, где p – размер активной информационной базы решаемой задачи.

Полученные результаты по *обобщенной* проблеме ***Улама*** наряду с чисто математическим представляют интерес также и в плане исследования формальных моделей роста в простейшем одномерном случае, а также с точки зрения прикладной теории сложности вычислительных алгоритмов и прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики в целом.

8.1.3. Алгебраическая система для полиномиального представления локальных функций перехода в классических ОС-моделях

Исследование целого ряда классов *дискретных параллельных динамических систем* **(ДПДС)**, включая **ОС**-модели, тесно связано с изучением свойств их **ЛФП**, которые представляют собой ***a*-**значные логические функции **(*a*-ЗЛФ)**. Среди различных подходов к изучению таких функций особое место занимает алгебраический подход, при котором каждую ***a*-ЗЛФ** можно взаимно однозначно представить некоторым алгебраическим полиномом по **(mod *a*)** максимальной степени **$n(a-1)$** над **A**-полем, где ***a*-ЗЛФ –** любое отображение $R^{(n)}: A^n \to A$. Однако в случае составного ***a***-числа далеко не все ***a*-ЗЛФ** могут быть представлены в такой полиномиальной форме, а точнее «**почти все**» функции не имеют такого представления. А так как **A**-алфавит в **ОС**-моделях может быть произвольным, то возникает весьма актуальный вопрос распространения алгебраического метода исследований **ЛФП** на общий случай алфавита внутренних состояний.

В этой связи возникает интересная задача: ***можно ли определить алгебраическую систему (АС), допускающую полиномиальное представление a-ЗЛФ в A-алфавите при a составном подобно случаю a-простого?*** В результате проведенных исследований была определена **АС** [5,8,9,84], описание которой представлено в разделе **3.2**, допускающая для «**почти всех**» ***a*-ЗЛФ** полиномиальное представление по **(mod *a*)** для случая составного ***a***-модуля. В такой $AC=<A_a; +; \#>$ операция **(+)** определяет классическую операцию сложения по **(mod *a*)**, а **#**-операция **–** умножение согласно табл. **5**. Результат полиномиального представления ***a*-ЗЛФ** отражает теорема **43**. Данная теорема сыграла важную роль в исследованиях **ДПДС** для случая составного ***a***-модуля и позволила получить целый ряд интересных результатов по **ТОС**-проблематике, часть из которых была представлена выше. Следует отметить, что различия между определенной нами $AC <A_a; +; \#>$ и классической системой $<A_a; +; x>$, в которой операции **(+)** и **(x)** являются соответственно обычными бинарными операциями сложения и умножения по **(mod *a*)**, весьма существенны и детально обсуждаются в [9,84]. В частности, отличием нашей **АС** от классической является то, что в ней не соблюдается закон дистрибутивности, что затрудняет проведение основных операций в полиномиальной **АС**-арифметике [5,88,90,536].

Этот и ряд других обстоятельств сделали весьма актуальным разработку специального программного пакета **Polynom** для автоматизации работы исследователя с $AC=<A_a;+;\#>$. Разработанный для отечественного **ПК ИСКРА-226** пакет (*впоследствии адаптированный и на другие популярные платформы такие, как Windows и Linux*) [6] позволяет не только автоматизировать процесс представления произвольных ***a*-ЗЛФ** в полиномиальной форме $P_{\#}(n)$ **(mod *a*)** вида (**34**), но и выполнять все необходимые базовые и наиболее часто используемые операции в полиномиальной арифметике, определяемой указанной **АС**. Данное программное средство оказалось достаточно полезным в целом ряде приложений, использующих вышеуказанную полиномиальную арифметику на основе **АС**.

Исследование проблемы декомпозиции **ГФП** наряду с целым рядом других фундаментальных вопросов динамики классических **ОС**-моделей алгебраическими методами базируется, в частности, на возможности полиномиального представления соответствующих **ЛФП** над **A**-полем, где **A –** алфавит внутренних состояний **ОС**-модели. В главе 7 результаты исследования по проблеме декомпозиции алгебраическими методами рассматривались относительно упомянутой **АС** и относительно классического **A**-поля Галуа из

a элементов ***(a – простое)***. Пусть теперь ***AC <A_a; +; x>*** является полем Галуа из ***$a = p^k$*** элементов ***(p – простое и k – любое положительное целое)***. Тогда для задачи полиномиального представления ***ЛФП*** над такими полями определенный интерес представляет следующий основной результат [5,53,88].

<u>Теорема 139</u>. В поле Галуа из $a = p^k$ элементов (p – простое и k – любое положительное целое число) имеют место следующие соотношения, а именно:

$$(xy)^{a^m} = xy; \quad (x \mp y)^{a^m} = x \mp y; \quad \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^{a^m} = \sum_{j=1}^{n} x_j; \quad \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)^{a^m} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$
$$c_j, x_j, x, y \in A; \quad j = 1..n$$

Для каждых p-простого и целого X>p справедливо сравнение $X^{p+1} = X^2$ (mod p). Если m – целое и $X^k = X^q$ (mod m) для X<m ($2 \le q < k \le m$), то данное сравнение справедливо и при всех значениях X≥m; если же $q \in \{0,1\}$, то $X^{k+1} = X^{q+1}$ (mod m) при X>m. В случае, если p – нечетное простое, m – целое и $a = p^m$, то $X^{a-a/p+m} = X^m$ (mod a) и $X^p = X$ (mod 2p). Если a – простое число, то справедливо следующее сравнение $M = \sum_{j=1}^{a} X^j + X$ ***(mod a) при X≠1 и M=0 в противном случае.***

Результат данной теоремы может оказаться весьма полезным как при исследовании динамики классических ***OC***-моделей алгебраическими методами, так и при решении ряда других математических задач из алгебраической теории чисел [54]. В связи со сказанным в общем случае представляет интерес следующий вопрос. Очевидно, для каждого целого ***a > 0*** существуют минимальные положительные целые числа ***p*** и ***k*** такие, что ***$X^p = X^k$ (mod a)*** для ***a≥p>k≥1*** и ***X∈A={0,1, ..., a-1}***. При этом, ***p=p(a)*** и ***k=k(a)*** являются функциями от вида разложения ***a***-числа на простые множители. При этом, вторая часть теоремы ***139*** дает ответ для двух конкретных случаев ***$a=p^m$*** и ***a=2p*** при ***p***-простом нечетном. Было бы интересно получить явные значения для ***p(a)*** и ***k(a)*** как функции разложения ***a***-числа на простые множители для всех остальных либо наиболее интересных случаев.

Исследование вопросов динамики различного класса ***OC***-моделей в качестве побочных позволило получить ряд сугубо математических результатов. Так, статистические методы исследования ***OC***-моделей привели к созданию нового аналитического метода вычисления *инвариантных* мер одного класса хаотических систем [160]. Исследования асимптотических свойств стохастических ***OC*** [21] в качестве сопутствующих позволило сформулировать ряд довольно интересных результатов по стохастическим регулярным матрицам, один из которых сводится к следующему. ***Пусть G*(i,j) – матрица, полученная из (nxn)-матрицы $G = \{g_{ij}\}$ вычеркиванием i-й строки j-го столбца. Если матрица G является стохастической, регулярной и $g_{kk} = 1$, то имеет место следующее соотношение***

$$\{g_{ik}\}[E - G^*(i,j)] - 1 = \{v=1\} \quad (i, j = 1..n; i = k)$$

где все использованные обозначения соответствуют общепринятым в теории матриц.

Наряду с представленными результаты исследований по ***TOC***-проблематике позволили в качестве «*побочных*» получить ряд других результатов ***(****в том числе и сугубо математических****)*** различного уровня значимости и общности, с которыми можно ознакомиться в [54-56,114]. В настоящее время ***TOC***-подход в свете ряда ранее полученных ***«побочных»*** результатов используется нами для решения некоторых задач теории чисел и оптимизации вычислительных алгоритмов для компьютеров с *массивным* параллелизмом [536].

8.2. Некоторые аспекты использования ОС-моделей в биологических науках

Последнее двадцатилетие характеризуется особенно интенсивным проникновением новых математических концепций и методов в биологические науки. И в первую очередь это связано именно с дальнейшим становлением теоретической и математической биологий (*при этом в оба эти понятия мы вкладываем тот же смысл, что и в аналогичные понятия, относящиеся к предмету современной физики*), а также массовым использованием современных компьютерных средств, позволяющих с высоким уровнем наглядности исследовать разнообразные биологические модели. Наиболее интенсивные и интересные попытки предпринимаются в исследовании развивающихся биологических систем. Математическому анализу был подвергнут один из наиболее сложных и интригующих разделов современной биологии – биология развития живых систем.

Рассматривая в разделе вопросы дискретного моделирования биологии развития на основе ***ОС***-концепции, следует в то же время иметь в виду, что данный аппарат можно успешно использовать для построения и исследования целого ряда других биологически мотивированных формальных моделей, например, из эволюционной и популяционной биологий, экологии, нейробиологии, эпидемиологии, иммунологии и др. При этом следует иметь в виду, что ***ОС***-концепция носит существенно более общий характер, вовлекая в свою модельную среду основную медико-биологическую проблематику наряду с целым рядом биофизических направлений. Обсуждение подобных и связанных с ними вопросов можно найти в цитированной выше литературе, а также в ***Internet***-сети по соответствующим ключевым словам.

8.2.1. Основные предпосылки модельного подхода в биологии развития

Первые попытки математизации этого раздела биологии встретили значительные трудности, а первые полученные результаты оказались слишком тривиальными, чтобы брать их за основу для дальнейших исследований. Поэтому последующее развитие исследований пошло по пути создания отдельных математических моделей, отражающих те или иные аспекты биологии развития. К настоящему времени накопилось значительное число таких моделей, реализующих с различной степенью адекватности те или иные биологические процессы и феномены развития живых организмов. При этом, для моделирования использовались различные подходы, обзор и анализ которых можно найти и в работах [1,3-5,10,123,134,162,163,193,194,264,329-335] и цитированных в них многочисленных источниках, а также в таких известных журналах как «***Биофизика***», «***Journal of Theoretical Biology***», «***Mathematical Biology***», «***Mathematical Biosciences***» и др. В настоящем разделе характеризуются основные подходы к моделированию биологии развития с кибернетической точки зрения с акцентом на дискретном аспекте моделирования. В этом плане особое внимание привлекают подходы на основе концепций ***ОС***-моделей и ***L***-систем ***Линденмайера*** [1,3-5,23,26,27,31,33,46,88,114,136,163,171,201,203,233,251,264,333,536].

Развитие организмов, особенно высших животных, является весьма таинственным процессом: ***как может из единственной клетки – оплодотворенного яйца (зиготы), вырасти организм, состоящий из огромного количества клеток, организованных в чрезвычайно сложную саморегулирующуюся систему?*** Преклонение перед данным феноменом еще более возрастает, если вспомнить, что он существенно автономен, все клетки в орга-

низме генетически идентичны и что развитие строго контролируемо изнутри самого организма. Здесь следует сказать несколько слов о каждом из этих аспектов развития отдельно. Говоря об автономности процесса, мы имеем в виду тот факт, что вся информация, необходимая для развития организма, содержится в исходной клетке-зиготе; внешняя среда обеспечивает процесс развития только энергией и строительными материалами, а не информацией. Действительно, зигота определенного вида, какое бы то ни было окружение (*непосредственно не препятствующее процессу развития*), всегда превращается в организм того же самого вида.

Рост и обновление осуществляются главным образом через непрерывный процесс самовоспроизведения клеток в организме, но дифференциация клеток в процессе роста значительно более трудна для понимания, так как по общему мнению биологов все клетки содержат один и тот же набор генетических правил – новые клетки генотипично идентичны своим предшественникам. В данной связи возникает важный вопрос: ***как клетки становятся отличными друг от друга, развиваясь в тщательно выработанные пространственные формы?*** Более того, весь процесс развития строго контролируем изнутри таким образом, что различные части развивающегося организма развиваются в определенных пропорциях относительно друг друга и организма в целом, и организм в период развития (*и даже после этого*) в значительных пределах способен устранять повреждения, вызванные внешними причинами, т.е. организм в определенных диапазонах способен к регенерации. Естественно, процесс развития использует строгие механизмы контроля, регуляции и адаптации. Однако на сегодня мы не знаем лучшего ответа на все эти вопросы, как решение аналогичных проблем для искусственных систем, т.е. использование *модельного принципа* исследования процессов развития. Следует при этом отметить, что изучение феномена развития привело ряд исследователей к выводу, что организм нельзя рассматривать как некоторую искусственную машину – ***автомат***.

Поэтому с точки зрения кибернетики, общей теории систем да и самой биологии весьма важно попытаться выяснить важный гносеологический вопрос: ***может ли машина вообще развиваться подобно живым системам и, если может, то каким образом?*** Это важно знать по двум основным причинам: *во-первых*, если машина не может развиваться, то сохраняет определенную силу аргумент о том, что живые системы обладают некоторым специфическим феноменом. В таком случае аргумент кибернетики о том, что живые и неживые системы могут быть определены в терминах одних и тех же принципов, был бы поставлен под сомнение. *Во-вторых*, при положительном ответе, т.е. если были бы поняты принципы развития неживых систем и проведена удовлетворительная аналогия их с живыми системами, то наряду с важными революционизирующими применениями в технологии, можно было бы получить удовлетворительный аппарат исследования всех живых развивающихся систем, значение которого трудно было бы переоценить.

Биологическое развитие включает два важных феномена: рост организма и дифференциация составляющих его клеток. ***Рост***, как известно, означает простое увеличение размера организма, главным образом, за счет управляемого самовоспроизведения его клеток, тогда как ***дифференциация*** является более сложным понятием и целесообразно выделять по крайней мере два ее типа – ***пространственную*** и ***фенотипическую***, которую ***М. Аптер*** называет ***функциональной*** [330]. Так, в растущей ткани можно выделить изменение формы и конфигурации межклеточной связи (*пространственная дифференциация*) наряду с увеличением дифференциации отдельных типов клеток (*фенотипическая дифференциация*). Следует отметить, что для пространственной дифференциации в биологии развития существует устоявшийся термин ***морфогенез***, однако для наших целей моделирования более естественным представляется именно первый термин. Конечно, фенотипическая дифференциация также имеет место в пространственной дифференциа-

ции, но для прозрачности задач моделирования она не включается при условии главенствующей роли пространственной дифференциации [4,5,27,31,33,46,88,90,536].

Однако развивающийся организм характеризуется не только возможностью достижения сложной *пространственной* и *фенотипической* дифференциации, но и в большей или меньшей мере наличием способности к *регуляции* и *регенерации* в процессе своего развития и последующего функционирования. При этом под ***регуляцией*** понимается свойство организма развиваться в нормальную особь, даже в случае возникновения помех в процессе развития (*например, при удалении или перестройке клеток, исключая критические случаи, летальные для организма*). Тогда как под ***регенерацией*** мы понимаем свойство организма восстанавливать (*в определенный пределах*) любое нарушение, которое организм получил в процессе своего полного развития.

Несмотря на важность понимания процессов биологического развития, включающих в себя ***пространственную*** и ***фенотипическую*** *дифференциацию*, ***регуляцию***, ***регенерацию***, а также феномен ***самовоспроизведения***, первые попытки достичь успеха в этом направлении можно отнести к ***первому*** этапу ***модельного подхода***, который характеризуется моделированием отдельных феноменов общего процесса развития, причем для моделирования используется самая разнообразная техника. Общим для всех этих моделей являлся сам ***принцип*** исследования: ***формализация исследуемого феномена ⇒ построение конкретной модели ⇒ сравнительный анализ*** функционирования модели и реального биологического феномена на предмет их адекватности по тем либо иным выбранным показателям. Основную роль *первого* этапа моделирования можно охарактеризовать тем, что целому ряду весьма сложных аспектов общего процесса развития была дана вполне удовлетворительная формализация, которая корректировалась на основе анализа многочисленных формальных моделей [1,3-5,23,26,27,31,33,123,136,162,330-338,343-351,536].

Последующий анализ целого ряда моделей позволил по-новому взглянуть на некоторые регуляторные механизмы процесса развития. Однако мы имели ряд несвязанных общей теоретической основой моделей. Естественно, такое положение не способствовало выработке ***единого*** аппарата моделирования в биологии развития. Между тем, уже в рамках первого этапа зародились два формальных аппарата моделирования некоторых феноменов процесса развития, а именно: ***клеточные автоматы*** и ***развивающиеся параллельные грамматики Линденмайера. Клеточные автоматы***, получившие впоследствии синоним ***Однородные структуры (ОС) – Homogeneous Structures*** в русскоязычной терминологии с нашей подачи (*наряду с ныне общепринятой терминологией в этой области*) [1,3, 19,20,119], впервые были использованы ***Дж. фон Нейманом*** для изучения проблемы самовоспроизведения [124,128], тогда как параллельные развивающиеся грамматики были впервые введены ***А. Линденмайером*** с целью моделирования процессов морфогенеза растений [3,163,251,264,336-338] и впоследствии получили название ***L-систем***. В настоящее время и ***ОС***, и ***L-системы*** представляют собой наиболее общий и популярный аппарат дискретного моделирования в биологии развития [3,5,163,251,264,336-338,536], а математическая теория обоих формальных средств моделирования достаточно хорошо развита и позволяет формальными методами исследовать на клеточном уровне такие феномены развития как рост, самовоспроизведение, дифференциация, регуляция и регенерация. Наряду с этими проблемами ***ОС***-модели позволяют удовлетворительно исследовать такие вопросы развития как сложность развивающихся систем; процессы, управляющие ростом, регуляцией и регенерацией; устойчивость процессов развития, необходимые и достаточные условия регуляции и регенерации и т.д. [1,3-5,23,26,27,31, 33,54,90,536]. Вместе с тем, аппарат ***ОС***-моделей порождает и ряд весьма существенных сложностей при исследованиях в их среде некоторых биологически мотивированных феноменов. И основные трудности данного плана связаны именно с большой чувствительностью ***ОС***-моделей к такому важному фактору как «*размерность*», а также и с огра-

ничениями на возможность *деления* клеток внутри моделируемого развивающегося организма, т.е. с наличием весьма жесткой системы координат в ***ОС-***среде.

Учитывая существенные сложности моделирования в ***ОС-***среде ряда биологических феноменов и процессов, ***А. Линденмайер*** ввел свои системы**,** известные ныне под названием ***L-систем*** [3-5,162,163,251,260,336]**.** В рамках ***L-***систем для моделирования морфогенеза и растущих структур ***А. Линденмайер*** предложил *ветвящиеся алгоритмы***,** а рядом авторов для моделирования развития и роста были введены графические порождающиеся системы [337]**.** На основе ***L-***систем был реализован целый ряд весьма интересных растущих алгоритмов, обзор которых может быть найден в прекрасной работе [338]. В последнее время на основе ***L-***систем появляется все большее число моделей как собственно роста, так и роста в составе общего феномена развития. Вместе с тем, несмотря на большую предпочтительность ***L-***систем в качестве среды моделирования в биологии развития, ***ОС-***модели представляют собой весьма интересное средство исследования многих процессов и феноменов развития по той причине**,** что они достаточно удовлетворительно отвечают клеточной природе биологических систем и позволяют создавать довольно эффективные модели развития**,**качественно визуализируемые средствами современных персональных компьютеров. Можно со всей определенностью констатировать, что ***ОС-модели*** и ***L-системы*** хорошо дополняют друг друга, стимулируя создание аппарата моделирования, наследующего лучшие черты обоих систем [5,88,90,536].

Поэтому уместно ввести понятие ***L-систем.*** Пусть ***B*** есть некоторый конечный алфавит множества состояний клетки, а ***B**** обозначает множество всех одномерных слов из элементов ***B-***алфавита**;** при этом**,** ***B**** содержит также и *пустое* слово**.** Тогда ***L-система –*** упорядоченная четверка $L=<B,b,\sigma,bS>$**,** где**:** $b\in B$ **–** постоянное воздействие внешней среды на слово *(клетку)***;** σ **–** функция, определяющая по состоянию любых трех прилегающих клеток непустое конечное множество слов в алфавите $B\backslash\{b\}$**,** на которые заменяется внутренняя клетка из трех прилегающих**;** ***bS –*** начальная клетка, из которой и начинается весь процесс развития**.** Итак**,** рассматривается система параллельных σ**-**правил**,** которые порождают из *одного* начального однобуквенного слова *(зиготы)* множество одномерных слов *(имитирующих развитие организма)* в некотором конечном ***B-***алфавите**.** Правила порождения слов допускают вставки любого числа букв в любые места слова**;** при этом, допускаются и *недетерминированные* переходы. Данное обстоятельство и обеспечивает возможность моделирования процесса деления клеток внутри развивающегося организма.

Таким образом, ***L-***системы существенно расширяют одномерные ***ОС-***модели в смысле множеств порождаемых ими слов. С точки зрения биологической адекватности они получают вполне удовлетворительные интерпретации, хорошо зарекомендовав себя при описании целого ряда биологических процессов и являясь в настоящее время**,** пожалуй, наиболее разработанным в математическом плане и адекватным в биологическом отношении аппаратом для задач дискретного моделирования в биологии развития [4,536]. В отношении же собственно самого аппарата ***L-***системы более абстрактны, чем ***ОС-***модели, хотя бы потому, что они жестко не привязаны к системе координат и**,** по сути дела**,** являются одним из типов параллельных формальных грамматик, которые в настоящее время интенсивно изучаются [264]. При этом следует отметить**,** что и ***ОС-***модели могут рассматриваться как некоторый тип параллельных формальных грамматик ***(*** τ_{Π}***-***грамматики**;** глава 5***).*** Несколько ниже мы несколько детальнее проанализируем как ***ОС-***модели**,** так и ***L-***системы на предмет их потенциальных возможностей в контексте моделирования в биологии развития. Вместе с тем, недостатки обоих систем предполагают необходимость продолжения работ по созданию наиболее адекватного задачам биологического моделирования математического аппарата. В этом направлении ведутся достаточно интенсивные проработки с использованием междисциплинарных подходов и привлечением целого ряда известных специалистов, работающих в смежных областях [536].

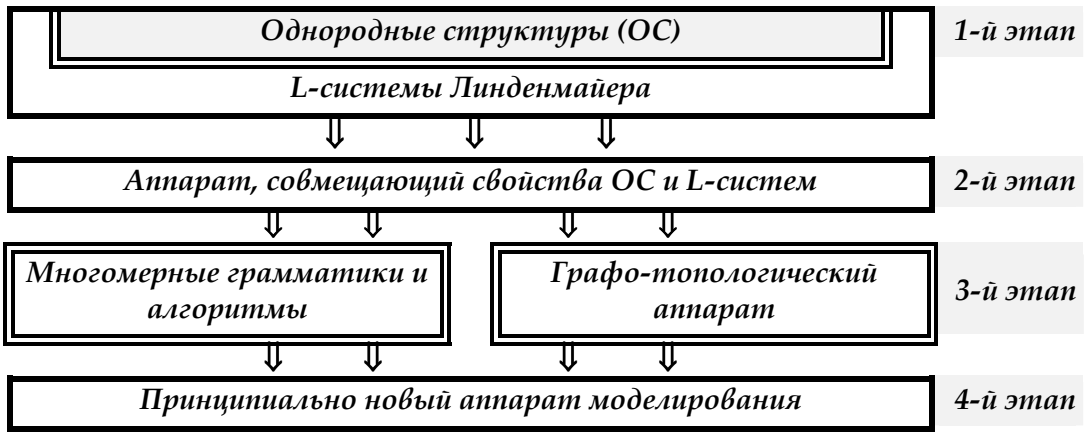


Рис. 24. Предполагаемая схема развития перспективного аппарата моделирования.

На рис. ***24*** представлены основные этапы становления и дальнейшего развития дискретного модельного исследования в биологии развития и ряде других разделов математической биологии**.** При этом, нами делается акцент на *дискретном* аппарате моделирования, в связи с чем вне рамок рассмотрения оказался целый ряд весьма интересных моделей развития *непрерывного* характера [4]. Ниже обсуждаются наиболее интересные подходы и модели основных аспектов биологии развития на протяжении нынешнего ***2***-го этапа моделирования**,** получившего наиболее яркое развитие в последнее время. С другими аспектами моделирования в биологии развития можно детальнее ознакомиться в цитируемой выше литературе и содержащихся в ней многочисленных источниках**.** Рассмотрение начнем с проблемы моделирования такого общего для всего живого феномена как ***самовоспроизведение.*** Данная проблема составляла краеугольный камень основных дискуссий о возможностях машин и живых систем и явилась одним из основных катализаторов стимуляции исследований по абстрактным автоматам именно на предмет их возможностей как аналогов или даже заменителей развитых живых систем, включая и самого человека. Актуальность данной проблематики весьма велика и носит чрезвычайно многоаспектный характер**,** включая и такой сложный во всех отношениях вопрос как проблема зарождения жизни и ее предназначения в общей системе мироздания.

8.2.2. Формальные дискретные модели самовоспроизведения

Феномен *самовоспроизведения* является наиболее характерной чертой всего живого и неудивительно**,** что первые попытки кибернетического моделирования коснулись именно этого процесса. К детальному изучению того, как в машине воплотить процесс самовоспроизведения первым приступил ***Дж. фон Нейман,*** который вскоре пришел к выводу, что программа построения машиной своей копии не может быть полной [124]. Для получения полной программы необходимо дать описание не только самого автомата**,** но и программы**:** потребовалось бы описание описания и так до бесконечности**.** Но ***Дж. фон Нейман*** избежал этой трудности**,** создав две машины**,** рассматривающие описание в *двух* различных аспектах**.** Одна из машин ***– копировальное устройство (КУ),*** другая ***– исполнительное устройство (ИУ).*** Оба устройства работают в комплексе с ***устройством синхронизации (УС),*** управляющим работой каждого из них. *Программа самовоспроизведения* ***(ПС)*** должна описывать функционирование всех трех устройств ***КУ***, ***ИУ*** и ***УС.*** Тогда всю машину можно описать формальным выражением**:** ***КУ+ИУ+УС+ПС.*** Если теперь такой машине дано ее полное описание**,** ***КУ*** копирует его**,** а ***ИУ*** производит все действия**,** необходимые для построения ***КУ***, ***ИУ*** и ***УС.*** Результаты**,** полученные в молекулярной генети-

ке, обнаруживают поразительные аналогии между вышеуказанными элементами машины ***Дж. фон Неймана*** и процессами в живой биологической клетке [536].

Ряд авторов рассмотрели проблему ***самовоспроизведения*** с чисто математической точки зрения. Так ***Дж. Майхилл*** [128] и ***А.Р. Смит*** [131] исследовали данную проблему с теоретико-рекурсивной точки зрения, а ***С. Улам*** [220] сформулировал проблему существования простой универсальной самовоспроизводящейся матричной системы, положительное решение которой предполагало бы существование такого типа формальных воспроизводящихся матричных систем. Однако уже в работе [16] мы доказали отсутствие универсальной воспроизводящейся матричной системы достаточно большого ранга. Однако для случая бесконечных матриц эта проблема до сих пор остается открытой. На наш взгляд, существующие на сегодня чисто математические модели, позволяя на формальном уровне исследовать только самый общий феномен самовоспроизведения, не могут добавить ничего нового к проблеме кибернетического моделирования биологии развития. В этом они сходны с механическими моделями самовоспроизведения [1,3-5,88,536].

Учитывая ограниченность применения механических и математических моделей, ***фон Нейман*** обратился *(по предложению* ***С. Улама)*** к клеточным автоматам *(однородные структуры*; ***ОС-модели)***. Концепция ***ОС*** позволила ***Дж. фон Нейману*** построить клеточную модель, которая дает возможность исследовать процесс самовоспроизведения формальными методами логики и теории абстрактных автоматов. Многие исследователи, работая по клеточной модели ***фон Неймана***, значительно ее улучшили и упростили; обзор результатов по данной проблематике можно найти в [1,3-5,8,128]. ***М. Арбиб*** [235] также обратил внимание на феномен самовоспроизведения, а его работа в этом направлении была выполнена в лучших традициях клеточной модели ***Дж. фон Неймана***. Однако она использует более сложные исходные компоненты, что позволяет существенно упростить ее программирование и снизить число необходимых для процесса самовоспроизведения шагов. Следует отметить, что повышенная сложность исходных компонент модели ***Арбиба*** не противоречит факту высокой сложности реальных клеток, участвующих в процессе развития реальных биологических систем. Был также изучен целый ряд моделей самовоспроизведения, объединяющих механический и клеточный подходы [1,3-5,88].

Так, например, ***Р. Лэинг*** [339] предложил смешанный автомат, способный к моделированию структуры любой машины, включая самого себя. Данное свойство совместно с универсальной вычислимостью позволяет наряду с феноменом самовоспроизведения реализовать в таких моделях и самовосстановление. Предложенная модель имеет довольно тесные аналогии с процессами, имеющими место в живых системах на макромолекулярном уровне. В этой связи ***Р. Лэинг*** [340] представил еще один интересный класс кинематических *молекулярных* машин, которые *(даже если их структура значительно упрощается)* сохраняют способность к универсальным вычислениям, воспроизводить свои описания и на их основе строить свои копии. ***Лэинг*** показал, как структурно упрощенная молекулярная машина может быть погружена в классические ***ОС-***модели и описал процесс самовоспроизведения такой машины, функционирующей в ***ОС-***среде. Такой подход прокладывает своего рода мосты между кинематическими моделями и моделями, реализованными на основе ***ОС-***концепции. В работе [341] ***Р. Лэинг*** дает очень интересное обсуждение клеточной модели ***фон Неймана*** с биологической точки зрения. Аналогичные вопросы биологической интерпретации клеточных и автоматных моделей в биологии развития можно найти и в работах [5,88,90,332,536].

В целях защиты от тривиальных случаев самовоспроизведения ***фон Нейман*** потребовал *универсальной* вычислимости для самовоспроизводящихся в ***ОС-***моделях конфигураций. Однако ***Г. Херман*** [353] показал, что это требование не предохраняет от случаев тривиального самовоспроизведения. Это обстоятельство говорит о необходимости более внимательного подхода к выбору требований к конфигурациям ***ОС-***моделей, интерпретируе-

мым как некоторые биологические объекты и феномены, а к самим ***ОС*** – как формальной среде моделирования биологических процессов и явлений. В этой связи весьма актуальным представляется и вопрос: ***Существует ли другая удовлетворительная мера сложности самовоспроизводящихся конфигураций в ОС-моделях, не базирующаяся на понятии универсальной вычислимости?*** Некоторые интересные графо-топологические подходы в данном направлении представлены в работах [1,3-5,8-10,88,90,536], а также в связи с проблемой сложности конечных конфигураций в ***ОС***-моделях (глава ***4***).

Несмотря на определенные успехи в деле прояснения понятия *сложности* конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях, следует хорошо представлять себе и настоящие проблемы. Реальный организм развивается на основе заложенной в единственной зародышевой клетке информации. Таким образом,для действительно *самоусложняющихся* систем количество информации в начале развития должно быть меньше количества информации, содержащейся в сформировавшейся системе, а для этого необходимо уметь оценивать оба количества информации и в оптимуме уметь прослеживать нарастание сложности в ходе процесса развития. Все это пока открытые и весьма сложные проблемы, решения которых, по-видимому, в ближайшее время не предвидится.

В отличие от ***фон Неймана Э. Мур*** [274] в своем исследовании ***ОС***-моделей самовоспроизведения не связывает себя с универсальной вычислимостью. Определения ***Э. Мура*** охватывают только самую общую суть процесса воспроизведения и позволяют на ней сконцентрировать наше внимание (*раздел* ***3.2***). В данном направлении был получен целый ряд оригинальных моделей, но все они представляют интерес лишь с самой общей точки зрения на процесс самовоспроизведения и не могут получить достаточно удовлетворительной биологической интерпретации. Действительно, исследование данного типа ***ОС***-моделей показывает, с одной стороны, что в них действительно имеет место своего рода аналог закона Мальтуса – количество потомков самовоспроизводящейся конечной ***КФ*** (*абстрактного организма*) не может расти быстрее имеющегося для них «*жизненного*» пространства. С другой стороны, в таких ***ОС***-моделях имеют место и феномены, непосредственно присущие моделируемому процессу воспроизведения, но не имеющие биологических аналогов. Так, например, нами был обнаружен следующий интересный феномен, присущий ***ОС***-моделям самовоспроизведения в смысле Мура [1,3-5,88].

Пусть ***c1*** и ***c2*** (***c1***≠c2) есть достаточно сложные конечные ***КФ*** одного и того же размера в классических ***2-ОС***. Тогда самовоспроизводящиеся в смысле Мура конфигурации ***c1*** и ***c2*** способны воспроизвести соответственно $M_1(t)$ и $M_2(t)$ своих копий за время t; при этом, те же конфигурации ***c2*** и ***c1*** способны за это же время t воспроизвести $N_1(t)$ и $N_2(t)$ соответственно копий конфигураций ***c1*** и ***c2*** при наличии следующего соотношения:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_1(t)}{M_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_1(t)}{N_2(t)}=1$$

Подобные моменты следует иметь в виду при биологических интерпретациях ***ОС***-моделей на предмет их адекватности моделируемым явлениям и процессам. Вопросы исследования класса линейных классических ***ОС***-моделей, обладающих свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура, обсуждались в разделе ***3.2***. Интерпретируя же действия ***ГФП*** на некоторую конечную ***КФ*** в ***ОС***-модели как воздействие процессов развития на представляемый ею абстрактный организм, можно говорить об определенной *устойчивости* феномена воспроизведения относительно влияния внешних воздействий на процесс развития. Данная аналогия, естественно, носит весьма общий характер. В связи с этим следует упомянуть парадокс ***Э. Вигнера*** [343], утверждающий о том, что вероятность существования самовоспроизводящихся систем по существу равна нулю. С другой стороны, ***Д. Ричардсон*** [344] ввел понятия *непрерывных* и *стохастических* ***ОС***-моделей и определил в них процесс самовоспроизведения. Ему удалось на этой основе показать,

что самовоспроизведение обладает определенной степенью *устойчивости*, что говорит о необходимости весьма осторожного обращения с парадоксами типа, предложенного ***Вигнером***. О наличии устойчивых режимов функционирования стохастических ***ОС***-моделей говорят и наши исследования по асимптотическим свойствам такого типа структур [21], а также последние компьютерные эксперименты на ***ПК*** [5,88,90,536].

В частности, наши экспериментальные исследования на ***IBM***-совместимых ***ПК*** с вполне достаточной степенью достоверности показывают [54-56,90], что ***ГФП***, представляемые композицией конечного числа функций из некоторого достаточно широкого ***B***-множества, перемежающихся функциями из ***M(A,d,G)***-множества, определенного нами в разделе ***7.1*** монографии, в значительной степени сохраняют свойство воспроизводимости конечных ***КФ*** в смысле Мура. Таким образом, даже в таких «*игровых*» моделях развития, каковыми являются ***ОС***-модели, феномен самовоспроизведения обладает значительной степенью устойчивости к внешним воздействиям при весьма широких допущениях.

Из анализа формальных моделей воспроизведения следует, что само по себе такое моделирование не представляет, на наш взгляд, особых трудностей и не вносит в наши знания о природе этого феномена ничего принципиально нового, однако на этом пути был достигнут ряд положительных результатов, из которых отметим следующие, а именно:

♦ ***выяснилось, что требования, предъявляемые к самовоспроизводящимся искусственным системам, имеют прозрачную биологическую интерпретацию;***

♦ ***доказано, что существуют нетривиальные самовоспроизводящиеся искусственные системы, а также уточнен и формализован ряд понятий в данном направлении;***

♦ ***сам процесс моделирования процесса самовоспроизведения вызвал к жизни и однородные структуры, явившиеся новой перспективной средой моделирования в физических, биологических и вычислительных науках, а также во многих других областях;***

♦ ***именно успехи в моделировании феномена нетривиального самовоспроизведения привлекли внимание многих исследователей из точных наук к проблемам кибернетического моделирования в биологических науках;***

♦ ***наконец, работы по клеточным моделям самовоспроизведения проложили своего рода мосты между математической биологией и вычислительными науками, что позволяет взаимно обогащаться идеями и полученными результатами оба эти приоритетные на сегодня естественно научные направления.***

В заключение настоящего пункта следует отметить, что все существующие на сегодня модели самовоспроизведения имеют довольно малое отношение к реальной проблеме биологического развития, так как «***родитель***» строит своего «***потомка***», а не «***потомок***» развивается сам на основе информации, полученной от «***родителя***» через зародышевую клетку. А именно, клеточные модели самовоспроизведения демонстрируют процесс воспроизведения многоклеточным организмом своей копии, но не показывают как многоклеточный организм может расти и развиваться из единственной зародышевой клетки (*зиготы*). В этой связи можно сформулировать следующую весьма интересную и достаточно сложную проблему: ***описать в рамках ОС-аксиоматики модель развития из единственной клетки достаточно сложной пространственно дифференцированной конфигурации, способной в определенной степени к регуляции и регенерации и обладающей способностью к самовоспроизведению***. На наш взгляд, это представляется достаточно и сложной, и трудоемкой задачей, если исходить из аксиоматики классических ***ОС***-моделей. Вместе с тем, задача может в значительной мере упроститься, если исходить из иных типов ***ОС***-моделей (*например*, ***ОС*-моделей*** *и др.*). Вышерассмотренные же модели самовоспроизведения скорее напоминают некое копирование генетической информации в ядре клетки, чем реальное самовоспроизведение биологических организмов [88,536]. В данном направлении еще предстоят весьма серьезные исследования.

8.2.3. Формальное моделирование процессов роста в среде однородных структур

Феномен роста в той или иной мере присущ любой развивающейся системе. С биологической точки зрения это, быть может, одна из наиболее простых составляющих общего процесса развития, но и здесь имеется целый ряд открытых вопросов. Рост является одним из неотъемлемых свойств живого, поскольку для выживания любого вида составляющие его особи должны достигнуть определенной массы, без чего невозможно выполнение ими всех необходимых жизненных функций. Любой отдельный живой индивид имеет конечные размеры, процесс достижения которых называется ***ростом***. Общепринятым является мнение, что размеры организмов закреплены *генетически*. В настоящее время отсутствует единое мнение о влиянии на процесс роста различных факторов: метаболических, термодинамических, экологических и т.д., а также степень абстрагирования от частных явлений. Не вникая в глубинную суть процесса ***роста***, как одной из базовых составляющих общего процесса развития, на формальном уровне мы рассмотрим ***три*** основные проблемы, характеризующие ***рост*** как самостоятельное биологическое явление, представляющее несомненный интерес со многих точек зрения.

Одна из основных проблем развития – как воспроизвести данный организм, используя возможно наименьшее число инструкций. Это важно с точки зрения понимания развития в живых системах, так как зигота должна быть в некотором смысле проще, чем организм, которому она дает жизнь. Другая проблема касается ограничений размера выращиваемого в различных условиях организма, если это должно полностью обеспечиваться генотипом самовоспроизводящихся в процессе роста клеток. И третий круг вопросов относится к исследованию такого роста, когда может происходить *пространственная дифференцировка* в процессе непрерывного самовоспроизведения исходного набора инструкций без влияния внешнего воздействия. Для ответа на данные и другие вопросы были предложены различные формальные модели роста, часть из которых обсуждается ниже с акцентом на *дискретный* подход. Разнообразие моделей роста объясняется распространенностью механизмов ограничения роста развивающегося организма, которые столь же распространены, как и сам процесс самовоспроизведения. При этом, исследование механизмов регуляции роста актуально и для понимания феномена морфогенеза, т.к. рост можно рассматривать в качестве одномерного аналога морфогенеза [3-5]. С весьма широко представленной проблематикой ***непрерывных*** моделей роста можно ознакомиться в коллективной монографии [3] и цитированной в ней обширной библиографии.

Простейшие модели роста исследовались посредством компьютерного моделирования ***С. Уламом*** и его сотрудниками [225], которые явились одними из первых инициаторов изучения феномена роста посредством дискретного аппарата, хотя намного ранее данной проблемой занимался целый ряд исследователей (***А. Томпсон, Л. Берталанфи*** *и др.*) на основе *непрерывного* аппарата моделирования. Исследованные группой ***С. Улама*** дискретные модели роста более пригодны для описания *неживых* систем (*подобных кристаллическим структурам, простым органическим молекулам и простым растениям*), чем реальных сложных биологических систем. Несмотря на это работа с такими моделями позволила прояснить ряд вопросов роста фигур при различного рода ограничениях геометрического, логического и других характеров. Была предпринята попытка связать феномен роста с *самоусложнением* системы, а посредством эмпирического компьютерного моделирования была исследована связь между сложностями начальной фигуры, рекурсивных правил роста и выращиваемых на их основе конечных фигур [536].

Работая по дискретным моделям роста ***С. Улама***, мы использовали аппарат *классических* ***ОС***-моделей, что позволило получить целый ряд новых интересных свойств дискретно-

го процесса роста по рекуррентным правилам и дало возможность исследовать данный феномен формальными средствами [1,3-5,54-56]. Дальнейшее развитие ***ОС-***концепции как основы дискретного моделирования феномена роста было получено ***Д. Баттлером*** и ***С. Нтафос*** [309] посредством определения так называемого *векторного* строчного описателя, позволившего получить целый ряд весьма интересных свойств ***ОС-***моделей роста. Дополнительную информацию по данному вопросу можно найти в [5,55,88,90,536].

С точки зрения исследования феномена роста несомненный интерес представляет проблема распространения возбуждений в ***ОС-***моделях с рефрактерностью **(**раздел ***1.2).*** На основе такого класса структур был предложен целый ряд интересных моделей возбудимых сред, часть из которых может использоваться для изучения процессов самоорганизации в различного типа системах клеточной природы [1,3-5,8,9,90,167,198,203]**.** Исследование такого типа ***ОС-***моделей позволило получить ряд довольно интересных результатов по распространению возбудимости, имеющих и другие интересные медико-биологические интерпретации**.** В частности**,** получен ряд весьма интересных результатов и им даны оригинальные интерпретации с точки зрения естественных нейроноподобных сетей и других классов сетей порогового типа [1,5,55]. Для моделирования феномена дискретного процесса роста ***М. Аптер*** использовал классические машины Тьюринга и пропозициональное исчисление [330,345].

Ряд достаточно интересных вопросов**,** связанных с выращиванием в ***ОС-***среде пространственных форм различной геометрии, рассматривается в [158], где, в частности, доказана возможность реализации в классических ***2-ОС*** таких параллельных алгоритмов**,** которые позволяют осуществлять выращивание конфигураций, в процессе которого приобретаются контуры, неограниченно приближающиеся к контурам наперед заданной геометрической фигуры из достаточно широкого класса допустимых фигур. Как уже отмечалось, классические ***ОС*** достаточно хорошо моделируют процессы роста на основе относительно простых порождающих правил и ограничений. Однако, эти правила недостаточно сложны, чтобы моделировать естественный рост и другие феномены развития живых биологических систем.

Тогда как результаты уже по *полигенным* ***ОС*** показывают, что они могут быть использованы для моделирования достаточно сложных растущих систем, которые симулируют некоторые естественные феномены роста. Так, в работе [329] *полигенные* ***2-ОС*** используются для моделирования процесса роста соцветий. Основной результат здесь сводится к доказательству возможности моделирования процесса роста соцветий любого вида с помощью полигенной ***2-ОС*** с ***ШС*** размера не более ***9, А-***алфавитом мощности не более ***12*** и ***G-***множеством допустимых ***ГФП*** мощности ***7.*** На основе результатов данного моделирования представлен интересный сравнительный анализ классификаций классической ботанической и на основе ***ОС-***моделей роста соцветий, а также продемонстрирована конкурентоспособность ***ОС-***моделей относительно ***L-***систем на ряде задач моделирования роста и морфогенеза растений. Однако, такого типа ***ОС*** недостаточно просты, чтобы снабдить исследователя удобным и наглядным аппаратом моделирования феноменов**,** которые и сами по себе достаточно сложны**.** Хотя**,** быть может**,** использование полигенных ***ОС-***моделей совместно с компьютерным симулированием сможет существенно изменить данную ситуацию к лучшему.

Для моделирования феноменов биологического развития нами были предложены ***ОС*** с памятью ***(ОСП)*** [1]**,** которые очень просто реализуют сети растущих автоматов ***М. Аптера*** [345] и позволяют моделировать процессы роста достаточно сложных пространственно дифференцированных фигур. При этом, растущая в ***ОСП*** фигура может быть представлена как конечная сеть функционирующих автоматов**,** в которой можно определять направленный поток информации ***(****сигналы инициации процесса роста****)*****.*** Именно в целях определения сложности такого рода растущих фигур было введено понятие сложности,

базирующееся на графо-топологическом подходе и о котором шла речь в предыдущем пункте настоящего раздела.

Очень интересные проблемы оптимизации возникают в связи с вопросами ***ограничения*** процессов роста. Действительно, реальные биологические организмы не растут неограниченно, а контролируют свой рост на протяжении всего процесса развития и жизнедеятельности**.** И в этой связи ***Д. Гайский*** и ***Х. Ямада*** [191] исследовали правила роста в ***ОС***-моделях, позволяющие выращивать фигуры заданного ограниченного размера. Основной своей целью они ставили установление максимально возможного размера *пассивных* ***КФ (ПКФ)***, генерируемых классическими ***d-ОС*** из некоторой простой начальной ***КФ***, но без акцента на связь ее размера с размером шаблона соседства структуры. Данная задача в определенном смысле явилась распространением известной задачи ***Т. Радо*** [192] на случай классических ***d-ОС***. Заинтересованный же читатель может обратиться к работе [191], содержащей не только результаты по нижним оценкам размеров таких максимальных ***ПКФ*** в терминах различных основных параметров ***d-ОС***, но и интересные обсуждения биологических интерпретаций результатов, полученных и в данном направлении**.** Интересные вопросы выращивания цепочек автоматов заданной длины можно найти и в работе [195]. Отмеченные работы в данном направлении тесно примыкают и к нашим результатам по *проблеме ограниченного роста* ***(ПОР)***, рассмотренной в разделе ***1.2***. Данная проблема относится к классу минимаксных задач в ***ТОС***-проблематике и представляет определенный интерес с точки зрения *развивающихся* клеточных систем различной природы. Действительно, процесс роста реальных биологических систем ограничен, строго контролируем изнутри, зависит от генетических и ряда внешних факторов. Более того, ***ПОР*** имеет большое познавательное значение, ибо позволяет нам в определенной мере оценивать количество информации, требуемое для выращивания сложных многоклеточных организмов. Подробнее с данной проблемой и с интерпретацией полученных по ней результатов можно ознакомиться в разделе ***1.2*** и в работах [3-5]**.** В плане более прикладных аспектов ***ПОР*** следует отметить ее полезность для исследования и вопросов информационной связи межклеточных взаимодействий *развивающихся* систем, а также для формирования ряда соображений о характере генетического кода [5,88,90,536].

Учитывая сложность моделирования в ***ОС***-среде ряда биологических феноменов и процессов, ***А. Линденмайер*** в ***1968*** г. ввел свои уже упоминавшиеся выше ***L***-системы. В рамках ***L***-систем для моделирования морфогенеза и растущих структур ***Линденмайер*** предложил ***ветвящиеся алгоритмы***, на основе которых был смоделирован целый ряд весьма интересных процессов роста, в первую очередь, из растительного мира [163,251,264, 336-338]. ***Х. Люк*** [346] для объяснения роста тканей также использовал модель на основе ***L***-систем и получил на ней ряд интересных результатов**.** В последнее время на основе ***L***-систем появляется достаточно большое количество моделей как собственно роста, так и роста в составе общего феномена биологического развития [536]. Ниже мы коснемся вопроса сравнительного анализа ***ОС*** и ***L***-систем на предмет использования их в качестве дискретного аппарата моделирования в биологии развития.

Кроме рассмотренных выше дискретных ***ОС***-моделей, исследующих проблему ограниченного роста и объясняющих механизмы управления процессом ограничения на основе ***ОС***-концепции, существует целый ряд других моделей, объясняющих данный феномен с иных позиций**:** энергетической целесообразности, принципа подобия, адаптации к внешней среде, механической устойчивости, термодинамических законов и др. Подобная многоплановость интерпретаций несомненно необходима и позволяет проводить многоаспектное исследование проблемы роста и развития в целом. Наряду с этим, ее в определенном смысле можно рассматривать в качестве биологического аналога принципа дополнительности ***Бора*** [3,5,88,90,536].

Здесь следует упомять и еще об одной проблеме, возникающей в ***ОС-***моделях, и на первый взгляд, не связанной с их биологическими прикладными аспектами. Это *общая проблема синхронизации* ***(ОПС)*** процессов в ***ОС-***моделях, частными проявлениями которой являются хорошо известные проблемы *синхронизации сети автоматов* [196], *ограниченного роста* [3-5,191] и *Французского флага* [3-5]. Действительно, ***ОС-***модели являются системами параллельной обработки информации, поэтому для них проблемы синхронизации встают значительно более остро, чем в последовательных системах, т.к. налицо дополнительный уровень сопряжения различных принципов: параллельного и последовательного (*например, параллельная обработка определяет последовательную историю развития модели, а в ряде случаев необходимо сугубо последовательный процесс погрузить в параллельную модель на осного того или иного класса* ***ОС-****среды*).

Следует отметить, что подходы к решениям ***ОПС*** могут быть весьма полезными при решении синхронизационных проблем во многих моделях, реализуемых в ***ОС-***средах. Эти проблемы, естественно, связаны с самой сущностью конкретных моделей, но во всех отношениях предпочтение отдается, как правило, минимальным по времени решениям. Например, параметр «***время***» играет весьма существенную роль в синхронизационных проблемах, возникающих в реализациях параллельных вычислений и алгоритмов в ***ОС-***моделях, а также в ряде хорошо известных моделей биологии развития. Между тем, в целом ряде биологических процессов параметр времени не играет столь уж существенного значения (*точнее говоря, согласно нашим современным представлениям*), т.к. здесь на первый план выступает не до конца понятое так называемое *биологическое* время. Поэтому с точки зрения биологического моделирования на основе ***ОС-***концепции в первую очередь представляют интерес именно классы качественных аспектов проблем синхронизации процессов, управляющих теми или иными феноменами в биологии развития и в других биологически мотивированных рассмотрениях. В настоящее время на принципиальной основе ***ОС-***подхода создан целый ряд моделей, симулирующих важные поведенческие аспекты биологических систем различного уровня организации – от клеточно-тканевого до ценотического [5,88,90,536].

8.2.4. Формальные ОС-модели дифференциации, регуляции и регенерации в биологии развития

В предыдущих пунктах раздела с кибернетической точки зрения было показано, что некоторые черты развития, такие как самовоспроизведение и рост, могут быть присущи и искусственным системам. Теперь попытаемся кратко рассмотреть вопросы дискретного моделирования более сложных феноменов развития – ***дифференциации, регуляции*** и ***регенерации. Дифференциация клеток*** представляет собой одну из важнейших проблем в современной биологии развития. Несмотря на огромное число работ, посвященных тем либо иным особенностям клеточной дифференциации, на сегодня мы не имеем общей ***теории дифференциации*** – большинство теоретических рассмотрений и гипотез относятся к молекулярным механизмам клеточной дифференциации. В частности, отсутствует ***количественная*** теория дифференциации и даже не ясны подходы к построению такой теории. В значительной степени это объясняется неясностью самого понятия *дифференциации* и отсутствием точных критериев для получения ее численных оценок [3-5,88].

Существенной чертой биологического развития является *формообразование* (*морфогенез*) и *пространственная* дифференцировка. При этом, в настоящее время, на наш взгляд, отсутствуют достаточно убедительные экспериментальные данные, чтобы создавать динамические модели, непосредственно сопоставимые с реальными биологическими фено-

менами или процессами развития. И поэтому моделирование направлено на то, чтобы проиллюстрировать возможность реализации различных феноменов развития на уровне достаточно общих предположений. Создаваемые в данном направлении ***ОС-***модели доказывают возможность**:** управления процессами роста, регуляции и регенерации**;** образования иерархических структур и др**.** Следует отметить**,** что подобные модели в настоящее время интенсивно исследуются не только с биологической точки зрения, но и в рамках новой общенаучной дисциплины о *самоорганизации* ***– дискретной синергетики*** [4,5,90,155,536]. Наряду с этим, используемые в этих моделях управляющие алгоритмы могут оказаться весьма полезными для параллельных вычислительных систем [11,12,54].

Анализируя процесс развития на общем уровне, мы неизбежно должны придти к выводу о том, что дифференцировка клеток и регенерация у высокоорганизованных живых существ являются результатом деятельности чрезвычайно сложных регуляторных механизмов. Поэтому, с учетом сказанного, нам в первую очередь необходимы рабочие, но достаточно эффективные модели, цель которых должна состоять в том, чтобы помочь в формализации проблемы и, возможно, найти ключ к получению решения на языке кибернетики и других точных наук**.** Построение подобных формальных моделей базируется на ряде абстрагирований и общих биологических предположений и постулатов. В частности, имеются интересные работы по использованию ***ОС-***концепции для моделирования нормального и патологического роста биологической ткани и другие [536].

В процессе своего размножения клетки развивающегося организма не остаются функционально идентичными**,** будучи, при этом, ***генотипично тождественными.*** В развивающемся организме реализуется ***пространственная*** и ***фенотипическая*** *дифференциация***.** Наиболее ранними кибернетическими моделями, включающими феномены обоих типов дифференцировки, можно считать клеточные модели самовоспроизведения и роста на основе ***ОС-***концепции, которые вкратце обсуждались в предыдущих пунктах раздела**.** Так**,** проводя аналогию между единичным автоматом ***ОС-***модели и биологической клеткой, мы видим их тождественность в наборе выполняемых инструкций, тогда как в процессе выращивания и функционирования «*организма*» в ***ОС-***модели он претерпевает пространственную дифференциацию**,** а клетки различных его частей становятся функционально различными в процессе существования самого «*организма*»**,** при этом оставаясь *генотипично тождественными***.** Эти моменты особенно наглядно прослеживаются на примере клеточной модели самовоспроизведения ***Дж. фон Неймана*** [124,125,536].

Более того, до сих пор клеточные модели самовоспроизведения не обладают в значительной степени свойством *регуляции* и *регенерации***,** что позволяет говорить о достаточно чистом феномене ***дифференциации*** в них. Здесь можно отметить довольно интересный факт**:** при *нетривиальном* моделировании феномена роста и самовоспроизведения в клеточных структурах **(***где под «клеточными» понимаются структуры***,** *состоящие из некоторых формальных аналогов реальной биологической клетки)* в качестве сопутствующего феномена получаем ***дифференциацию*** одного или обоих типов**.** Это позволяет в определенной мере говорить о достаточно тесной связи основных компонентов развития ***– самовоспроизведения, роста, регуляции, дифференциации*** и ***регенерации,*** что определяет требование *комплексного* моделирования фундаментального явления развития в целом**.** В настоящее же время мы занимаемся моделированием пока только отдельных феноменов развития по причине чрезвычайной сложности данного явления в целом и не до конца понятости целого ряда его аспектов. Однако именно сейчас в момент предварительного и общего изучения проблемы биологического развития желательно**,** на наш взгляд**,** иметь как можно больше разноплановых идей и моделей, а не одну модель развития, сколь бы хорошей она нам не представлялась. И поэтому, вышеуказанный подход к моделированию феноменов развития в настоящее время вполне обоснован и уместен [54-56,88,90,536].

Одними из первых кибернетических моделей развития были технические подобно случаю с механическими моделями самовоспроизведения [1,3-5]. Однако подобные модели не могли служить достаточно эффективным аппаратом исследования таких сложных и важных феноменов развития, поэтому внимание исследователей и привлекли формальные модели развития на основе динамических систем непрерывного и дискретного характеров. К наиболее известным моделям первого типа относятся динамические модели, описываемые соответствующими системами дифференциальных уравнений, тогда как ко второму – дискретные динамические модели, базирующиеся на ***L***-системах и однородных структурах [5]. Именно второму классу моделей и уделяется ниже внимание.

Переходим теперь непосредственно к формализации проблемы развития и регуляции биологической структуры. Пытаясь ввести процесс *биологического* развития в рамки некоторой ***общей*** теории, необходимо различать в нем процессы, протекающие во времени, и процессы, проходящие в пространстве. Такое разделение процессов соответствует *современному* подходу к проблеме биологического развития. Большинство современных исследований в области эмбриологии затрагивает, главным образом, процессы развития во времени, проявляющиеся в дифференциации клеток. *Пространственным* же аспектам процессов развития, включающим образование пространственной структуры (*регионализацию*) или возникновение формы (*морфогенез*), уделялось до настоящего времени недостаточно внимания. При этом, следует еще раз подчеркнуть, что все вышесказанное и далее в настоящем разделе относится, в первую очередь, к вопросам именно дискретноного моделирования процессов биологического развития в целом [4,5,88,90,536].

Центральная проблема развития – это проблема о том, как из яйца, кажущегося недифференцированным и простым в структурном отношении, развивается сложный многоклеточный организм. В этой связи было высказано предположение, что яйцо содержит только программу развития, а не полную спецификацию всего организма, который должен из него развиваться. В формулировке ***К. Уоддингтона*** [331] проблема образования пространственной структуры и заключается в определении непосредственных причин разделения однородной клеточной области на отдельные элементы, расположенные в пространстве в определенном порядке. Наряду с этим, мы неизбежно должны придти к выводу о том, что *дифференцировка* клеток у высокоорганизованных живых существ является результатом деятельности чрезвычайно сложных регуляторных механизмов. Очевидно, в первую очередь действительно необходимы рабочие, но достаточно эффективные модели, цель которых должна состоять в том, чтобы помочь в формализации проблемы и, возможно, найти ключ к пониманию подходов к решению проблемы на языке точных наук. Эту цель и преследуют дискретные модели, обсуждаемые ниже.

Способность к восстановлению *осевой* структуры можно проследить во многих биологических системах; некоторыми наиболее характерными чертами ее являются следующие:

- ***постоянство в определенных пределах соотношений между отдельными частями в биологических структурах разных размеров;***
- ***способность части системы воспроизводить всю систему или в известных пределах способность любой части системы превращаться в любую другую ее часть;***
- ***сохранение полярности системы, т.е. образование отдельных частей системы в правильном положении относительно друг друга и к исходной системе в целом.***

Экспериментальный подход к этой проблеме позволил сформулировать целый ряд интересных и упрощающих проблему концепций, среди которых следует особо выделить принципы *градиентности* и *доминантности* [3-5,331]. Однако вопросу создания работающих моделей уделялось недостаточно внимания. И первая серьезная попытка создания модели, способной к развитию и регуляции *осевой структуры*, была предпринята ***С. Роузом*** [347], который высказал предположение о том, что происхождение пространствен-

ной структуры может быть результатом действия сложной иерархии самоограничивающихся реакций и распространением ограничивающей либо тормозящей информации от одного дифференцирующегося участка структуры к другому, а также и градиентом скоростей дифференцировки. Тогда как ***Л. Вольпертом*** [331,348] в качестве моделей были предложены модель *установившихся градиентов* и модель *уравновешивания*. При этом, вторую модель ***Л. Вольперта*** можно в определенном смысле противопоставить первой, поскольку в ней отсутствует градиент. В дальнейшем был предложен целый ряд достаточно интересных моделей, обзор которых можно найти в монографиях [3-5] и работах [31,33,54-56,88,90,536].

Однако наиболее известной формальной моделью дифференцировки, регуляции и регенерации является так называемая *проблема Французского флага* ***(ПФФ)***, предложенная ***Л. Вольпертом*** [3-5,331]. В простейшей форме ***ПФФ*** формулируется следующим образом: ***имеется одномерная связная система из 3m клеток, каждая из которых допускает состояния «красный», «белый» и «синий»; требуется определить правила функционирования такой клеточной системы, финальным состоянием которой является конфигурация Французского флага (КФФ), в определенных пределах устойчивая к внешним воздействиям и повреждениям.*** Для решения ***ПФФ*** в ее классической постановке нами был предложен ряд математических и автоматных моделей и проведен их анализ с биологической точки зрения [1,3-5,23,26,27,31,33,46]. В частности, проведены обсуждения постановки ***ПФФ*** как формальной модели ***дифференциации, регуляции*** и ***регенерации осевой*** биологической структуры [3-5,88,90].

Для решения и исследования ***ПФФ*** нами использовались ***ОС-***модели нескольких типов; при этом, перед моделированием ставился целый ряд задач. Прежде всего нас интересовал вопрос о *минимальной сложности* модели, способной к дифференциации, регуляции и регенерации. Так как для исследования ***ПФФ*** мы используем модели на основе концепции ***ОС***, то вполне естественным является определение наиболее простой ***ОС-***модели, решающей данную проблему. В работах [26,27] доказано, что при моделировании ***ПФФ*** даже на основе *полигенных* ***1-ОС*** алгоритм, решающий проблему, должен быть алгоритмом *над алфавитом*, элементами которого являются символы, образующие *конфигурацию Французского флага* ***(КФФ)***. Следовательно, для решения ***ПФФ*** уже на основе *полигенных* ***ОС-***моделей требуется использовать расширенный ***A-***алфавит внутренних состояний единичных автоматов структуры и, возможно, некоторые другие предположения. При этом, дополнительные внутренние состояния единичного автомата должны допускать интерпретацию в соответствующих биологических категориях, что требует дополнительного анализа на соответствие моделируемого явления модельным результатам [88].

Поэтому вторым вопросом является определение тех достаточных условий, которые бы способствовали решению ***ПФФ***, и их удовлетворительной биологической интерпретации. С этой целью был исследован целый ряд моделей на основе ***ОС-***концепции. Так, в работе [26] для моделирования ***ПФФ*** использовались ***1-ОС***, в качестве единичных автоматов которых были определены ограниченные трехленточные машины Тьюринга. Определенным таким образом структуре и функционированию автомата-клетки и могут быть даны интересные биологические интерпретации, включая вопросы исследования клеточной организации в рамках общей теории систем.

Клеточные автоматные системы с двухсторонними входами, способные моделировать ***ПФФ***, исследовались ***М. Арбибом*** [331] и нами [1,3-5,23,26,27,31,33,46]. Так, в работе [26] мы определили одну числовую ***ОС-***модель, решающую ***ПФФ***, которая реализована на специальных ***E-***элементах, имеющих ***пороги, задержку*** и ***память***. Модель *поляризована*, характеризуется отсутствием градиента и легко обобщаема на двумерный случай. В такой модели ***КФФ*** устанавливается за время не большее, чем $t=3m+2$, где m – число дифференцирующихся ***E-***элементов в структуре. Изменение направления потока управля-

ющей информации в модели ведет к установлению конфигурации, мало отличающейся от ***КФФ***. Такая модель способна к *регенерации*, достаточно проста и может быть легко реализована средствами современной микроэлектроники. Мы показали, что данная модель может быть, в частности, использована для формального исследования процессов элиминации и восстановления меристемных клеток в облученных растениях. Данный результат говорит о возможности использования подобных модельных подходов в радиационной биологии и медицине. По вычислительным возможностям данная модель напоминает модель развития ***М. Аптера*** [330], в основу которой также были заложены определенные элементы процесса счета наряду с использованием и пропозиционального исчисления в описаниях клеточных инструкций.

В работе [23] нами представлены две наиболее интересные модели, решающие ***ПФФ***. Первая модель способна к весьма совершенной регуляции и слегка подобна известной модели ***М. Арбиба*** [331], однако она более проста и избавлена от некоторых недостатков модели ***М. Арбиба***. Основными свойствами модели являются: отсутствие *градиента* и *порогов*, а также наличие *полярности*, *спонтанной самоограничивающейся реакции* [331] и *двухстороннего потока* управляющей информации [345]. Вторая модель в качестве единичного ***E****-автомата* в ***ОС***-модели использует специальный ***P***-автомат с памятью. Данная ***ОС***-модель способна к весьма совершенной регуляции и характеризуется тремя основными свойствами: наличие ***памяти***, ***полярности*** и ***спонтанной самоограничивающейся реакции***. Характерной чертой модели является отсутствие двухстороннего потока управляющей информации. К *первой* из отмеченных моделей (*в плане основных присущих ей черт*), определяющих решение ***ПФФ***, примыкает и модель на основе класса структур ***1-ОС****, позволяющих решать ***ПФФ*** в обобщенной постановке.

Определяется конечная ***КФ*** c_o ***r***-длины состояний единичных автоматов в ***1-ОС**** следующего вида, а именно:

$$c_o = \square\, x_1x_2x_3x_4 \ldots x_r \,\square, \qquad x_j \in A=\{0,1,2,3, \ldots, a\text{-}1\} \quad (j = 1 \,..\, r)$$

Тогда *обобщенная* ***ПФФ*** сводится к определению функционального алгоритма ***FA*** структуры (*сложность которого не зависит от числа* ***r*** *единичных автоматов дифференцирующейся цепочки*), позволяющего устанавливать и поддерживать в ***1-ОС**** ***обобщенную КФФ*** следующего структурного вида, а именно:

$$C_f = \nabla \underbrace{b_{11}\cdots b_{1q}}_{q}\underbrace{b_{21}\cdots b_{2q}}_{q} \cdots \underbrace{b_{(a-3)1}\cdots b_{(a-3)q}}_{q}\underbrace{b_{(a-2)1}\cdots b_{(a-2)q}}_{q}\underbrace{b_{(a-1)1}\cdots b_{(a-1)k}}_{k}\nabla \quad (65)$$

$$b_{p_j} = p;\ p = 1 \div (a-2);\ j = 1 \div q;\ q = [r\,/\,(a-1)];\ b_{(a-1)_i} = (a-1);\ i = 1 \div k;\ k = r - (a-2)q$$

В связи с использованием для решения *обобщенной* ***ПФФ*** однородных структур нам прежде всего хотелось бы определить наиболее простой тип ***ОС***-моделей, позволяющих ее решать. В этом направлении имеет место следующий результат [1,3-5,26,88,90,536].

<u>Теорема 140</u>. Не существует полигенной 1-ОС с А-алфавитом общего вида, решающей обобщенную ПФФ, определенную в том же самом конечном А-алфавите.

Таким образом, решающий обобщенную ***ПФФ*** алгоритм на основе ***ОС***-моделей должен быть алгоритмом ***над А***-алфавитом, т.е. невозможно определить *локальный* алгоритм поведения единичного автомата в таких моделях, который использует для своего функционирования только информацию о состояниях своих соседей (*согласно индекса соседства* ***X***) и сложность которого не зависит от длины дифференцируемой цепочки единичных автоматов. Следовательно, для решения обобщенной ***ПФФ*** даже в классе *полигенных* ***ОС***-моделей требуется использовать ***расширенный*** относительно ***А***-множества алфавит внутренних состояний и, возможно, другие предположения.

Одна из моделей [1] на основе структур ***1-ОС**** использует простейший вариант символьной сортировки, позволяя решать ***ПФФ*** в классической постановке *Д. Вольперта* за время не хуже, чем ***t = 3m***, где ***m –*** длина дифференцируемой цепочки автоматов структуры. При этом, сортировка выступает как один из видов логического *градиента*, а сама модель позволяет сделать ряд интересных *выводов* биологического характера. Приведем теперь схему функционального алгоритма ***ОС*-***модели, решающей обобщенную ***ПФФ*** за минимально известное на сегодня время (рис. ***25).***

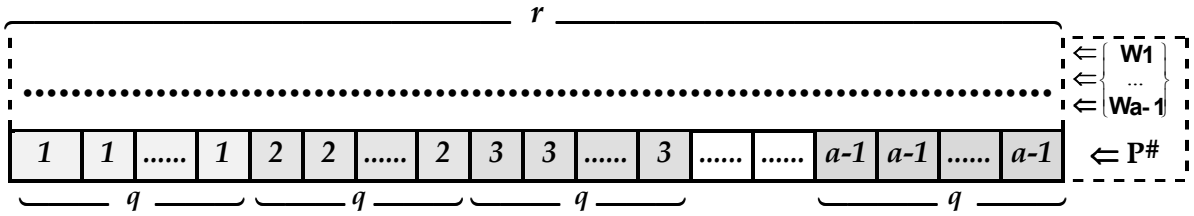


Рис. 25. Иллюстрация принципа организации ОС*-модели, решающей ПФФ.

Предположим, что дифференцируемая цепочка автоматов в структуре ***1-ОС**** имеет ***r***-длину и дифференцируемые состояния принадлежат алфавиту ***A\{0}***. Следовательно, цепочка автоматов должна дифференцироваться на ***(a-1)*** равных по длине частей, каждая из которых содержит автоматы в одном и том же состоянии ***j ∈ A\{0}*** ***(j=1 .. a-1)***, образуя обобщенную ***КФФ*** {*рис. **25** с учетом обозначений в **(65)***}. Пусть, не нарушая общности, на правом конце данной цепочки ***спонтанно*** возникает пакет импульсов $P^{\#}=\{W_j\}$, распространяющихся в цепочке справа налево с относительными скоростями $V_1/V_{a-p} = (2a-p-2)/p;\ j=1..a-1;\ p=1..a-2$. При этом, распространение импульсов в ***ОС****-модели с требуемыми скоростями легко обеспечивается специальным механизмом смены вспомогательных управляющих импульсов, а необходимость самих импульсов, инициирующих *процесс клеточной дифференцировки* отмечается многими ведущими исследователями [5]. Импульс W_j, распространяясь по цепочке автоматов, переводит каждый встреченный им автомат в ***j***-состояние ***(j=1 .. a-1)***. При этом, импульс W_1, имеющий и максимальную скорость V_1, первым достигает левого конца дифференцируемой цепочки автоматов и, отразившись от него, изменяется на импульс W^*_1, который с той же скоростью V_1 распространяется в обратном направлении слева направо, не изменяя состояний единичных автоматов в ***1-ОС**** и нейтрализуя по пути все встречные W_k-импульсы ***(k=2 .. a-1)***. Достигнув правого конца цепочки автоматов, импульс W^*_1 инициирует новый $P^{\#}$-пакет.

Нетрудно убедиться, что вышеописанный *функциональный* алгоритм позволяет формировать и поддерживать в ***ОС****-модели обобщенную ***КФФ***. При этом, время полного установления *обобщенной* ***КФФ*** не превышает величины ***t***=[***(2a-3)/(a-1)***]*r. Для такого простого функционального алгоритма полученный результат во временном отношении достаточно хорош. Однако усложнение приведенной схемы функционального алгоритма путем допустимости испускания подобных пакетов $P_л^{\#}$ и $P_п^{\#}$ импульсов с обоих концов дифференцируемой цепочки и использование принципов ***взаимодействия*** управляющих импульсов, предложенных при определении первой модели из работы [26], позволяют добиться решения обобщенной ***ПФФ*** в ***ОС****-модели за время не хуже, чем ***t***=[***r/2***]. Сказанное позволяет сформулировать следующий интересный результат [5,88,90].

<u>Теорема 141</u>. Для 1-ОС* с алфавитом A={0,1,2, ..., a-1} внутренних состояний существует функциональный алгоритм, сложность которого не зависит от r-длины дифференцируемой цепочки единичных автоматов и который решает при достаточно больших r-значениях обобщенную ПФФ за время не хуже, чем t=[r/2]. Множество всех минимальных по времени решений обобщенной проблемы Французского флага нерекурсивно.

Представленный в данной теореме результат является *наилучшим* на сегодня во *временном* отношении решением обобщенной ***ПФФ***. Из него, в частности, следует, что при больших значениях ***a*** и/или ***r*** время решения ***ПФФ*** асимптотически приближается к половине длины дифференцируемой цепочки единичных автоматов ***ОС****-модели. В этой связи возникает весьма интересный вопрос: ***существуют ли алгоритмы иного типа, решающие данную проблему за лучшее время?*** На наш взгляд, существенно улучшить время решения ***ПФФ***, определяемое теоремой ***141***, не представляется возможным. Действительно, из постановки обобщенной ***ПФФ*** следует, что решающий ее функциональный алгоритм в ***ОС****-модели может базироваться только на не более, чем двух пакетах управляющих импульсов, испускаемых периодически или самопроизвольно на противоположных концах дифференцируемой цепочки автоматов. Тогда как специфика и самой ***ПФФ*** не делает целесообразным использование принципа испускания управляющих импульсов и внутренними автоматами дифференцируемой цепочки в ***ОС****-модели.

Наряду с этим возникает интересный вопрос исследования *обобщенной* ***ПФФ*** для случая высших размерностей, когда вместо *линейных* цепочек рассматриваются ***d***-мерные ***(d>1)*** дифференцируемые сети конечных идентичных автоматов. В таком случае результаты решения *обобщенной* ***ПФФ*** существенно зависят (*как показывают и компьютерные эксперименты* [88]) и от самого вида ***d***-мерной ***КФФ***. Следует отметить, что на основе метода ***Ж. Мазойера*** [196] легко доказывается *нерекурсивность* множества всех *минимальных* по времени решений *обобщенной* ***ПФФ***. Очевидно, что данный результат доказывает и *нерекурсивность* множества всех решений обобщенной ***ПФФ*** безотносительно к их временным характеристикам.

Таким образом, упомянутые выше ***ОС***-модели, решающие ***ПФФ***, несколько проясняют такие вопросы, как входные/выходные управляющие импульсы, свойства единичных автоматов-клеток и природу связей между ними, а также ряд других предпосылок, приводящих к подразделению клеточной системы вдоль оси на сегменты, расположенные в определенном порядке. При этом, весьма интересным представляется определить минимальные требования к ***ОС***-модели, решающей ***ПФФ***. Для нашей ***ОС***-модели, предназначенной для исследования *минимальных* требований, используется такая вычислительная процедура, как простейший вариант сортировки для двухсимвольного алфавита. Результаты, полученные на такой ***ОС***-модели, позволяют сделать ряд выводов [1,3-5,46, 88,90,536], которые имеют достаточно интересные биологические интерпретации.

Первый вывод касается механизма *самосинхронизации* системы из ***m*** связанных *активных* единичных автоматов ***ОС***-модели. Единичные автоматы не способны к самопроизвольной активности, исключая моменты образования ***КФФ*** и нарушений (*повреждений*) в системе. Если автомат в системе не подвержен действию управляющих импульсов, то его функционирование подчиняется ***ЛФП***, как в случае классической ***ОС***-модели, в противном случае *состояния* единичных автоматов (*симулирующих реальные биологические клетки*) и их *выходы* в момент времени ***t>0*** определяются их *состояниями* и *выходными импульсами* прилегающих к ним соседей в момент ***(t-1)***. В целом, такая система связанных единичных автоматов является системой *без полярности*. Второй вывод касается свойств отдельного единичного автомата в системе. Такой автомат довольно прост и связан лишь со своими непосредственными соседями посредством ***2***-х информационных каналов, и каждый единичный автомат модели способен выбирать свое состояние согласно некоторому логическому градиенту (*сортировке*) в системе.

Таким образом, наша ***ОС***-модель обладает следующими тремя основными свойствами: ***(1)*** существование ***логического градиента***, ***(2) самопроизвольная самоограничивающаяся реакция*** и ***(3) отсутствие полярности*** в системе. Следовательно, свойства нашей модели можно выбирать как *достаточные условия* возможной дискретной клеточной модели, а результаты, полученные на такой модели, следует сопоставлять с результатами ис-

следования поведения и ***реальных*** биологических объектов. Наряду с рассмотренными имеются и другие интересные ***ОС-***модели основных процессов и феноменов биологии развития, с которыми можно ознакомиться в работах [1,3-5,26,27,54-56,88,264,329-351,536].

Как выясняется из обсуждения клеточных моделей в биологии развития, и ***ОС-***модели можно использовать для симуляции *динамики* многих биологических систем**,** в которых умеренные начальные условия и отношения *локального* соседства могут давать глобальные эффекты. Учитывая сложность отслеживания динамики ***ОС-***моделей развития для этих целей представляется весьма актуальным использование симуляционного компьютерного подхода, описание конкретных реализаций которого можно найти в [5,55,78,85, 88,150,165,166,167,174,250]**.** В основе реализации данного подхода лежит создание дружелюбных *симуляционных дисплейных систем* ***(СДС),*** позволяющих весьма наглядно отслеживать, порой, весьма сложную динамику симулируемой модели и влиять на ее развитие во времени. Таким образом**,** модели развития строятся на основе ***ОС-***концепции либо ***L-***систем как среды биологического моделирования, имеющей удовлетворительные биологические интерпретации, а их *динамика* исследуется с помощью соответствующих им ***СДС*** на ***ЭВМ.*** Учитывая все возрастающую тенденцию привлечения для целей биологического моделирования новых более сложных типов ***ОС*** и ***L-***систем, работы в направлении создания эффективных ***СДС*** представляются нам крайне желательными и первые положительные результаты в этом направлении уже отмечались. Данный подход к исследованию проблем биологии развития и биологии в целом получает серьезный импульс в связи с интенсивной компьютеризацией общества и доступностью все более совершенных ***ПК*** и их программного обеспечения, а также и развитой системы средств визуального отображения информации, в первую очередь, графической [6,8,13,15,118]. В настоящее время уже появился целый ряд достаточно интересных в этом отношении программных систем, о некоторых из них речь шла в разделе ***6.6.***

Обзор основных подходов к дискретному моделированию процессов *биологического* развития [3-5,88] со всей очевидностью показывает, что в настоящее время основным аппаратом моделирования в данной области являются ***ОС-****концепция* и ***L-****системы****.*** Поэтому, вполне уместно попытаться провести *сравнительный* анализ обоих подходов и обсудить связанные с ними некоторые биологические соображения**,** а также в определенной мере оценить возможные пути дальнейшего развития аппарата дискретного моделирования в биологических науках**.** Неся во многом предположительный характер**,** данные оценки, вместе с тем, представляют вполне определенный интерес для исследователей в области математической и теоретической биологии.

8.2.5. Сравнительный анализ ОС-моделей и L-систем как формального аппарата модельных исследований в биологических науках

Процесс *биологического* развития, в ходе которого одна клетка превращается в сложнейший *многоклеточный* организм, по праву можно назвать одним из самых замечательных явлений в природе. В последнее время было получено очень много весьма важных теоретических и экспериментальных результатов, представляющих большой интерес для понимания этого процесса. Однако по мнению целого ряда исследователей для *полного* понимания процесса развития необходима, по-видимому, разработка *совершенно* новых методов и подходов. В качестве одного из таких основных подходов можно выделить и ***кибернетическое моделирование*** процесса развития, а из теоретических методов **–** ***ОС-****модели* и ***L-****системы****.*** Оба формальных аппарата дискретного моделирования допускают

целый ряд интересных для биологических приложений модификаций и биологических интерпретаций, к обсуждению которых мы и переходим. Это тем более важно, ибо из-за невозможности экспериментально выделить основные факторы, не утрачивая при этом самой специфики биологии развития, мы используем подходящую формальную технику как для упрощения теоретического анализа изучаемых биологических явлений, так и в надежде на то, что на этом пути нам, возможно, удастся хоть немного приблизить к точной науке биологию, подобно теоретической и математической физикам. В данном контексте и обсудим ***ОС-модели*** и ***L-системы*** с наиболее общей точки зрения. Основой биологических интерпретаций ***ОС-моделей*** стали следующие аксиомы, а именно:

♦ ***В качестве основной биологической единицы больше всего подходит клетка, которая есть некоторый конечный автомат и все, что нам нужно знать о ней – только зависивисимость ее выхода от входа и текущего состояния.***

♦ ***Все клетки в организме имеют одинаковый генотип, т.е. один и тот же набор инструкций их развития и функционирования.***

♦ ***Развитие клеточной системы существенно зависит от обмена информацией между составляющими ее клетками.***

♦ ***Организм сам регулирует наиболее важные стороны своего развития; точнее, развитие управляется изнутри, а не извне организма.***

♦ ***Развитие каждого организма осуществляется самовоспроизведением составляющих его клеток путем их деления.***

Конечно, каждая из пяти представленных *аксиом* является в той или иной мере упрощением реального положения вещей, но когда формальные модели, основанные на них, помогут добиться какой-то ясности, то впоследствии к ним можно будет подключать и новые предположения в целях большего их приближения к реальности. Так, например, при моделировании дифференциации, регуляции и регенерации на основе ***ОС-***концепции дополнительно к указанным аксиомам использовался и принцип ***Сэджер*** [349] об образовании форм в соответствии с системой инструкций. Данное представление об инструктивной (*программируемой*) системе управления развитием наиболее привлекательно именно тем, что оно может служить перспективным развитием того пути, по которому обычно мыслится приложение теории информации и общей теории систем, а ныне и такой междисциплинарной науки, как ***синергетика***, в биологии развития.

Нетрудно убедиться, что поведение ***ОС-***моделей может быть описано на языке логических сетей, а так как ***М. Сугита*** доказал возможность представления генетических моделей Жакоба-Моно на языке логических сетей, то ***ОС-***модели процессов биологии развития могут получать весьма интересную генетическую интерпретацию [5,46]. В этой связи вытекает принципиальная возможность интерпретации ***ОС-***моделей развития генетическими моделями Жакоба-Моно. Моделирование на основе ***ОС-***концепции позволяет рассматривать процессы развития с точки зрения иерархических структур. В данном контексте модели развития, реализованные на такой основе, могут исследоваться средствами теории систем, что обеспечивается свойствами ***ОС-***подхода. Это позволяет получать качественно новые результаты моделирования *процессов* биологического развития [46,90]. Так, на основе такого подхода анализ ***ОС-***моделей дифференциации, регуляции и регенерации клеток позволил сделать вывод, что при предположении о том, что процесс дифференциации и регенерации управляется изнутри клеточной системы, то в ней обязательно должны существовать и более *высокие* уровни организации, чем дифференцировка и регенерация, что, вообще говоря, и наблюдается [536].

На общем уровне рассмотрения вышеуказанные пять аксиом развития вполне удовлетворительно отвечают ***ОС-***концепции. В этом случае клеткам развивающегося организма отвечают единичные автоматы ***ОС-***модели. На самом же деле реальная клетка по своей

структуре намного *сложнее* наших автоматов, но для исследования проблем развития на клеточном уровне мы должны как-то снять вопросы, связанные со структурной сложностью клетки, а также вопросы, связанные с *функционированием* составляющих ее частей. Этого мы и добиваемся, рассматривая клетки как «*черные ящики*», т.е. рассматривая *межклеточные* взаимодействия, переходим на более высокий уровень организации, чем тот, который рассматривали исследователи, моделируя системы ферментов в клетках. Выбирая в качестве основной единицы клетку, в смысле ее поведения мы ограничиваемся только зависимостью ее выхода от входа и ее состояния в предыдущий момент времени. В принципе, ***OC***-концепция вполне допускает и *структурный* уровень моделирования, когда при реализации ***OC***-моделей развития исследуется и *внутренняя организация* их единичного автомата-клетки. В ряде моделей развития, упоминавшихся выше, существенно использовались внутренние структуры единичного автомата-клетки. Следовательно, и ***OC***-концепция допускает моделирование биологических процессов и на более низких уровнях рассмотрения, чем отдельная биологическая клетка.

Время в ***OC***-моделях полагается дискретным, тогда как на самом деле оно непрерывно. Но для целей кибернетического моделирования процессов развития это пока не столь существенно, тем более, что еще очень мало известно о собственно биологическом времени, играющем весьма существенную роль в развитии. Каждая ***клетка*** имеет один и тот же генотип, от которого, по-видимому, и зависит вид получающегося из нее организма. Поэтому, вероятно, наиболее удобным путем создания эффективных моделей развития является моделирование самого генотипа *(программы работы клетки)*. Действительно, до сих пор основная часть работы по исследованию вопросов дифференцировки клеток велась на уровне взаимодействия между тканями, тогда как крайне существенно распространить наше понимание на природу процессов, происходящих и на *клеточном* уровне. Таким подходом мы исключаем из рассмотрения *одноклеточные* организмы, также испытывающие развитие, которое в основном есть результат *внутриклеточной* деятельности. Однако на этом этапе моделирования мы пока вынуждены мириться с этим. Выше мы предположили, что все клетки имеют один и тот же генотип, т.е. каждая клетка в организме, начиная с зиготы, приступает к работе с одним и тем же набором генетических инструкций. Сама ***OC***-концепция предполагает именно данный аспект.

Между тем имеются экспериментальные данные, свидетельствующие о том, что в ряде организмов различные клетки могут иметь разный генотип. Однако из самого функционирования ***OC***-моделей можно показать [5,46], что данный феномен имеет место при интерпретациях и такого класса моделей развития. Предположение о том, что развитие организма существенно зависит от межклеточного обмена информацией, также легко вписывается в ***OC***-модели развития, как один из неотъемлемых атрибутов самой ***OC***-концепции. В настоящее время данный биологический факт является общепризнанным и в случае ***OC***-моделей таким обменом информацией служит *передача* одним автоматом другому *(другим)* символов из входного *(выходного)* алфавитов либо сообщения о своем текущем состоянии. На наш взгляд, нет необходимости в каком-либо ограничении для передачи информации от автомата к автомату в ***OC***-моделях по причине сложности реальных межклеточных взаимодействий.

Так как организм вырастает из единственной клетки *(зиготы)* путем ее самовоспроизведения, то единичный автомат ***OC***-модели должен обладать способностью в нужный момент породить свою *копию*. Это достигается тем, что какой-нибудь соседний нефункционирующий единичный автомат переводится в некоторое ненулевое состояние, становясь таким образом функционирующим и составной частью уже более сложного организма; при этом он получает весь ***генотип*** исходного автомата, из которого развивается организм в ***OC***-модели. На этом мы завершаем краткое обсуждение основных свойств ***OC***-моделей с точки зрения упрощенной биологической аксиоматики, лежащей в осно-

ве процессов развития на клеточном уровне, и переходим к рассмотрению *классов задач*, относящихся к тому или иному процессу развития и которые можно достаточно успешно моделировать и исследовать в рамках общей ***ОС-***концепции.

Первый класс задач заключает в себе основной вопрос о том, каким образом осуществляются процессы ***дифференциации***, ***регуляции*** и ***регенерации*** в организме. Построение для этой цели ***ОС-***моделей позволило прояснить целый ряд вопросов и сформулировать интересные проблемы для дальнейших исследований в этом направлении. Вопросы, относящиеся к данному классу задач биологии развития, могут привести нас к лучшему пониманию проблемы образования пространственной структуры вообще. С другой стороны, в процессе исследования этих вопросов само понятие ***ОС-***моделей было существенно расширено и сделано значительно более *приемлемым* для целей биологического моделирования. Наряду с этим, алгоритмы, лежащие в основе *биологических* моделей дифференциации, регуляции и регенерации, могут быть положены в основу систем управления различного рода клеточных систем искусственного характера. В частности, ряд полученных в данном направлении алгоритмов успешно использовался нами при создании параллельной системы обработки информации и параллельной управляющей системы для однородных вычислительных систем на базе ЕС ЭВМ [42,50-52,88,90,536].

Второй класс задач относится к проблеме ***роста***, который сам по себе с абстрактной точки зрения не представляет особой проблемы, ибо обеспечивается процессом самовоспроизведения клеток, на котором и основано само развитие биологической организации материи. Однако данная проблема включает важный вопрос о том, каким образом развивающийся организм может контролировать свои размеры в процессе самовоспроизведения клеток, если это должно полностью обеспечиваться *генотипом* его клеток. Действительно, интерес представляет такой рост, когда может происходить ***пространственная*** дифференцировка в процессе непрерывного *самовоспроизведения* исходного набора клеточных инструкций без влияния внешнего воздействия. Интересным представляется и изучение процессов роста, которые приводят к получению из ограниченного числа клеточных инструкций организмов, состоящих из огромного числа клеток. В этом плане интересным представляется также исследование вопросов устойчивости процессов роста и их контролируемости по отношению к различного рода нарушениям, ибо это сможет представить определенный интерес и для такой области медицины, как онкология. Некоторые из вышеперечисленных вопросов исследовались с помощью ***ОС-***моделей роста, обсуждаемых выше. Данная проблематика представляет большой интерес и для искусственных систем клеточной организации в целом [5,88,90,536].

Третий класс задач – это проблема *самовоспроизведения биологических* организмов. Подавляющее большинство существующих на сегодня формальных моделей самовоспроизведения характеризуется тем, что один организм строит свою копию. Однако с точки зрения биологии развития наибольший интерес представляет вопрос о том, как может один единственный автомат ***ОС-***модели, начав процесс самовоспроизведения, породить достаточно сложный пространственно дифференцированный нетривиальный организм, способный к самовоспроизведению и в определенной мере к регуляции и регенерации. В этой связи предстоит исследовать следующий вопрос: ***Как образование достаточно сложного пространственного организма оберегает себя от ошибок и каким набором клеточных инструкций исходного единичного автомата ОС-модели этого можно добиться?*** Таким образом, круг задач третьего класса предполагает подход к проблеме биологического самовоспроизведения на уровне клеток, а не организмов.

Четвертый класс задач можно охарактеризовать как проблему ***сложности*** в биологии развития. Здесь можно сформулировать целый ряд весьма интересных вопросов о *сложности* единичного автомата-клетки ***ОС-***модели развития, из которого вырастает сложный многоклеточный организм; о *сложности* пространственной дифференциации; об

изменении сложности в процессе развития биологической организации, да и о самом понятии сложности вообще. Некоторые из данных вопросов исследовались нами в рамках упомянутых ***OC***-моделей развития, но до полного понимания проблемы еще далеко. В этом отношении проблема ***сложности*** является одной из наиболее фундаментальных и интригующих тем современного естествознания и науки в целом. На сегодня имеется ряд подходов к определению данного понятия, но полное понимание пока отсутствует.

Каждая из перечисленных задач *четырех* описанных классов является составной частью единого процесса биологического развития, однако в настоящее время необходимо думать о том, как разложить процесс развития на его основные составляющие и проанализировать их. В то же время не следует думать, что какая-то простая модель раскроет все свойства данного процесса развития. Поэтому каждый из перечисленных выше классов задач предполагает целый ряд других возможных направлений для моделирования как дискретного, так и непрерывного типов, да и сам перечень классов задач до некоторой степени является условным. Все это потребует дальнейшей серьезной проработки [536].

Таким образом, уже краткое обсуждение возможностей ***OC***-концепции и ее биологические интерпретации позволяют сделать вывод о том, что она во многих случаях может и послужить вполне удовлетворительной отправной точкой для задач дискретного моделирования в биологии развития. На основе ***OC***-концепции к настоящему времени построен целый ряд интересных дискретных моделей развития и в ряде случаев дана удовлетворительная их биологическая интерпретация. На *начальном* этапе кибернетического моделирования биологии развития, когда сомнение вызывала сама принципиальная возможность, подобный подход был, пожалуй, единственно возможным как в плане существования пригодного аппарата, так и в плане готовности самой биологии. Более того, и сами ***OC*** зародились именно как средство такого моделирования. Однако, моделируя на основе ***OC***-концепции процессы развития, мы в значительной мере игнорировали основу этих процессов (*размножение клеток путем их деления*) уже ввиду самого понятия *однородных структур*. Поэтому сейчас можно отметить, аппарат ***OC*** (*несмотря на то, что структуры допускают ряд интересных обобщений, существенно расширяющих их возможности для биологии развития*) не сможет выполнять роль того универсального аппарата моделирования, посредством которого можно было бы успешно исследовать проблемы биологии развития в целом. Однако это нисколько не умаляет роли ***OC***-концепции в биологическом моделировании и на этом пути еще будет получен целый ряд интересных результатов, тем более, что ***OC***-концепция на сегодня обладает рядом черт, которые либо отсутствуют, либо недостаточно четко выражены в других аппаратах *дискретного* моделирования процессов биологии развития и биологии в целом [4,5,88,90,536].

Но для дальнейшего прогресса *дискретного* моделирования в биологии развития потребовалось снять ряд ограничений, присущих ***OC***-концепции в качестве основы биологического моделирования. Поэтому, ***А. Линденмайер***, базируясь на ***OC***-концепции, ввел системы, известные ныне под названием ***L***-систем. В настоящее время ***L***-системы интенсивно развиваются как в плане исследования их в качестве самостоятельного объекта – *формальных параллельных грамматик*, так и в плане использования их для решения задач дискретного моделирования в биологии развития [136,162,163,251,264,332-338]. Поэтому здесь отметим лишь, что ***L***-системы существенно расширяют возможности одномерных ***OC***-моделей, тогда как с точки зрения биологической адекватности они получают вполне удовлетворительные на сегодня интерпретации в объеме, о котором и упоминалось выше. ***L***-системы уже хорошо проявили себя при описании целого ряда биологических процессов и феноменов и являются, по всей вероятности, на сегодня наиболее разработанным и адекватным аппаратом для описания целого ряда биологических феноменов, особенно морфологии растений на клеточном уровне [536].

Из результатов моделирования процессов развития и целого ряда других соображений мы пришли к выводу, что ***OC*-концепция** наиболее удобна для дискретного биологического моделирования на структурном уровне с последующей компьютерной реализацией результатов моделирования; тогда как, например, ***L*-системы** значительно удобнее для формального описания развивающихся биологических систем, являясь весьма удобным языком их лингвистического описания. Хотя и в случае ***L*-систем** возникает целый ряд затруднений при возрастании размерности системы, которых, возможно, и удастся избежать именно на основе использования d-мерных параллельных τ_H-грамматик (глава 5) и *пространственно параллельных грамматик* [254]. Между тем, формальные модели развития на основе ***OC*-концепции** позволяют для своего исследования привлечь такие относительно новые для биологии развития разделы кибернетики и математики, как: теория информации, теория алгоритмов и рекурсивных функций, теория автоматов, логика, общая теория систем, теория динамических систем и др., что позволяет ставить и решать принципиально новые проблемы в биологии развития. Более того, ***OC*-концепция** получше приспособлена для исследования именно процессообразных феноменов развития: процессы регуляции, регенерации, дифференциации, роста и т.д.; тогда как ***L*-системы** значительно лучше отвечают топологическим аспектам развития: структурообразованию, морфогенезу, пространственной дифференцировке и ряду других. Вместе с тем ***OC*-концепция** и ***L*-системы** весьма хорошо дополняют друг друга в деле дискретного моделирования в биологии развития и, возможно, именно поэтому ***Ле Хой*** [350] ввел свои параллельные обменные системы, которые наследуют основные черты обоих систем, хотя и они весьма чувствительны к размерности моделируемого пространства и имеют плохо формализуемые элементы, например, движение единичных модулей системы в моделирующем пространстве.

Использование ***OC*-концепции, *L*-систем** и другого подобного им аппарата дискретного моделирования в биологии развития даст, по всей вероятности, еще немало интересных результатов. Однако вряд ли на основе упомянутых формальных аппаратов может получить дальнейшее развитие качественно новый аппарат моделирования, как это произошло в случае появления ***L*-систем** на основе концепции одномерных ***OC*-моделей**. Основная причина такого положения вещей состоит в том, что все эти системы весьма чувствительны к проблеме размерности моделируемого пространства и у них, на наш взгляд, отсутствует по отношению к биологии развития главное интуитивное качество, присущее любой хорошей формальной теории, которое обычно называют изящностью.

В этом плане, прежде всего, необходимо четко представить себе основные недостатки, присущие предыдущим аппаратам дискретного моделирования в биологии развития. В автоматных моделях (***OC*-*модели*, *L*-*системы и т.д.***) генетический и эпигенетический механизмы биологической клетки представляются функционированием конечных автоматов, т.е. элементами с дискретными множествами состояний. При этом взаимодействия элементов порождают переходы из одного состояния в другое по определенным детерминированным правилам. Поэтому, к недостаткам этих моделей по сравнению с непрерывными динамическими можно отнести их существенную отвлеченность от конкретных биологических механизмов. Между тем, преимущества таких моделей состоят в возможности исследовать очень сложные сети с элементами, имеющими большое число стационаров. Промежуточный подход, базирующийся на дискретно-непрерывной модели генетических сетей, разработан ***Р. Цаневым, Б. Сендовым*** и их коллегами [340].

Хорошо известно, что описание поведения отдельной клетки можно выразить на языке конечных автоматов. Так как совокупность клеток развивается не только за счет изменения самих клеток, а скорее благодаря обмену информацией между ними, то математический аппарат для описания процессов развития на клеточном уровне вероятнее всего следует искать в дискретной области, аппарат которой в настоящее время лучше всего

и отвечает подобным задачам. Более того, основные трудности до сих пор встречались именно в связи с *размерностью* моделируемого пространства, в котором происходит развитие, и спецификой самих процессов развития: когда *поведение клетки* в значительной степени зависит от информации, получаемой от ее непосредственных соседей; ***клетка*** делится в окружении своих соседей, а затем новая клетка устанавливает информационные связи со своим новым окружением путем контакта *(за исключением граничных клеток)*. На основе анализа основных недостатков существующих аппаратов дискретного моделирования мы попытались спрогнозировать возможные пути разработки более адекватного аппарата моделирования процессов развития [3-5,46,88,90,536].

Возможные пути становления и дальнейшего развития аппарата *дискретного* моделирования в биологии развития схематично представлены на рис. ***24*** (пункт ***8.2.1)***. В данном контексте, на первом этапе наибольшее развитие получил аппарат *дискретного* моделирования на основе ***OC-***концепции, из которой на втором этапе выросли ***L-***системы и были предприняты попытки совместить положительные черты обоих этих аппаратов. Два первых этапа весьма тесно связаны друг с другом как прямой преемственностью, так и объединяющими их системами моделирования, пусть даже не совсем пока и разработанными. Современное дискретное моделирование в биологии развития приходится, в основном, на эти два этапа. На ***третьем*** этапе необходимо избавиться от сложностей, связанных с размерностью моделируемого пространства, которые до сих пор служат основным препятствием на пути дискретного моделирования такого важного феномена развития, как *деление* и *смерть* внутренних клеток пространственного многоклеточного организма. В этой связи нам представляются вполне актуальными следующие три возможные пути решения данной проблемы, а именно:

♦ ***разработка специальных многомерных параллельных грамматик и алгоритмов, допускающих максимальное параллельное выполнение операций подстановок и вставку в любое место перерабатываемого слова любых конечных (возможно и пустых) подслов;***

♦ ***широкое использование идей и понятий графо-топологического аппарата;***

♦ ***разработка принципиально нового аппарата дискретного моделирования, наилучшим образом отвечающего проблематике биологии развития.***

На что же реально в настоящее время имеет смысл рассчитывать? Прежде всего о *первой* возможности. Разработка параллельных алгоритмов и грамматик, оперирующих с многомерными словами, представляет действительно большой интерес. Однако здесь опять возникают сложные проблемы, связанные с *размерностью*. Наш поиск удовлетворяющих таким свойствам многомерных грамматик и алгоритмов, пока ни к чему не привел. Однако работа в данном направлении принесла свои положительные результаты для ряда задач дискретного моделирования в биологии развития [3-5,46,88,90,536].

Тем более не имеет особого смысла рассчитывать на создание в ближайшее время *принципиально* нового аппарата, наилучшим образом отвечающего нуждам биологии развития. Как показал опыт, такой фундаментальный аппарат не создается быстро, да и притом почти на пустом месте. Остается возможность использования *графо-топологического* подхода. Наиболее пригодным в настоящее время представляется именно дискретный графо-топологический подход, который действительно учитывает все ранее указанные трудности предыдущих систем, хотя и является еще более абстрактным и менее наглядным. Ряд интересных моделей развития, использующих этот подход, уже появился [3-5, 46,88]. И в заключение хотелось бы подчеркнуть, что мы разделяем мнение ***К. Уоддингтона***, что ***основная теория должна быть сходна с топологией d-мерного пространства***. Поэтому уже сейчас мы должны очертить наиболее существенные на *клеточном* уровне феномены многоклеточных развивающихся организмов, искать *наиболее* адекватный их моделированию *формальный* аппарат. И это настолько важный вопрос для биологии развития, что нельзя проявлять какую бы то ни было слабость, пытаясь и далее описывать

процессы биологического развития, главным образом, в терминах традиционных понятий кибернетики и математики. Действительно, большинство трудностей при использовании современного математического аппарата в биологии развития *(как впрочем и в биологических науках вообще)* состоит именно в том, что мы пытаемся *(за очень редким исключением)* использовать формальные системы, разработанные на основе и для целей исследования неживой природы, качественно отличной от той области, которой занимается биология и, в частности, ***биология развития.***

В процессе биологической эволюции возникли чрезвычайно сложные и вместе с тем поразительно *эффективно* функционирующие живые организмы, функционирование которых обеспечивается соответствующими биологическими управляющими системами. Механизмы, лежащие в основе таких систем, достаточно сложны и по мнению ряда исследователей круг вопросов, связанных с данной проблематикой, должен составить основу зарождающегося нового научного направления ***– эволюционной кибернетики.*** Основное направление ее исследований можно определить как теоретический анализ, базирующийся на разнообразных как математических, так и компьютерных моделях эволюции биологических систем обработки информации и кибернетических свойств живых организмов. В качестве одного из основных модельных подходов в данном направлении предполагаются и ***ОС-***модели в самом широком их понимании. В частности, на основе кинематических ***ОС-***моделей предпринято симулирование эволюции [536].

8.3. Вопросы использования ОС-моделей в вычислительных науках

В настоящее время весьма значительная активность теоретических исследований в развитии перспективных архитектур вычислительных систем ***(ВС)*** с новыми свойствами и новыми областями приложений наблюдается относительно *параллельных* вычислительных моделей ***(ПВМ).*** Работа в этом направлении привела к созданию ряда интересных формальных моделей параллельных вычислений и параллельной обработки информации. Успешно реализован ряд проектов по созданию высокопараллельных ***ВС,*** использующих ту или иную формальную модель вычислений [5,11,12,36,42,178,202,234,238,352-363,366-369,403]. Такие известные проекты по созданию ***ЭВМ*** пятого поколения как «***Fifth Generation*» *(Япония)*, «*Alvey*» *(Англия)*, «*Esprit*» *(Западная Европа)*, «*МСС*» и «***Strategic Computing*» *(США)*** и другие предусматривают проведение весьма серьезных работ по параллельной обработке информации и высокопараллельным ***ВС*** *(матричные и клеточные процессоры, систолические структуры, однородные вычислительные структуры, транспьютерные сети и т.д.).* А такая, в первую очередь, коммерческая корпорация как ***IBM*** уже с ***1976*** г. начала проводить международные симпозиумы по параллельной обработке информации в рамках математических оснований вычислительных наук. В настоящее время проблематике параллельных ***ВС,*** вычислений и обработке информации посвящен и ряд специальныхжурналов [371], регулярно проводятся международные конференции и выставки различного уровня [201,202,238,308,352,353,356,357,359-363,367], издается также большое количество литературы различных направлений и уровня [368]. Практические разработки высокопараллельных ***ВС*** представляются и на ставших уже традиционными специализированных выставках современной высокопроизводительной вычислительной техники [352,353,361,363]. Можно с полной уверенностью констатировать, что ***ПВМ*** позволяют сформировать новый взгляд на основные черты перспективных архитектур ***ВС,*** отличных от традиционной последовательной фон Неймановской архитектуры. Для более подробного знакомства с данной проблематикой в рамках *современных* вычислительной техники и программного обеспечения можно обратиться к работам [9,

358,366,369,372], каталогам публикаций [368,371], а также вышецитированной литературе. Весьма интересный экскурс в развитие архитектур параллельных ***ВС*** *(базирующихся на конечных* ***ОС****-моделях)* и их приложениях можно найти в [420,536].

Хорошо известные *клеточноподобные* системы образуют весьма интересный класс таких ***ПВМ*** и ***ОС***-модели являются достаточно типичными и популярными представителями данного класса, образуя собственный *подкласс* класса всех *параллельных дискретных динамических систем* ***(ПДДС)*** [1,3,5,8,11,54,128,147,150,158,159,161,166,177,308,366,536]. Вопреки актуальности создания высокопараллельных ***ВС*** и параллельных принципов обработки информации и вычислений, нам не представляется возможным в рамках данного раздела рассмотреть даже основные аспекты данной проблематики по причине ее обширности, обилия и разнообразия имеющегося на сегодня материала. Поэтому изложение ограничим только теми основными прикладными аспектами, которые непосредственно базируются на вычислительных ***ОС***-моделях и находятся в сфере наших интересов, отсылая более требовательного читателя к соответствующей литературе [536].

Однородные вычислительные структуры ***(ОВС)*** представляют собой весьма широкий класс дискретных устройств, имеющих теоретической основой ***ОС***-модели. Данная прикладная часть ***ТОС***-проблематики имеет дело с такими вопросами как надежность и жизнеспособность, методы контроля и диагностики повреждений, экономические аспекты, параллельное программирование, конструирование, методы организации параллельных вычислений и т.д. В рамках ***ОВС*** представляется модель параллельной операционной системы [40,45,51,52], которая существенно использует целый ряд параллельных управляющих алгоритмов и принципов непосредственно из теории однородных структур.

Показано, что ***ТОС***-подход может служить в качестве математической основы методологии параллельного микропрограммирования. В этом случае методы описания параллельных микропрограмм, их преобразований и синтеза базируются на специальных системах параллельных подстановок ***(СПП)***, которые оказываются строго эквивалентными классическим ***ОС***-моделям. И действительно, ***СПП*** с процедурой их применения строго эквивалентны ***Sb(m)***-грамматикам ***Е. Щербакова***, которые в свою очередь строго эквивалентны параллельным τ_n-грамматикам, определяемым классическими ***1-ОС*** [5,60]. Следовательно, подход к построению микропрограммной параллельной техники, базирующейся на ***СПП***, может с успехом использовать применимые результаты и методы ***ТОС***-подхода. В качестве примера использования такого подхода можно привести решение проблемы распознавания непротиворечивости алгоритмов параллельных подстановок ***(АПП)***, определяемых ***СПП*** и процедурами их применения. Используя соответствующие результаты по ***ТОС***-проблематике, нам удалось доказать [53], что: ***Проблема непротиворечивости АПП имеет конструктивное решение.*** Данный результат позволил получить ряд интересных следствий, включая *сугубо* прикладного характера, в частности, для конструирования микропрограммно управляемых систем и устройств.

Искусственный интеллект вобрал в себя попытки отобразить нейрологические функции человеческого мозга – познание, ощущения, обработку образов, взаимодействие с помощью логических символов в некоторых формальных системах на основе современных компьютерных технологий. Наиболее удачными и практически реализованными разработками в этой области являются ***экспертные системы*** и различного назначения ***знаниеориентированные системы*** [94-96], а также естественные языки программирования. Используемые ими технологии предполагают обработку и анализ огромного количества фактов, знаний и правил вывода, для чего необходим широкий и быстрый обмен с базами данных и/или знаний, что обеспечивается только за счет использования ***ВС*** на основе параллельных архитектур. Проведенный обширный анализ [9,15,83,87,90,121,150, 159,160,201,202,308,352-373] показывает преимущества и большое будущее у параллельных вычислительных архитектур, особенно для научных исследований, решения глоба-

льных и стратегических задач, систем автоматизации проектирования в различных областях планирования и прогнозирования и др. Причина такого положения заключается в возможности достижения ультравысоких скоростей вычислений в сочетании с относительно низкой стоимостью. В этой связи ***ВС*** параллельного действия на основе вычислительных ***ОС-***моделей представляют значительный интерес [3,5,83,147,150,159,160,178,179, 201,308,354,366,370,373,376,536], что стимулирует их интенсивные исследования.

В этом плане весьма перспективными представляются так называемые нейронные компьютеры [94-96,159,354,374], архитектура и топология которых наследуют многие основные черты вычислительных ***ОС-***моделей. Предполагается, что в будущем компьютеры такого типа будут в значительной степени использовать принципы функционирования реального мозга и позволят значительно более успешно решать задачи искусственного интеллекта. Наряду с этим нейрокомпьютеры позволят существенно расширить и класс эффективно моделируемых задач, а также помогут заложить предпосылки новых принципов организации памяти ЭВМ и работы с данными различных типов. Действительно, реально существующие модели таких компьютеров вселяют определенный оптимизм, обладая рядом существенных преимуществ перед предыдущими архитектурами [536].

Унификация средств конструирования архитектуры ***ОВС*** и их программного обеспечения тесно связана с исследованием универсальных структур памяти, к которым относятся и ***d-***мерные абстрактные регистры с периодически определенными преобразованиями ***(ПО-преобразованиями)***, играющие достаточно важную роль в проектировании перспективных параллельных ***ВС***. Показано (раздел ***6.2)***, что такие формальные конструкции эквивалентны классическим ***ОС-***моделям, а концепция ***ПО-***преобразований и ***ОС-***моделей хорошо отражает синхронную мультиобработку структур данных и применима при проектировании и конструировании ***ОВС***, и их базового программного обеспечения на основе параллельных управляющих систем [11,12,15,53-56,88,90,325,536].

Так, например, к классическим ***ОС-***моделям тесно примыкают так называемые ***регистровые автоматы*** [226], представляющие собой математическую модель структуры современных ***ВС***. Функционирование таких регистровых автоматов определяется ***ПО-***преобразованиями, упоминавшимися выше. Применяя данную концепцию бесконечного автомата, можно построить абстрактную модель центрального процессора ЭВМ, а также решать вопросы его микропрограммирования. Следует отметить, что теория регистровых автоматов, основы которой были заложены ***В. Глушковым,*** весьма тесно увязывается с ***ТОС-***проблематикой, в частности, с теорией ***итеративных автоматов*** [536].

В связи с применением теории абстрактных автоматов к теории математических машин важное значение получает понятие ***многорегистрового автомата,*** как бесконечного автомата специального типа, чрезвычайно удобного для описания и изучения операционных устройств ***ВС***. Данное понятие играет центральную роль в теории дискретных преобразователей [375]. Основными областями приложений данной теории являются теоретические вопросы программирования, а также алгоритмическое и логическое проектирование архитектур современных и перспективных ***ВС,*** параллельных алгоритмов и весьма широкого спектра устройств дискретного характера [536].

Будучи эквивалентными ***d-***мерным ***ПО-***преобразованиям, классические ***ОС-***модели обладают по отношению к ним значительными преимуществами *конструкционного* характера, что особенно важно с прикладной точки зрения. Наряду с этим аппарат ***ОС-***моделей позволяет в целом ряде случаев проводить на формальном уровне исследования и более глубоких свойств ***ПВМ,*** а полученные результаты наглядно интерпретировать в рамках понятий используемых технических средств [53-56]. Это является еще одним доводом в пользу важности исследований по ***ТОС-***проблематике как одной из перспективных теоретических основ ***ненеймановского*** подхода к вычислениям и организации архитектуры высокопроизводительных параллельных ***ВС*** последующих поколений [96].

С данными абстрактными моделями мультиобработки ассоциированы и модифицированные системы алгоритмических алгебр ***(САА)***, ориентированные на формализацию *структурированных* параллельных схем программ. Операторные представления в модифицированных ***САА*** называются параллельными регулярными схемами. Последующий синтез аппарата модифицированных ***САА*** с теорией языковых мультипроцессоров привел к определению грамматик структурного проектирования ***(ГСП)***, лежащих в основе изобразительных средств ***САА***. Деннотативный характер описания процесса конструирования программ в ***ГСП***-терминах сочетается с их явным представлением на базе формальных ***С-грамматик*** [51,53,227,536].

В процессе развития нового подхода к обработке информации, использующего режим *информационного распараллеливания* ***(ИР)*** [8,11,12,15,49-53], нами были спроектированы и реализованы два программных пакета ***ПСОИ*** (*параллельная система обработки информации*) и ***ПУС*** (*параллельная управляющая система*) для *сосредоточенных однородных вычислительных систем* ***(СОВС)***, составленных из моделей ***ЕС ЭВМ*** с массовыми средствами комплексирования. При проектировании обоих пакетов были существенно использованы практические выводы, полученные при исследовании ряда параллельных алгоритмов и процессов в классических ***ОС***-моделях. Так, на основе принципа локального взаимодействия в ***ОС***-моделях в пакете ***ПУС*** реализован эффективный принцип *глобально-локального* управления [49-52]. Для целей управления использовались аналоги оптимальных параллельных алгоритмов, исследованных в связи с моделированием процессов управления в биологических моделях развития на основе ***ОС***-концепции [11,12,52]. Практические рекомендации, полученные в результате исследования погруженных в ***ОС***-модели параллельных алгоритмов, были использованы при создании параллельного программного обеспечения, что позволило увеличить полезное время ***СОВС*** на ***10% – 15%*** при прочих равных условиях. На основе анализа функционирования ***СОВС*** в ***ИР***-режиме под управлением пакетов ***ПСОИ/ПУС*** определена вычислительная ***ОС***-модель [11], позволяющая устанавливать интересные аналогии с реальными *биологическими* клеточными системами. Следовательно, вполне реально говорить о наличии общих концептуальных черт функционирования *параллельных* ***ВС***, основанных на вычислительных ***ОС***-моделях, и реальных биологических клеточных систем. Данное обстоятельство позволяет сделать существенные шаги по наведению мостов между вычислительными и бионауками, что открывает широкие возможности для взаимного обогащения и развития. Таким образом, ***ОС***-концепция имеет все предпосылки для того, чтобы сыграть весьма существенную роль в деле объединения столь различных на сегодня научных областей современного естествознания. И все это позволяет говорить о том, что ***ТОС***-проблематика все более принимает новый и важный ***междисциплинарный*** характер [536].

Анализ автоматной модели функционирования ***СОВС*** под управлением пакетов ***ПУС*** и ***ПСОИ*** в ***ИР***-режиме показал [51,52], что оба пакета допускают представление соответствующими ***С-грамматиками***, описывающими их архитектуру и функционирование. Полученный результат может быть положен в основу использования аппарата тождественных преобразований операторных и логических выражений, разработанного для модифицированных ***САА*** с целью детального описания, анализа и оптимизации параллельных пакетов ***ПСОИ/ПУС*** и подобных им параллельных программных систем, что позволяет существенно повышать эффективность их функционирования в ***СОВС***. А так как обе упомянутые модели функционирования ***СОВС*** *эквивалентны* [51], то появляется возможность использования формальных ***С***-грамматик и для целей моделирования биологических процессов и феноменов развития. Наряду с этим автоматную интерпретацию ***ИР***-режима в ***СОВС*** можно получить также в терминах *клеточных* ***d***-*графовых автоматов* и *древовидных машин* [54]. Подробный анализ и описание подходов к реализации ***ИР***-ре-

жима на основе параллельных пакетов ***ПСОИ/ПУС*** и связанных с этим вопросов можно найти в наших научно-технических сборниках статей [11,12,15,536].

Концепцию, методы и подходы ***ТОС*** можно использовать и для решения ряда более специальных задач параллельной вычислительной техники ***(ВТ)***, которые являются составной частью реализации архитектур высокопараллельных перспективных ***ВС*** на основе итеративных сетей, а также клеточных и систолических структур. Вопросы клеточных вычислительных архитектур достаточно подробно обсуждаются в [6,137,138,156,160,169, 175,242,360,394], а систолических структур – в [178,370]. Тогда как по итеративным сетям имеется настолько обширная литература, что упомянем лишь наиболее общего характера источники [230,263,308,357,360-365,367,374]. Сюда же непосредственно примыкают и все более активно развиваемые как теоретические, так и прикладные исследования и по *нейрокомпьтерным* архитектурам, составляющим ныне отдельную ветвь общей ***ОС***-концепции [148,322,342-344,347,350,354-358,536]. Практические выходы результатов в данном направлении позволили довольно существенно продвинуть наши представления о возможностях реальных ***ПВМ*** при решении разноплановых конкретных задач.

Существующие на сегодня ***ВС*** с *параллельной* архитектурой вызвали к жизни целый ряд интересных с прикладной точки зрения работ [8,9,11,12,15,54,87,94-96,121,146,160,166,175, 202,234,238,308,352-374], предлагающих новые подходы к организации высокопараллельного программного обеспечения для решения наиболее часто встречающихся вычислительных и другого типа задач. Наряду с этим все большее внимание уделяется вопросам разработки конкретных параллельных алгоритмов для решения различных классов вычислительных задач (*математическая и вычислительная физика, вычислительная математика, линейная алгебра, дифференциальные уравнения и др.* [158,177,202,234]), а также других классов задач как вычислительного, так и невычислительного характера (*распознавание образов и обработка сигналов, прогнозирование, глобальное и стратегическое планирование, искусственный интеллект и робототехника и др.* [15,94-96,149,150,159,160,178,234,238,308,354, 356,357,366,368,372,391,392,394]). В таком контексте соответствующие исследования формальных вычислительных ***ОС***-моделей могут представить весьма серьезный интерес и для теоретического обоснования и практического проектирования перспективных параллельных вычислительных архитектур и их программного обеспечения различных уровней [5,15,88,90,360-372,374,377,383,420,536].

Целый ряд исследователей, имеющих дело не столько с теоретическими аспектами, сколько с прикладными, нашли ***ОС***-концепцию весьма плодотворной для проектирования перспективных параллельных ***ВС*** на основе итеративных, систолических и нейронных структур. В настоящее время область этих исследований чрезвычайно обширна, поэтому заинтересованный читатель может ознакомиться с ней по приводимой литературе и содержащимся в ней многочисленным источникам. Целый ряд достаточно интересных исследований рассматривают применение ***ОС***-моделей для изучения молекулярных и биомолекулярных вычислений, а также вопросов теории сложности вычислений [536]. Из более прикладных аспектов общей ***ОС***-концепции остановимся лишь на некоторых.

Более прикладные аспекты ***ТОС***-*проблематики* в вычислительных науках можно классифицировать как *макроклеточные* исследования и практические разработки, когда в качестве единичного автомата ***ОС***-модели выбирается структурно существенно более сложный конечный автомат, взаимосвязанное поведение которых и определяет структурные и динамические свойства реализуемой ***ПВМ***. Мотивировкой для такого типа прикладных исследований являются такие направления как: клеточная логика, дискретные параллельные вычислительные устройства, итеративные и систолические сети, нейронные структуры, параллельные вычисления в реальное время, распознавание образов, машинная графика, обработка сигналов, клеточные и нейронные процессоры, сети транспьютеров, робототехника, распределенные экспертные системы, искусственный интел-

лект и др. В частности, на основе ***ОС-***моделей имеются практические разработки оболочек экспертных систем, экспертных систем продукционного вида с механизмами логического вывода, технологии представления знаний с использованием языкового управления, основанными на ***ОС-***моделях, имеется также целый ряд весьма интересных динамических механизмов, используемых в распознавании образов и не базирующихся на ***ОС-***моделях, однако они могут быть без каких-либо особых затруднений преобразованы и в ***ОС-***модели, при определенных условиях включая и *классические* [117,124,127,135, 139,142,145,148,158,164-168,280,281,284-290,297,343,355-358,417,536].

Отметим, что с использованием достижений микроэлектроники уже сейчас строятся вычислительные системы, содержащие десятки тысяч элементарных процессоров. Данные системы по существу представляют собой аппаратную реализацию ***ОС-***моделей. На основе таких моделей могут быть успешно описаны процессы, весьма схожие с распространением волн, их отражением и целый ряд других процессов и явлений, имеющих вполне определенный физический смысл. Следовательно, имеется возможность описывать некоторые физические процессы, предварительно не формулируя их в виде непрерывных математических моделей (*например, на уровне дифференциальных уравнений и их систем*), а непосредственно погружая их в соответствующие ***ОС-***модели с последующим их анализом на функциональном уровне. В настоящее время данный подход уже в целом ряде случаев становится конкурентноспособным относительно традиционных методов, использующих непрерывные математические модели. Это относится прежде всего к тем случаям, когда применение дифференциальных уравнений затруднительно.

Группа венгерских исследователей, возглавляемая ***Т. Легенди***, в процессе работы по *клеточным процессорам* существенно упростила и модифицировала клеточную модель ***Дж. фон Неймана*** и его последователей [124,128,169,170,175,288-291]. Дальнейшие исследования в данном направлении привели их к созданию практических реализаций вычислительной ***ОС-***модели в виде так называемых «клеточных процессоров Легенди», а затем и клеточных ***ML-***сопроцессоров для ***IBM-***совместимых ***ПК*** [171,175]. Многолетнее сотрудничество исследовательских групп ***Т. Легенди*** (*Венгрия*) и ***Р. Фольмара*** (*Германия*) способствовало созданию как работающих моделей клеточных процессоров, так и их удовлетворительной теоретической проработке, включая создание компьютерных симулирующих средств, системного и прикладного параллельного программного обеспечения. Использование ***ML-***сопроцессоров позволяет существенно повышать быстродействие при решении таких важных классов задач как: распознавание образов, обработка сигналов, управление технологическими процессами, все типы клеточных и булевых вычислений, использование некоторых типов операций с базами данных и знаний, экспертными системами и т.д. В рамках данной совместной деятельности по указанной проблематике проводился ряд известных международных ***PARCELLA-***конференций, издавались сборники научно-технических публикаций [156,165,179,308,536].

Другой весьма интересный и перспективный подход к практической реализации вычислительной ***ОС-***модели предложил ***Т. Тоффоли*** созданием серии так называемых «клеточных машин» (***CAM – C****ellular* ***A****utomata* ***M****achines*) [150-152,165,318,376]. В настоящее время последней моделью является ***CAM-8*** [165], а популярное описание ***CAM-***серии и результатов экспериментов с ними можно найти в превосходной книге [150]. Так, модель ***CAM-6*** представляет собой машину клеточных автоматов, предназначенную для экспериментального исследования относительно простых ***ОС-***моделей. Она представляет собой среду для интерактивных исследования и демонстрации ***ОС-***моделей в режиме реального времени. Физически модель ***CAM-6*** представляет собой (*подобно* ***ML-****сопроцессорам*) специальный клеточный сопроцессор для ***IBM-***совместимых ***ПК***. Последней моделью серии является ***CAM-8***, технически представляющая собой систолический массив процессоров, симулирующий параллельную архитектуру ***SIMD-***типа [6]. Она разрабо-

тана в рамках проекта ***ARPA*** в Лаборатории компьютерных наук Массачусетского технологического института и представляет собой компьютерную архитектуру, построенную на ***OC-***модели. В отличие от других современных параллельных вычислительных систем, архитектура ***CAM реально*** не зависит от размеров машины, позволяя создавать весьма большие системы простым наращиванием структурных модулей. Модель выпускается фирмой ***Step Research*** и ее подробное описание можно найти в [165]. Практическое использование модели ***CAM-8*** оказалось весьма эффективным при моделировании сложных задач гидродинамики, экологии и изучении ряда математических свойств ***OC-***моделей, обработки образов, физического моделирования, получения специальных эффектов и целого ряда др. [166,366,384,392,394,536]. Разработки в данном направлении лежат в русле ***OC-***моделирования различных процессов на ***CAM-8***, привлекая перспективных исследователей к данному модельному подходу. На сегодня в данном направлении уже наметилось достаточно тесное научно-техническое сотрудничество с такими ведущими организациями как ***U.S. Air Force, Boston University, Los Alamos National Laboratory*** и др. Серия ***CAM-***машин вывела ***TOC-***проблематику на качественно новый уникальный уровень, дополнив формальные ***OC-***модели их прямыми вычислительными аналогами. Это обстоятельство позволяет весьма существенно расширять прикладную модельную ***TOC-***проблематику по многим важным направлениям.

Именно создание ***CAM-***машин решило вопрос обеспечения *предельно* простых моделей обычных дифференциальных уравнений физики, таких как уравнение теплопроводности, волновое уравнение и уравнение Навье-Стокса, которые можно представлять себе как предельные случаи исключительно простых процессов комбинаторной динамики. ***OC-***подход обеспечивает весьма обширную и непрерывно растущую коллекцию типичных моделей, в которых погружаемые в них явления и феномены могут быть исследованы относительно удобно и легко [536].

В значительной мере дальнейшим развитием вычислительной ***OC-***архитектуры для решения задач искусственного интеллекта можно рассматривать и среду ***CAM-Brain Machine (CBM)***, созданную в ***Genobyte Inc.*** Среда представляет собой специализированные аппаратные средства, которые формируют вычислительную ***OC-***модель, базирующуюся на модулях нейронной сети, ориентировочно за ***1*** с. Это настолько быстро, что с этого момента в ней будет практически возможно формировать *искусственные* умственные способности, ассемблируя десятки тысяч таких быстро развивающихся модулей в человеко-подобные искусственные умственные способности. Эти модули загружаются в ***1 GB*** оперативной памяти ***(ОП)*** и ***CBM*** сможет модифицировать ячейки ***3-***мерных ***OC-***моделей в ***ОП*** со скоростью ***150*** млрд/сек, модифицируя искусственный мозг, состоящий из ***32000*** модулей ***(40*** *миллионов нейронов****)*** со скоростью ***300*** раз/сек, достаточно быстро для симулирования в реальном времени простейших актов поведения. Вот лишь некоторые технические характеристики ***CBM:***

скорость обновления OC-модели – 114 - 152 млн. ячеек/сек
число ячеек OC-модели – 453 млн.
число поддерживаемых нейронов (на «мозг») – 37.748.736
вычислительная мощность ≈10.000 Pentium II 400 MHz

Предполагается, что обнадеживающие результаты, полученные на ***CBM***, вполне можно рассматривать как достаточно перспективное направление в попытках создания искусственного мозга и, в целом, как модель для решения задач искусственного интеллекта.

В качестве интересной параллельной вычислительной системы можно отметить и кластер из ***1000*** процессоров ***Pentium II***, используемый *Genetic Programming Inc.* для решения важных задач клеточных автоматов ***(OC-***моделей***)***, автоматического синтеза аналоговых электрических сетей и контроллеров, вычислительной молекулярной биологии, иссле-

дования операций и др. Программное обеспечение для решения указанных задач базируется на генетическом программировании [536].

Итальянскими исследователями из института системного анализа и информационной технологии ***(ISI – CNR)*** была создана эффективная вычислительная среда ***CAMEL (C****ellular* ***A****utomata environ****M****ent for sys****T****ems mode****L****ing)***,** базирующаяся на ***OC-***модели и реализованная на многомашинной транспьютерной архитектуре [427,428]. Среда ***CAMEL*** предназначена для обеспечения высокоэффективных приложений в науке**,** технике и технологиях. Она предоставляет пользователю вычислительную мощь высокопараллельного компьютера, скрывая от пользователя проблемы, связанные с ее архитектурой. Система может использоваться и как инструмент для моделирования динамических сложных явлений, и как вычислительная модель для параллельной обработки**.** ***CAMEL*** обеспечивает интерфейс**,** позволяющий пользователю в процессе выполнения приложения *динамически* изменять параметры**,** а также графический интерфейс для отображения результатов вычислений. При этом, архитектура ***CAMEL*** пригодна для реализации на нескольких компьютерах с распределенной памятью таких, как ***Intel iPSC***, the ***Ncube***, the ***CRAY T3D*** и ***Connection Machine 5***. Система обеспечена высокоуровневым языком программирования ***CARPET (C****ellul****AR*** ***P****rogramming* ***E****nvironmen****T)***,** базирующимся на ***C-***языке с некоторыми дополнительными конструкциями для описания локальных функций перехода единичного автомата клеточной среды. Результаты, полученные в рамках применения указанных средств, показали**,** что они могут успешно использоваться как для моделирования реальных систем во многих приложениях**,** так и для получения высокой производительности**,** требующейся для выполнения целого ряда вычислений**.** Детальнее с архитектурой системы и ее программным обеспечением можно ознакомиться в [427,428]. В определенной мере представляет интерес и ***OC-***подобная машина ***CEPRA-8***. В определенном отношении к ***CAMEL*** примыкает среда моделирования и библиотека для исследования ***OC-***моделей ***CAME&L (C****ellular* ***A****utomata* ***M****odeling* ***E****nvironment* ***&L****ibrary)***,** а в более общем контексте набор средств для распределенных и параллельных вычислений [536].

Из программного обеспечения, ориентированного не только на сугубо параллельную обработку, можно отметить и программу ***gridMathematica*** фирмы *Wolfram Research***,** которая может выполняться в любой компьютерной сети, работающей под управлением ***Unix, Linux, Windows*** и ***Mac OS X***, требуя лишь протокол связи ***TCP/IP*** между машинами. При этом, преимущество программы ***gridMathematica*** не ограничивается простым увеличением числа используемых компьютеров**;** ***gridMathematica*** поддерживает все известные *концепции* параллельных вычислений такие как виртуально совместно используемая или распределенная память, автоматическое или явное распределение и параллелизм, включая синхронизацию, блокирование и скрытие времени ожидания. Другие функции включают машинно-независимое выполнение и параллельное программирование, а также восстановление после отказа и автоматическое перенаправление взаимосвязанных процессов в случае системной ошибки. Успешно применяется данное средство и для симуляции с высокой реактивностью классических ***OC-***моделей [536].

Как уже отмечалось выше, архитектура ***OC-***моделей привлекательна из-за их высокого параллелизма, простых вычислительных структур и локальных ресурсов маршрутизации. В этой связи ряд авторов рассматривали ***OC-***модели в качестве универсальных вычислителей, эквивалентных универсальной машине Тьюринга. Так, ***программируемые пользователем вентильные матрицы (ППВМ)*** могут обеспечивать программируемую, максимально параллельную реализацию относительно небольших ***OC-***моделей. Для больших требуются многократные ***ППВМ*** и/или рост времени мультиплексирования. Некоторые исследователи использовали генетические алгоритмы для определения ***OC-***моделей, выполняющих полезные вычисления. Между тем, существенно параллельная ***OC-***модель так же как и генетический алгоритм плохо приспособлены для реализации

на универсальных микропроцессорных системах. В этой связи была предложена модель ***ППВМ***, обеспечивающая существенное повышение быстродействия. В [540] представлены ***ППВМ*** и ее приложение к эффективному поиску гибридных ***ОС***-моделей с ***ШС*** размера **5** и **2** состояниями, обладающих свойством универсальной вычислимости. Гибридность обусловлена дополнительными ресурсами триггерной памяти. Обсуждается применение их к задачам обработки изображений и анализа бинарных текстур.

Интересной представляется и вычислительная ***ОС***-модель, реализованная фирмой ***Cell Matrix Corp.*** и представляющая собой регулярную матрицу, клетки которой – физически простые, идентичные мелкозернистые ячейки. Каждая клетка модели связана только со своими ближайшими соседями. Эффект от такой организации несомненен: аппаратные средства модели имеют весьма простую конструкцию, недороги и высокотехнологичны в производстве, а также гибки относительно используемых материалов. Архитектура модели обеспечивает ошибкоустойчивость и относительно производственных дефектов, и при повреждениях в процессе функционирования [536].

В настоящее время растет интерес к построению последовательностей, реализованных отличными от традиционных методами, но достаточно хорошо приспособленными для конкретных прикладных задач. В данной связи представляет определенный интерес использование однородных структур для генерации псевдослучайных последовательностей. При этом, здесь рассматриваются и ***ОС***-модели, чья геометрия может базироваться не на прямоугольных целочисленных решетках в Z^2, а на треугольных либо даже мозаичного типа. Для исследования динамики таких структур широко используется структурно-графовый подход на основе матриц инциденций гиперграфов [536].

В связи с успехами *микроэлектроники* ряд авторов уже сейчас предлагают практические подходы к реализации перспективных сверхбольших интегральных схем на основе концепции ***ОС***-моделей [371,377], которые могут быть разработаны в ближайшее время. В связи с развитием технологии интегральных схем (*где сама специфика производства такова, что там удобно создавать устройства итеративной архитектуры*) интерес к ***ТОС***-проблематике постоянно растет. *Клеточная* логика имеет дело с математическими моделями и техникой для анализа и синтеза цифровых сетей на основе вычислительных ***ОС***-моделей, но из-за обширности данной тематики ее рассмотрение выходит за рамки книги, а заинтересованный читатель отсылается к соответствующей литературе. Предлагаются методологии организации вычислений на ***2-ОС*** с реализацией всех базовых и массовых операций. Тестирование проводится посредством специальных имитационных систем. К вычислительным ***ОС***-моделям довольно тесно примыкают и вычислительные структутуры на ***систолических*** принципах функционирования, характеризуемых однородностью вычислительных ячеек, регулярностью и локальностью информационных связей. В настоящее время исследования в области практической реализации систолических процессоров ведутся достаточно широко и полученные прикладные результаты по ***ОС***-моделям, прежде всего, алгоритмического характера могут оказаться достаточно полезными и для систолических вычислений [536].

С развитием *наноэлектроники* растет интерес к одному из перспективных направлений современной кибернетики – ***ОС***-моделям. Когда сейчас говорят о процессорах, то первая характеристика, которая называется – это тактовая частота. Ведущий мировой производитель процессоров корпорация ***Intel*** довольно быстро сумела убедить человечество, что самое главное в процессоре – это тактовая частота, хотя в реальности это и не совсем так. За тактовую частоту процессора отвечает маленький кварцевый генератор, задающий ритм всему происходящему в компьютере. Однако, эти «*часы*» совсем не обязательны для работы всех цифровых устройств, а ряд специалистов даже считают, что со временем интегральные схемы, работа которых регулируется тактовыми генераторами, уступят место асинхронным схемам, в которых нет внутренних «*часов*». Действительно,

при одновременном росте сложности схем и скорости вычислений согласованность всех процессов с помощью *единых* тактовых импульсов становится слишком сложной и энергетически неэффективной. Но хуже всего то, что в синхронных схемах ***общая*** производительность определяется производительностью *самой* медленной компоненты, и иногда такой компонентой являются сами «*часы*». Поэтому сейчас в лабораториях ряда компаний идут эксперименты с процессорами, не имеющими никакой тактовой частоты. К ним относятся процессоры, построенные на базе асинхронных схем без тактового генератора, или процессоры, отдельные компоненты которых могут иметь внутренние «часы», однако соединены они вместе с помощью асинхронных цепей. В этом направлении японские исследователи [536] предложили концепцию асинхронного нанокомпьютера на основе ***OC***-модели, основу которого составляют квадратные ячейки, хранящие четыре бита (*по одному на каждую сторону*) и ***9*** простых правил, управляющих взаимодействиями между ячейками. С помощью этого набора можно выполнять логико-арифметические операции и организовывать циклы обработки. Была продемонстрирована принципиальная работоспособность компьютера данной конструкции, чья эффективность зависит не от аппаратной части, а от качественного программного обеспечения. Результаты, полученные в данном направлении, представляются достаточно перспективными.

Проблемы, возникающие при переходе к нанокомпьютеру	***Решение данных проблем на основе вычислительных OC-моделей***
С переходом к вычислительным элементам нанометровых размеров весьма существенно возрастает количество сложно реализуемых соединений	Все элементарные ячейки нанокомпьютера на базе ***OC***-модели непосредственно прилегают друг к другу, не требуя довольно сложных дополнительных соединений
Невозможность синхронизации работы отдельных элементов микросхемы (*ибо в наноизмерении становится существенным расстояние от синхронизатора до элемента*). Традиционная архитектура не учитывает вероятностный характер квантовых явлений. Традиционные компьютеры чувствительны к задержкам сигналов и другим помехам	Все ячейки ***OC***-нанокомпьютера работают независимо друг от друга, следовательно, у них отсутствует необходимость в устройствах *внешней* синхронизации; они также могут работать в условиях задержки сигнала и других помех, носящих явно выраженный квантовый характер
Неудобство сборки устройств, содержащих триллионы наноэлементов, неудобная технологичность проектирования и производства компьютеров с неоднородной архитектурой (*элементы* ***ИС*** *существенно различаются между собой*)	Самосборка позволяет создавать огромные массивы однородных наноструктур с обеспечением высокой технологичности при их физической реализации в качестве ***OC***-компьютера
При *повышении* плотности вычислений мы имеем дело с ростом выделения тепла, связанным с тем, что при *обычных* вычислениях увеличивается энтропия (*процессор быстро нагревается*). Поэтому невозможно создавать сверхплотные трехмерные схемы	Вычисления в ***OC***-моделях не ведут к существенному повышению энтропии, поскольку ***OC***-модели могут обеспечивать вычисления без потери информации, т.е. использовать обратимые вычисления
Высокая дефектность производства ***ИС***, неизбежная при сборке их на наноуровне из огромного количества соединений	Поскольку ***OC***-процессор состоит из однородных элементов, то дефекты элементарных ячеек в нем не ведут к критическим ситуациям в его работе. Вышедшая из строя ячейка просто не участвует в вычислениях, не влияя на работоспособность ее соседей

Ограниченная гибкость традиционных логических схем, чьи функции во многом определены их аппаратной реализацией	Функции, выполняемые ***ОС-***процессором, полностью определяются его программной средой. Практически, достаточно простым программированием можно наделить его и любыми функциями по обработке информации и обеспечения вычислений
Традиционные схемы при своей работе излучают электромагнитные волны в радиочастотном диапазоне; следовательно их несложно выявить, сканировать и легко поразить электромагнитным импульсом	В отличие от традиционных схем ***ОС-***модели не нуждаются в тактовом генераторе, на которой они работают. Каждая ячейка сама решает, когда ей работать, на основе лишь своего состояния и состояний своих непосредственных соседей. Поэтому, мелкие разнонаправленные импульсы излучения, возникающие при работе отдельных ячеек ***ОС***, практически, нивелируются. Следовательно, в результате излучение такой системы подобно не сигналу радиопередатчика, как в случае обычного компьютера, а скорее напоминает электроэнцефаллограмму мозга

Как правило, ***нанокомпьютеры,*** использующие ***ОС-***концепцию, базируются на ***2-*** либо ***3-***мерных ***ОС-***моделях. Кратко остановимся на проблемах, возникающих при переходе от традиционных сегодняшних компьютеров к нанокомпьютерам и каким образом их решению может способствовать использование вычислительных ***ОС-***моделей, которым в последнее время уделяется повышенное внимание. Выше ради удобства восприятия в табличной форме представлена *сводка* ряда основных соображений в данном направлении, которая, нося субъективный характер, в целом представляется нам полезной [536].

Рассмотрим принципиально неразрешимые технологические проблемы производства компьютеров. При экспоненциальном росте числа интегрированных транзисторов размеры единичного транзистора и ширина контактных дорожек также должны уменьшаться экспоненциально, чтобы обеспечить размещение всех транзисторов на небольшом участке, отведенном под процессор. Так как атом является наименьшей частицей, которая сохраняет свойства химического элемента, ширина контактной дорожки не может быть меньше размера атома. Опираясь на закон ***Мура*** можно рассчитать, что примерно к ***2050*** г. ее ширина совпадет по размеру с единичным атомом и дальнейшее уменьшение с более плотной упаковкой транзисторов в рамках технологии ***CMOS*** станет просто невозможным. Однако оказывается, что предел теоретически возможной миниатюризации ширины дорожки в рамках технологии ***CMOS*** гораздо ближе и рассчитывается, исходя из других принципов, в частности, связанных с большим выделением тепла.

В настоящее время главной причиной выделения тепла является несовершенство материалов. Тем не менее опыт последних тридцати лет показал, что за счет использования новых материалов удавалось поддерживать экспоненциальный рост производительности компьютеров, однако проблема существенного уменьшения тепловыделения заключается не в несовершенстве материалов, а в так называемом ***принципе Ландауэра,*** основывающимся на принципе *неубывания энтропии* замкнутой системы, которой в данном случае выступает система компьютера и источника питания. Принцип ***Ландауэра*** гласит, что независимо от физики и технологии вычислительного процесса при потере ***1*** бита информации в процессе вычисления выделяется определенная энергия, вполне доступная оценке. Данная энергия настолько мала, что кажется несущественной. Однако даже поверхностный анализ объема энергии, выделяемой в связи с потерей информации, показывает, что в рамках современной технологии просто отбрасывать или спи-

сывать на погрешность измерений ее уже нельзя. При срабатывании каждый транзистор теряет ***1*** бит информации, а выделяемая им при этом энергия оказывается примерно в пятьсот раз больше установленного ***Ландауэром*** минимума. Проведенные оценки, связанные с потерей информации, дают тепловыделение порядка ***0.147*** вт, что само по себе, естественно, не критично, однако в связи с вышеупомянутым законом Мура настораживает. Итак, обеспечить необходимое охлаждение принципиально невозможно, а значит, развиваться технологии ***CMOS*** осталось недолго. В научном же смысле она уже изжила себя. ***Какие же существуют альтернативные способы организации вычислений и технологии создания перспективных вычислительных устройств?***

Рассмотрим подход к организации самого процесса вычислений. Здесь для достижения высокой производительности следует выполнять вычисления без потери информации, т.е. вычисления должны быть *обратимыми*. ***Ч. Беннет*** показал, что нулевая потеря энергии возможна только при использовании обратимых вычислительных блоков. ***Обратимый*** блок позволяет точно восстановить входные данные по выходным данным. Работы в этом направлении ведутся достаточно интенсивно, хотя здесь и существуют довольно сложные технические проблемы. И здесь в качестве вычислительных моделей представляют особый интерес ***обратимые ОС***, исследуемые достаточно интенсивно не только в контексте физического моделирования, но и обратимых вычислений [376,378,430,536].

Некоторые из логических вентилей, достаточных для создания универсального компьютера (*например*, ***XOR***), необратимы. По этой причине до ***1970-***х полагалось, что универсальное вычисление должно быть необратимым. Однако в ***1970-***х работами ***Беннетта, Марголуса, Тоффоли, Фредкина*** и др., было доказано, что универсальные компьютеры могут быть обратимыми и тогда же были предложены обратимые логические вентили, пригодные для создания универсального компьютера [536]. Как известно, вычислительный процесс в общем случае носит ***необратимый*** характер, т.е. по конечному результату в общем случае невозможно однозначно восстанавливать промежуточные, тем более начальные (*исходные*) данные. Вместе с тем, обратимые вычислительные ***ОС-***модели дают принципиальную возможность построения полностью обратимых (*в указанном смысле*) компьютеров и организации обратимых вычислений. В настоящее время уже предложен ряд интересных обратимых вычислительных ***ОС-***моделей, базирующихся на хорошо известных физических принципах [150,360,366,384,388,536]. Данное обстоятельство позволяет пересмотреть ряд традиционных положений классической теории вычислений, подводя под нее достаточно серьезный физический фундамент, т.е. увязать физические и вычислительные процессы в рамках единой концепции мира.

Внедрение микросотовых сетей предполагает потенциальное увеличение емкости сотовых сетей, однако здесь возникают проблемы управления такими сетями. Один из подходов к решению этих проблем состоит в использовании ***самоорганизующихся*** алгоритмов назначения каналов с распределенным управлением. Иранские специалисты предложили подход на основе ***ОС-***концепции [536]. С этой целью они определили обучающиеся ***ОС-***модели (***ООС***), в основе которых лежит использование обучающихся автоматов для настройки вероятностей переходов состояний ***ОС-***моделей. На основе ***ООС*** был предложен самоорганизующийся алгоритм назначения каналов сетей. Предложенный алгоритм уменьшает время, необходимое алгоритмам, использующим полный перебор для нахождения *оптимального* решения фиксированного назначения каналов. Экспериментальное компьютерное симулирование таких моделей вполне убедительно подтвердило, что сотовая сеть может самоорганизовывать назначение каналов в процессе своего функционирования, используя достаточно простой алгоритм.

Из последних разработок, использующих ***ОС-***технологию, следует отметить создание в университете Нотр-Дама первого «бестранзисторного» чипа, который рассматривается в качестве прототипа процессоров будущего. Как сообщает *Wired News*, вместо полупро-

водниковых элементов логические операции в нем выполняют наномагниты, а сам процессор устроен по принципу ***ОС***-модели; при этом, для практической реализации данной ***ОС***-модели предлагается использовать системы квантовых точек [536].

В рамках создания перспективных вычислительных архитектур имеется несколько направлений, в которых возможно рождение и новой логики – это, прежде всего, *квантовые вычисления*, подходы на основе *биологических* принципов и ***ОС***-модели. По мнению ряда ведущих специалистов-практиков реалистичность перспектив *первого* направления рассматривается довольно скептически – за прошедшие ***5*** лет появилось множество публикаций по «*квантовым вычислениям*», но ***90%*** из них – теоретические. В большей степени полагаются на биологические подходы; при этом, данное направление может придать особую значимость междисциплинарной связи между инженерами и нейроспециалистами. Наконец, другой перспективный подход к реализации некоторых компьютерных функций – ***ОС***-модели, суть которых состоит во взаимодействии наномасштабных элементов (*электростатически связанных квантовых точек или связанных наномагнитов*) в регулярной большой решетке. Потенциал данного направления видится, прежде всего, в специальном приложении, таком как распознавание образов [536].

Существенный интерес в плане реализации вычислительных ***ОС***-моделей представляет т.н. ансамблевый ***ЯМР*** квантовый клеточный автомат. Первые прототипы ***ЯМР*** квантовых компьютеров были реализованы в ***1997*** (*см.* ***Jones J.*** [536]). Главным преимуществом такого компьютера является то, что практически независимые молекулы жидкости, благодаря усреднению в результате интенсивного броуновского движения молекул меж- и внутримолекулярных диполь-дипольных магнитных взаимодействий, действуют независимо, обеспечивая возможность управления ими и измерение их состояний посредством известных в технике *ядерного магнитного резонанса* (***ЯМР***) операций над макроскопическим объемом жидкости. Индивидуальное обращение к отдельным кубитам заменяется здесь одновременным обращением к соответствующим кубитам во всех молекулах ансамбля. Компьютер такого типа и получил название ***ансамблевого ЯМР квантового компьютера.*** Примечательно то, что он в принципе работает при комнатной температуре. В области ***ЯМР*** квантовых компьютеров на органических жидкостях к настоящему времени достигнуты наибольшие успехи. Экспериментально на таких компьютерах был осуществлен целый ряд сложных алгоритмов. Между тем, компьютеры такого типа имеют и ряд существенных органичений [536]. Вследствие этого было обращено внимание на ансамблевый твердотельный квантовый компьютер, работающий по принципу ***ОС***-модели. Основные принципы такого компьютера рассматривались в целом ряде работ [536]. Так ***S. Lloyd*** [536] рассмотрел систему из двухуровневых квантовых элементов, которыми могут быть и ядерные спины с ***I=1/2***, имеющую периодическую структуру типа цепочки ***ABCABCABC...***, где ***A,B,C*** – три различных типа ядерных спина с различающимися резонансными частотами. Предполагается, что атомы с ядерными спинами имплантированы в кристаллическую решетку некоторого бесспинового твердого тела. Более того, предполагается также, что такая система ядерных спинов может быть инициализирована, т.е. переведена каким-либо способом в начальное основное состояние – ***0.*** При этом, спины располагаются на таком расстоянии друг от друга, которое обеспечивает наличие определенного взаимодействия между соседними спинами и, как следствие, зависимость резонансной частоты каждого спина от состояния его соседних спинов. В деталях с организацией такого квантового компьютера можно ознакомиться в [536].

Между тем, уже в такой простой системе с помощью только соответствующей последовательности импульсов можно выполнить любую цифровую и квантовую логическую операцию. В этом смысле такой квантовый компьютер является ***универсальным.*** Более общая модель твердотельного ансамблевого ***ЯМР*** квантового клеточного автомата была описана в работе ***Wei H.*** и др. [536], где рассматривалась периодическая структура типа

ABCABCABC... в двух- и трехмерных структурах с ядерными спинами трех различных типов. ***С. Бенжамин*** [536] показал, что для построения квантового компьютера, функционирующего по принципу ***ОС***-модели, вполне достаточно только двух разных типов ***2***-уровневых элементов – физических кубитов ***А*** и ***В***, в частности, ядерных спинов, отличающихся резонансными частотами. Показано, что *легирование* примесями трехмерной сверхрешетки из ядерныk спинов позволяет создать твердотельные квантовые автоматы с высокой интеграцией, в которых весь кристалл будет представлять собой большой ансамбль идентичных параллельно работающих квантовых компьютеров. Из упомянутых вариантов квантовых ***ОС***-компьютеров основным технологическим процессом является выращивание соответствующих кристаллических структур. Роль нанотехнологии сводится к минимуму, например, для создания только затворов над атомами, играющими роль портов, или для имплантации атомов с отличающейся ядерной резонансной частотой, служащих для ансамблевого ввода и вывода информации.

В работах ***А.А. Кокина*** [536] были достаточно детально исследованы физические основы и проблемы реализации твердотельных ***ЯМР*** квантовых компьютеров, базирующихся на ***ОС***-концепции. Определены преимущества ансамблевого квантового клеточного автомата по сравнению с ансамблевым вариантом с полосковыми затворами, а именно:

– отсутствие системы управляющих затворов весьма существенно упрощает технологию изготовления структуры компьютера и исключает один из связанных с ними существенных источников декогерентизации;

– кодирование логических кубитов на четырех физических кубитов обеспечивает и более высокую степень помехозащищенности проводимых логических операций.

– переход к схеме квантовых клеточных автоматов ***(ОС)*** позволяет решить четвертую и пятую проблемы схемы ***Кейна*** [536].

Между тем, к недостаткам можно отнести сравнительно сложную организацию логических операций над логическими кубитами. Из проведенного анализа следует [536], что вариант *твердотельного* ***ЯМР*** ансамблевого квантового компьютера с двухмерным электронным газом требует использования высокоточной нанотехнологии (*квантовые ямы и системы полосковых затворов*), тогда как варианты на естественных кристаллах предполагают использование слишком больших градиентовы магнитного поля. Таким образом, более перспективным представляется направление по разработке ансамблевых твердотельных ***ЯМР*** квантовых компьютеров с использованием принципов квантовых ***ОС***-моделей, которое потенциально допускает отказ от создания регулярных наноструктур в виде цепочки затворов, что представляется достаточно существенным моментом.

Идея квантового компьютера восходит к работам ***R. Feynman***, в которых он рассмотрел вычислительный процесс как физик [536]. Он показал, что сделав вычисления ***обратимыми***, можно создавать вычислительную технику (*на современном языке*) на уровне нанотехнологий, когда квантовые эффекты играют весьма существенную роль и связано это, прежде всего, с ростом энтропии для необратимых вычислений. В середине ***80-х*** появились работы ***D. Deutsch, E. Bernstein, U. Vazirani*** и ***A. Yao***, в которых были описаны формальные модели квантового компьютера. Затем ***P. Shor*** в ***1994*** [536] создал первый квантовый алгоритм факторизации, что породило массу работ в этом направлении по той причине, что разложения целых чисел на множители используется, в частности, для дешифровки. Все такого рода известные алгоритмы для обычного компьютера требуют экспоненциального роста вреененных затрат (*экспонента от числа знаков факторизуемого числа*), тогда как на квантовом компьютере данная задача имеет всего лишь кубическую сложность. Таким образом, такое новое направление, как «*квантовые вычисления*» в настоящее время привлекает самое пристальное внимание и ***ОС***-модели в данном контексте благодаря их особенностям (*универсальность, обратимость, локальность, параллелизм и*

др.) могут, как вкратце было показано выше, сыграть весьма существенную роль. Например, в качестве моделей квантовых клеточных процессоров и нанопроцессоров [536].

В ***2007*** г. группа исследователей фирмы ***IBM*** разработала способ манипулирования магнитными свойствами отдельных атомов, что может привести к созданию в ближайшем будущем сверхъемких модулей памяти микропроцессоров с архитектурой, совершенно другой, чем у современных кремниевых. Основа данной методики – спектроскопия «*переключения спинов*» – была ими заложена в ***2004.*** Тогда впервые появилась возможность исследовать атомы в качестве «*элементарных магнитов*». Разработчики преследуют цель целенаправленно «*переключать*» магнитный момент у как можно меньшей группы атомов. И именно в русле данных исследований совсем недавно был создан прототип «*магнитного процессора*», который устроен по принципу ***ОС***-модели [536].

В заключении настоящего раздела кратко резюмируем основные практические выходы теоретических результатов по ***ТОС***-проблематике, рассмотренных в предыдущих главах книги. Прежде всего, ***проблема неконструируемости (глава 2)*** вполне естественным образом увязывается с вопросом о возможности погружения в вычислительную ***ОС***-*модель* того или иного *параллельного алгоритма* ***(ПА)*** и возможностям параллельного программного обеспечения в перспективных параллельных ***ВС*** на ее основе. Сюда же относится и проблема исследования алгоритмов, наилучшим образом приспособленных для погружения в ***ОС***-модели. В этой связи нами был определен класс так называемых *локально реализуемых алгоритмов* ***(ЛРА)***, основной характерной чертой которых является *именно* возможность представления алгоритма посредством локальных идентичных алгоритмов над отдельными подсловами каждого перерабатываемого слова. Весьма типичным примером алгоритмов такого класса являются алгоритмы символьной сортировки. Имеются попытки интерпретации результатов по неконструируемости для случая нейроноподобных сетей и ряда других типов ***ОС***-моделей [269]. Тогда как результаты по ***воспроизводимости (глава 3)*** и *сложности* конечных ***КФ (глава 4)*** могут оказаться достаточно полезными при исследовании проблем самовосстановления и надежности в ***ОС***-подобных вычислительных системах, а также сложности вычислений [54,88,90,536].

Ряд исследователей показал, что подходящим выбором ***А***-алфавита, области определения ***ГФП*** и некоторых дополнительных процедур погружения ***ПА*** в вычислительную ***ОС***-модель, соответствующие классические ***ОС***-модели могут рассматриваться как алгоритмы, определяемые *клеточными процессорами*. Учитывая высокие требования по уровню распараллеливания, для эффективного практического использования вычислительных ***ОС***-моделей необходимо прежде всего систематизировать уже имеющиеся, в основном, эвристические методы распараллеливания в ***d-ОС***. Существующие на сегодня методы можно разбить на три больших класса [11,15]: волновой, фильтрации и метод частиц. Все эти прикладные методы имеют одну общую черту, отражающую формализм ***ПА***, определяемых ***ОС***-моделями, а именно: на каждом шаге преобразованию подвергается вся глобальная конфигурация ***ОС***-модели и концом обработки *(вычисления)* полагается появление *пассивной конфигурации* ***(ПКФ)***. Для практической идентификации перехода в глобальное состояние ***ПКФ*** предложен ряд интересных подходов [3]. Таким образом, раздел ***ТОС***-проблематики, занимающийся ***ПА***, имеет непосредственный практический выход, который не ограничивается только ***ВС***, базирующимися на ***ОС***-моделях.

Результаты по формальным *параллельным* τ_n-грамматикам ***(глава 5)***, определяемым ***ОС***-моделями, показывают, что *традиционный* подход к разработке языков программирования для высокопараллельных ***ВС*** не позволяет создать действительно эффективное параллельное программное обеспечение, *максимально* использующее высокую степень распараллеливания, допускаемую вычислительными ***ОС***-моделями. В этой связи параллельные грамматики, определяемые ***ОС***-моделями, могут оказаться достаточно удобной математической основой как для семантического представления языков микропрограм-

мирования параллельных *микропрограммируемых* **ВС**, так и для описания многих видов клеточных систем. Так уже имеются примеры прямого применения теоретических результатов исследования *параллельных* формальных грамматик к синтезу параллельных микропрограммных структур [173]. Примерами таких структур являются матричные, клеточные, ассоциативные и конвейерные процессоры и ряд других вычислительных структур, представляющих несомненный интерес для разработки архитектур перспективных параллельных **ВС** и их программного обеспечения [8,9,354-358,536].

Результаты исследования по проблеме декомпозиции **ГФП** в классических **ОС**-моделях ***(глава 7)*** представляют непосредственный прикладной интерес, связанный с реализацией перспективных архитектур **ВС** на основе как классических, так и недетерминированных вычислительных **ОС**-моделей. С моделированием ***(глава 6)*** тесно связана проблема надежности, играющая важную роль в практических реализациях параллельных вычислительных устройств на основе **ОС**-моделей. В связи с этим предлагается ряд принципов и алгоритмов самовосстановления в **ОС**-моделях, которые могут быть полезны для практического конструирования в **ОВС**. Наряду с этим на основе **Т**-моделирования исследуется достаточно широкий класс вопросов, среди которых можно выделить следующие: универсальная вычислимость и параллельные алгоритмы, классы параллелизма, выбор наиболее эффективных для реализации в **ОС**-моделях алгоритмов и ряд других. В частности, устанавливается класс *далеких от оптимальных* последовательных алгоритмов, которые оказываются наиболее эффективными при погружении их в **ОС**-модели. Подобные проработки позволяют *по-новому* взглянуть на традиционные вычислительные методы в условиях использования параллельного принципа вычислений. В частности, целый ряд простых вычислительных алгоритмов, неэффективных для реализации на традиционных вычислительных моделях последовательного действия, оказался высокоэффективным во временном отношении для реализации их в среде вычислительных **ОС**-моделей, что требует особого акцента на данном вопросе [536].

Наконец, отдельные более прикладные задачи в рамках **ТОС**-проблематики также представляют определенный интерес для практических реализаций систем управления в вычислительных **ОС**-моделях. К ним можно в полной мере отнести, например, такие задачи как синхронизация сети автоматов [196], Французского флага (пункт ***8.2.4)*** и ограниченного роста (пункт ***8.2.3)***, отражающие специфические черты проблемы синхронизации параллельных управляющих процессов и позволяющие разрабатывать быстрые параллельные алгоритмы синхронизации для тех или иных приложений в управляющих структурах высокопараллельных **ВС**, базирующихся на общей **ОС**-концепции. Из сугубо утилитарных приложений можно отметить возможности успешного использования **ОС**-подхода в качестве аппарата решения задач температурного мониторинга при проработке вопросов расчета и проектирования программных и аппаратных средств [536].

В настоящее время даже специалисты не могут предсказать с достаточной долей уверенности возможности **ВС** новых поколений и результаты их влияния на нашу жизнь. Так, например, весьма интенсивно обсуждаются новые возможности на стыке кибернетики и биологии, с помощью которых будут созданы компьютеры последующих поколений. Сегодня все более активно проводятся многоаспектные работы по фундаментальным и прикладным проблемам создания молекулярных ЭВМ, искусственных органических систем, которые будут обладать способностью к самовоспроизведению. Еще в процессе исследования прикладных аспектов **ТОС**-проблематики в теоретической и математической биологиях [1,3-5,46] в ряде случаев нами была установлена весьма тесная аналогия между механизмами, лежащими в основе биологических процессов развития, и процессами обработки и управления в высокопараллельных **ВС**, базирующихся на **ОС**-концепции. Более того, подобно аналогии механизмов самовоспроизведения абстрактного автомата и реальных биологических клеток, установленной ***Дж. фон Нейманом***, была об-

наружена интересная аналогия между функционированием формальной модели ***ОВС*** в режиме *информационного распараллеливания*, реализованной на основе ***ОС***-концепции, и реальными биологическими клеточными системами переработки информации [3,11-12,15,88,90,536].

Наряду с этим большой интерес представляет изучение принципов управления в подобных вычислительных ***ОС***-моделях с точки зрения общей теории систем. Эти предпосылки позволяют навести своего рода ***мосты*** между биологическими и вычислительными науками, что открывает широкие возможности для взаимного обогащения и развития в обоих приоритетных на сегодня науках. На наш взгляд, данная связь будет и далее неуклонно расширяться и с течением времени может принести даже большую пользу вычислительным наукам, чем наоборот. Последующее развитие перспективной *параллельной* вычислительной техники будет, по-видимому, идти под знаком все более тесных аналогий с *биологическими* клеточными системами, вплоть до непосредственного использования отдельных биологических элементов ***(биочипов)*** и принципов их функционирования и организации, весьма разумно спроектированных самой природой. Таким образом, концепция ***ОС***-модели имеет все предпосылки для того, чтобы сыграть достаточно существенную роль в деле объединения столь различных на сегодня научных областей.

И в заключении раздела кратко остановимся на сегодняшнем соотношении между фундаментальными результатами по ***ТОС***-проблематике и их *прикладными* аспектами в вычислительных науках. Складывающееся мнение о слабой применимости многих теоретических результатов по ***ТОС***-проблематике в приложениях базируется на следующем ошибочном предположении. Сложность структурной *реализации* современной технологией вычислительных ***ОС***-моделей с очень большим числом единичных автоматов приводит к тому, что практические реализации ограничены относительно небольшим числом единичных автоматов, т.е. мы имеем дело с конечным клеточным автоматом, который принципиально отличен от *классической* ***ОС***-модели. Такая организация позволяет значительно упростить как реализацию средствами современной технологии, так и сам *процесс* управления параллельными вычислениями. Естественно, что степени распараллеливания вычислений и управления в таких конечных ***ОС***-моделях довольно далеки от максимально возможных и для них пока не имеют особого смысла основные фундаментальные результаты математической теории однородных структур.

Однако при дальнейшем развитии технологии и расширении ненеймановского подхода к вычислениям вполне естественным является переход к вычислительным ***ОС***-моделям, содержащим огромное число относительно простых единичных автоматов. Упрощение единичных автоматов позволяет использовать и более низкий уровень описания алгоритмов, что в свою очередь повышает допустимый уровень распараллеливания задач, решаемых на основе вычислительных ***ОС***-моделей; тогда как большое число единичных автоматов допускает эффективную реализацию в таких моделях и более сложных задач распараллеливания. Вместе с тем рост числа *единичных* автоматов ***ОС***-моделей значительно *расширяет* возможность использования и удовлетворительной интерпретации даже весьма абстрактных результатов математической теории ***ОС***. Однако далеко не все задачи целесообразно решать на ***ВС***,базирующихся на вычислительных ***ОС***-моделях. По нашему мнению, задачи, эффективно решаемые на такого типа ***ВС***, составят довольно узкий класс из всего множества задач, охваченных компьютерной обработкой, ибо имеет место весьма широкий спектр уровней распараллеливания, допускаемых всем многообразием решаемых на ЭВМ задач. Более подробное обсуждение данного вопроса можно найти в [5,11,12,15,53-56,88,90,160,263,308,354-358,365,372,374,383,394,536].

Еще одним аспектом, который весьма важен со многих точек зрения, но не столь очевиден на первый взгляд, является то *влияние*, которое оказывают теоретические исследования по ***ОС***-концепции на формирование параллельного подхода к обработке информа-

ции и вычислениям, а в самом общем виде и на процесс формирования параллельного образа мышления. Наряду с отмеченными существует и целый ряд других прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики в вычислительных науках. Однако ввиду их обилия и разноплановости в рамках настоящей книги нам не представляется возможным даже краткое их рассмотрение. Заинтересованный читатель может ознакомиться с ними в приводимой ниже достаточно обширной библиографии и содержащихся в ней многочисленных ссылках на соответствующие данной проблематике оригинальные работы.

8.4. Некоторые другие области приложений однородных структур

Возрастающее доминирование компьютеров привело к новому взгляду на мир. Данный взгляд позволяет рассматривать природу как одну из форм вычислений, т.е. мы можем обрабатывать объекты как простые компьютеры, каждый подчиняющийся своему собственному набору законов. *Однородные структуры* ***(ОС)*** расширяет эту аналогию, обеспечивая способы исследования целых совокупностей взаимодействующих элементарных автоматов *(клеток)*, каждая из которых является самостоятельным компьютером *(автоматом)*. Встраивая соответствующие правила в такой компьютер, мы можем моделировать множество видов весьма сложного поведения – от движения жидкостей, описываемого уравнениями ***Навье-Стокса***, до ландшафтной архитектуры. В настоящем разделе дается краткий обзор прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики, не нашедших отражения в предыдущих разделах главы. Мы не будет делать особого различия между классическими, недетерминированными и стохастическими ***ОС***-моделями, а внимание будет акцентироваться исключительно на самих прикладных аспектах. При этом, вполне естественно, что обширность данной тематики не позволяет дать исчерпывающую картину, поэтому мы ограничимся лишь наиболее интересными, на наш взгляд, приложениями, отсылая более требовательного читателя к библиографии, содержащей как примеры приложений, так и ссылки на соответствующие оригинальные работы [536]. Вполне уместно здесь сделать и следующее замечание. Для большего удобства восприятия данного материала нами проведена некоторая его рубрикация, однако воспринимать данную рубрикацию следует с определенной степенью условности, ибо в настоящее время в прикладных аспектах ***ТОС***-проблематики все четче проявляется ***междисциплинарный*** характер, что серьезно осложняет попытки четкого дифференцирования приложений ***ОС***-концепции к той либо иной области. Так, ***ОС***-модели для решения задач распознавания образов успешно применимы для работ, связанных с робототехникой, которая, в свою очередь, непосредственно примыкает к проблеме искусственного интеллекта и т. д. И это вполне естественно и лежит в русле нынешних реалий современного научного прогресса, когда на передовые позиции выходят исследования не по отдельным направлениям, а по комплексным проблемам, требующим участия больших коллективов специалистов из различных областей знаний. Именно такая междисциплинарность и обусловила то обстоятельство, что ряд нижеприведенных ***ОС***-приложений можно с одинаковым успехом относить к той либо иной рубрике. Надеемся, что данное обстоятельство не скажется отрицательно на представленном материале и не затенит многообразия ***ТОС***-приложений в различных областях.

ОС-модели в физике. Использование дискретных решетчатых систем имеет длинную и достаточно продуктивную историю в физике. Примеры этого лежат в довольно широком диапазоне – от точных теоретических моделей, рассматриваемых в статистической механике, до приближенных численных исследований непрерывных моделей. Однако, при этом, уделялось относительно небольшое внимание точным решетчатым моделям,

подчиняющимся обратимой динамике – из любого состояния динамической системы можно вывести ее предыдущее состояние. Этот вид ***микроскопической обратимости –*** важное свойство всей микроскопической физической динамики. ***Обратимые*** решетчатые системы становятся даже более физически реалистическими, если мы дополнительно потребуем от них выполнения принципа локальности взаимодействия и строгих законов сохранения. Действительно, некоторая обратимая и сохраняющая импульс динамика решетки, в которой дискретный перелет частиц между соседними узлами решетки производится в дискретные моменты, точно воспроизводит гидродинамику в макроскопическом пределе. Указанные решетчатые динамические системы эффективно погружаемы в ***ОС-***модели. В настоящее время ***ОС-***модели различных типов достаточно эффективно используются при решении различных проблем нелинейной физики [536].

Такие типы дискретных динамических систем не только обеспечивают интригующий информационно-динамический подход к моделированию макроскопической физики, но они могут также быть в высшей степени практически полезными. Точно те же самые свойства, которые делают данные модели физически реалистичными, делают их также и эффективно реализуемыми. Алгоритмы, которые включают ограничения типа локальности взаимодействия и обратимости, могут быть выполнены на микроскопических физических аппаратных средствах, которые одновременно удовлетворяют данным ограничениям. Такие аппаратные средства, в принципе, могут достигнуть более высокой интенсивности и скорости вычислений, чем любой другой тип традиционного компьютера. Таким образом, весьма интересно создать модели дискретных решетчатых динамических систем, являющихся, по-возможности, более физико-подобными как для того, чтобы отразить как можно больше свойств богатой физической динамики в информационных моделях, так и чтобы повысить наши возможности по использованию физики для вычислений. В данном отношении весьма перспективен ***ОС-***модельный подход, базирующийся на различных модификациях классических однородных структур.

Хорошо известно, что существенным недостатком традиционной квантовой теории является отсутствие в ней понятия «***траектории***». Теория дает только рецепт вычисления амплитуды вероятности перехода частицы из одного состояния в другое; при этом, волновая функция подчиняется локальным уравнениям, не являясь реальным ***физическим*** полем. Теория не рассматривает процессов перехода в пространстве-времени, процедура измерения и редукции не входит в явном виде в аппарат теории, т.е. в модель частицы. В этой связи ***P.V. Kurakin*** и ***G.G. Malinetskyi*** предложили ***ОС-***модель упрощенного мира, в котором существует искусственная частица с псевдо-квантовым поведением, где под ***псевдо-квантовым*** поведением понимается лишь способность частицы быть как в локализованном, так и в нелокализованном состоянии. В данной модели присутствует реальное (*относительно предложенного искусственного мира*) физическое поле, соответствующее частице; при этом, редукция явно входит в ***ОС-***модель, представляющую собой новый класс однородных структур ***– клеточные автоматы с псевдо-квантовой эволюцией,*** демонстрирующих эволюцию с требуемыми физическими свойствами [536].

Так, автоматы решетчатых газов (***L****attice* ***G****as* ***A****utomata* ***– LGA)*** являются специальным типом ***ОС-***моделей, широко используемых, например, для симулирования движения вязкой жидкости и волновых уравнений. В настоящее время исследования по ***LGA-***тематике представляют собой довольно хорошо разработанную область общего исследования ***ОС-***моделей. При этом, некоторые исследователи по ***ОС-***тематике полностью посвятили себя данному направлению, тогда как другие только слышали о нем. Квантовые ***ОС-***модели становятся все более важными для задач симулирования физических систем таких как квантовые решетчатые газы. Этому направлению посвящено много работ [536].

В настоящее время все интенсивнее ведется разработка новых математических методов и средств моделирования физических процессов в физике частиц, ядерной физике на-

ряду с физикой конденсированных сред с использованием методов искусственных нейронных сетей и однородных структур различных типов и классов, а также современных методов и средств анализа различных экспериментальных данных *(однородные структуры, нейронные сети, генетические алгоритмы, фракталы, нечеткая логика и т.д.).* В экспериментальных исследованиях по физике высоких энергий в ***ОИЯИ*** *(г. Дубна)* наряду с нейронными сетями довольно широко используются и ***ОС-***модели различных типов [536].

В последнее время достаточно большое развитие получило клеточно-автоматное моделирование потоков жидкости. Хорошо известен целый ряд двумерных моделей наряду с четырехмерной моделью, симулирующей трехмерные потоки. ***Ю. Медведевым*** была предложена трехмерная ***ОС-***модель *(называемая* ***RD-I****),* имеющая существенно меньшую сложность, чем четырехмерная модель. ***RD-I*** моделирует потоки жидкости следующим образом. В клетках находятся некоторые гипотетические частицы. Их масса и скорость единичны, количество возможных направлений вектора скорости совпадает с числом соседних клеток, а правила движения выбираются так, чтобы выполнялись законы сохранения массы и импульса. Каждый такт работы ***RD-I*** разбит на две фазы: *столкновение* и *сдвиг*. На фазе *столкновения* происходит изменение направления движения частиц согласно некоторым законам столкновения. На фазе *сдвига* каждая частица перемещается в соответствующую ее вектору скорости соседнюю клетку. Результаты экспериментальных исследований подтверждают, что модель ***RD-I*** действительно вполне удовлетворительно моделирует поток вязкой жидкости [536]. Имеется ряд интересных примеров симулирования гидродинамических течений с помощью ***ОС-***моделей.

В последние годы к ***ОС-***концепции существенно возрос интерес со стороны теоретической и математической физики, да и физических наук в целом. Более того, у ряда исследователей сложилось даже мнение *(на наш взгляд, не отвечающее действительности)*, что ***ОС-***проблематика несмотря на всю широту и многогранность ее приложений будет оставаться на уровне интеллектуальной игры *(пусть даже и очень сложной)* до тех пор, пока ей не найдут серьезных приложений для физического моделирования. Предполагается, что ***ОС-***аппарат для физического моделирования может сыграть роль, до определенной степени *аналогичную* современной роли дифференциальных уравнений [54,150-152,274, 378,386]. Современный прогресс в данном направлении обуславливается следующими двумя основными факторами, а именно ***технологическим*** и ***концептуальным***.

Технологический фактор обусловлен появлением вычислительной техники, которая базируется непосредственно на вычислительных ***ОС-***моделях *(клеточные* ***ML-****сопроцессоры Легенди*, ***CAM-****машины Тоффоли и др.)* [5,8,94-96,121,150,169,175,176,178,308,354,361,366,371]. Тогда как *концептуальный* фактор состоит в возможности конструирования дискретных распределенных моделей, отражающих наиболее фундаментальные аспекты физической закономерности, такие как ***однородность*** и ***локальность***, а также ***обратимость*** основных физических процессов и законов на микроскопическом уровне.

Существенный вклад в исследование проблемы *обратимости* динамики функционирования классических ***ОС-***моделей внесли ***Э. Мур*** [274], ***Дж. Майхилл*** [275], ***А. Смит*** [131], ***С. Аморозо*** [270,293], ***В.З. Аладьев*** [1,3,5,19,43,53-56,90], ***Т. Тоффоли, Н. Марголус*** [150-152, 187,268,273,318,376,378] и др. [536], что предопределило возможность использования ***ОС-***концепции в теоретической и математической физике, а также в других более прикладных разделах современной физики. На основе предварительного анализа, базирующегося на современных физических концепциях, с достаточной степенью уверенности мы можем полагать, что ***ОС-***концепция и вычислительные ***ОС-***модели могут представить весьма полезное средство описания и познания окружающего нас физического мира во всей его сложности и многообразии.

Несложно убедиться, что ***ОС-***модели непосредственно обладают рядом основных черт физической модели мира – ***однородностью*** и ***локальностью***. Тогда как их свойство ***об-***

ратимости в общем случае не имеет места априори *(доля обратимых **ОС**-моделей весьма мала; см. главу* **2)** и ее следует заранее программировать в той или иной ***ОС***-модели. Более того, в общем случае проблема определения ***обратимости*** динамики классических ***ОС***-моделей в общем случае алгоритмически неразрешима. С другой стороны, имеется возможность [152,268,274,318] заранее конструировать *обратимые* ***ОС***-модели, возможно, ценою потери ряда существенных их черт – универсальность, размерность и др., а также путем введения тех либо иных предположений и допущений (глава **2**). Таким образом, мы можем использовать ***ОС***-модели, возможно, упрощенные в смысле отдельных их характеристик, но более адекватные фундаментальным аспектам физических процессов и явлений в современном их понимании. На основе *обратимых* ***ОС***-моделей был построен и исследован целый ряд интересных физических моделей диффузии, турбулентности, равновесия, гидродинамики, газодинамики, волновой оптики и др. [147,150,151,152, 157,160,166,187,204,218,273,318,376,378]. В настоящее время одними из наиболее распространенных физических ***ОС***-моделей являются модели ***Изинга*** спиновых стекол [384,387], решетчатого газа [386,388] и диффузии [263], а также целый ряд других [360,418,536].

При моделировании процессов и явлений из вышеперечисленных разделов физики использовалось одно фундаментальное свойство ***ОС***-концепции – несложное поведение большого числа единичных достаточно простых автоматов структуры порождает сколь угодно сложное поведение всей модели в целом (*история конечных* ***КФ*** *с течением времени*). Именно данное свойство лежит в основе многих физических процессов и явлений. Например, молекулы газа, подчиняясь простым законам, порождают довольно сложное коллективное поведение, включая звуковые волны, вихри и турбулентность. Следует отметить, что перечисленные выше физические модели были успешно реализованы и исследовались на практически реализованных вычислительных ***ОС***-моделях [536].

Использование того либо иного параллельного подхода для решения численных задач динамики жидкостей и газов на основе ***ОС***-моделей из ранее сугубо теоретической области переходит в сферу практических реализаций, чему свидетельствует и появление специальной секции на 7-й Международной конференции по математическому и компьютерному моделированию [383], а также ряд последующих за ним крупных научных форумов. В этом же направлении большое внимание уделяется и вопросам нечислового моделирования динамики жидкостей и газов. Так, например, ***ОС***-подобные клеточные динамические системы уже используются для моделирования определенных типов хаоса в атмосферных потоках и аэродинамических трубах. Вычислительные ***ОС***-модели используются для исследования сложных задач гидродинамики, химических реакционно-диффузионных систем, динамики молекулярных систем, экологических задач, задач полимеризации, социологических и экономических задач, вопросов роста и динамики доменов, роста дендритов, задач описания движения толпы, вопросов разработки самовосстанавливаемых электронных цепей и другие [166,355,536].

Элементная база современной вычислительной техники использует целый ряд блоков, функционирование которых носит необратимый характер. Примерами могут служить элементы, реализующие логические операции ***AND, OR, NOT, XOR, EQV*** и др., тогда как микроскопические физические процессы, лежащие в их основе (*насколько нам известно*), являются строго обратимыми. В данной связи возникает принципиальный вопрос о существовании некоторой формальной вычислительной модели,базирующейся только на ***обратимых*** вычислительных элементах. И такая ***ОС***-модель была предложена [150-152, 268,273,388,393,394,536] для описания физики идеального газа, которое существенно отражает физическую модель, составляющую основу современной кинетической теории газов. И уже в рамках создания данной модели было показано, что:

♦ ***формальные ОС-модели могут симулировать определенные обратимые физические процессы и явления;***

♦ ***даже при условии необходимости микроскопической обратимости такие модели способны отражать произвольно сложное поведение, а именно, обладают свойством универсальной вычислимости.***

Таким образом, исследование вопроса о том, могут ли ***ОС-***модели симулировать не только феноменологические аспекты нашего реального мира, но и основные физические законы и процессы, привело к созданию вычислительных физических ***ОС-***моделей, обеспечивающих одну из наиболее фундаментальных черт современной физики ***– микроскопическую обратимость процессов.*** Появление первых вычислительных ***ОС-***подобных ЭВМ и сопутствующего им цикла работ ***Т. Тоффоли, Н. Марголуса, Г. Вишняк*** и целого ряда других [150,2632,273,394] привело к быстрому развитию новых перспективных подходов к физическому моделированию на основе ***ОС-***концепции. На наш взгляд, работа в данном направлении окажется весьма перспективной не только для вычислительной физики, но и для теории вычислений вообще. Весьма интересными представляются новые подходы к моделированию задач статистической механики и механик жидкости и твердого тела, базирующиеся на ***ОС-***концепции, а также и целый ряд формальных ***ОС-***моделей в других разделах современной физики. Между тем, использование ***ОС-***моделей в физике предполагает их мотивированно-адекватные интерпретации, а не различного рода спекуляции. В частности, на основе свойства ***необратимости*** динамики, присущего подавляющему большинству классических ***ОС-***моделей, некоторые авторы выдвигают предположения о *многовариантности* будущего и даже прошлого. И если в первом случае у нас не возникает особых эмоций, то второй не вполне поддается здравому осмыслению, если только не иметь ввиду то обстоятельство, что для многих динамических систем их траектории вполне могут определяться теми или иными воздействиями и в этом смысле ***текущая*** траектория есть обусловленный выбор из множества всех допустимых для данной системы траекторий. И в качестве иллюстрации для *многовариантности* ***прошлого*** приводится, в частности, ***ОС-***модель, для которой текущая конфигурация имеет множество предшествующих ей конфигураций (*предшественников*). В данном случае весьма скептически воспринимается серьезность обоснования аппеляцией к ***ОС-***моделям, в целом, общеизвестных фактов [90,263,366,376,383,384,386,387,391-393,536].

Однако, отмеченного типа ***ОС-***модели используются не только для симулирования чисто физических процессов и явлений. Модели, базирующиеся на ***LGA-***конструкции достаточно успешно используются и для симулирования целого ряда социальных явлений, например, для симулирования движения неорганизованной толпы, включая элементы ситуационного анализа участниками движения. ***ОС-***модели оказываются довольно интересными также при компьютерном моделировании психических процессов индивида и динамики общественных процессов, включая индивидуальную и групповую творческую, исследовательскую и инновационную деятельность [536].

ОС-модели и дифференциальные уравнения. Прежде всего, хорошо известно, что значительный раздел вычислительной математики составляют методы решения различного типа как дифференциальных, так и разностных уравнений, описывающих процессы в той или иной прикладной области. Так, например, большой раздел составляют методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, которыми описываются многие процессы в физике твердого тела и плазмы, аэродинамике, гидродинамике, газодинамике, термодинамике, сейсмологии, и целый ряд других.

ОС-модели являются дискретными динамическими системами, которые довольно часто рассматриваются в качестве аналогов дифференциальных уравнений в частных производных, которые позволяют описывать непрерывные динамические системы. Термин «***дискретные***», определяется тем, что и пространство, и время дискретны, а состояния у единичного автомата модели могут иметь только конечные значения. Основная идея в этом смысле состоит в том, чтобы не описывать динамическую систему сложными диф-

ференциальными уравнениями, а моделировать эту систему множеством локально взаимодействующих единичных автоматов, функционирующих по простым правилам, т.е. перейти от исследования сложной системы со сложными уравнениями к исследованию феномена зарождения этой сложности в результате динамики соответствующей ***ОС***-модели, чьи единичные автоматы функционируют по достаточно простым правилам.

В частности, ***ОС***-модели используются для симулирования гидродинамических и газодинамических течений. Уравнения гидродинамики соответствуют математической модели, описывающей поведение решетчатого газа, одного из видов ***ОС***-моделей, на макроуровне. Структуры, возникающие в этих моделях, похожи на возмущение поведения поверхности потока жидкости механическим препятствием. На основе ***ОС***-моделей весьма успешно решались и задачи моделирования течений со свободной границей, распространения тепловых потоков и другие [536].

Одним из основных для численного решения данных уравнений является разностный метод, в случае решения краевых задач обычно называемый *сеточным*. Как правило, решение краевых задач сеточным методом производится на ЭВМ. Однако, учитывая последовательный принцип вычислений большинства современных ЭВМ, данный подход требует значительных временных затрат. Поэтому, для решения подобных задач пытаются использовать супер-ЭВМ или ЭВМ специальной архитектуры [96]. С другой стороны, сама идея *сеточного* метода наилучшим образом отвечает концепции вычислительных ***ОС***-моделей, в которых *глобальное* поведение объекта, описываемого дифференциальными уравнениями, полностью определяется локальными взаимодействиями единичных автоматов. Поэтому использование ***ОС***-моделей позволяет применять новые подходы к решению уравнений в частных производных, разностных и интегро-дифференциальных уравнений. В частности, такие подходы интенсивно используются для решения уравнений Навье-Стокса, хотя этим типом уравнений дело, естественно, не ограничивается. В определенном отношении можно говорить об ***ОС*** как о модельном аналоге дифференциальных уравнений. Имеется ряд интересных работ, посвященных сравнительному анализу результатов как численного моделирования уравнений физических процессов (*теплообмена, теплопроводности, гидродинамики, кинетики, деформации и разрушения хрупких материалов и сред со сложной структурой и др.*), так и довольно эффективным методам на основе ***ОС***-моделирования данных физических процессов [536].

Весьма интересно применение ***ОС***-моделей в металлургии не в прямом виде, а в сочетании с методом конечных элементов. В этом направлении можно отметить систему ***CAFE*** (***C****ellular* ***A****utomata* – ***F****inite* ***E****lement*), основанную на комбинированном методе ***ОС*** и конечных элементов. ***CAFE***-подход основан на модели стохастического образования зародышей новой фазы в расплаве и их роста. Расчеты на основе ***CAFE***-подхода производятся методами ***ОС***, тогда как по модели теплопереноса – *методом конечных элементов* (***МКЭ***). В целом ряде задач исследования структурообразования при моделировании литейных процессов возникает целесообразность совместного использования ***МКЭ*** и ***ОС*** [536].

Общий принцип, лежащий в основе этих подходов, состоит в построении вычислительной ***ОС***-модели, чья динамика отражает поведение решения искомого дифференциального уравнения. Показано [263], что подобные подходы являются весьма перспективными для решения краевых задач со сложной геометрией границ или с граничными условиями, зависящими и от времени, т. к. используемый в ***ОС***-модели локальный принцип взаимодействия является легко настраиваемым на указанные граничные условия. В этой же связи для качественного исследования дифференциальных уравнений весьма перспективными представляются и упомянутые выше специальные ***CAM***-машины [150-152, 165], допускающие их достаточно эффективную эмуляцию. В рамках данного подхода были построены простые модели классических дифференциальных уравнений физики, таких как уравнение теплопроводности, волновое уравнение [378], а также и уравнение

Навье-Стокса [379], рассматриваемые как предельные случаи чрезвычайно простых процессов комбинаторной динамики. В частности, ***ОС***-модели позволяют создавать точные модели динамики жидкостей, которые конкурентноспособны и в вычислительных аспектах с традиционными методами. При этом, более прямой подход к использованию вычислительных ***ОС***-моделей для решения краевых задач и разностных уравнений базируется на прямом аналоге *разностных* операторов и *локальных функций перехода* структуры [3,5]. Именно такой подход тесно связан с идеей ***Э. Бэнкса*** [132] по использованию общей ***ОС***-концепции для моделирования непрерывных физических пространств.

Между тем, весьма непросто проводить удовлетворительный количественный анализ с ***ОС***-моделями, не теряя простоты и наглядности правила функционирования единичного автомата модели (*которое представляется важным преимуществом данного метода*). При этом, установление таких правил является часто достаточно интуитивным, а иногда и довольно трудным. Но всякий раз мы должны иметь в виду то, что хотя количество дифференциальных уравнений бесконечно, множество уравнений, которы мы можем написать, перечислимо, а множество уравнений, которые мы можем точно решить, весьма мало. Именно поэтому ***ОС***-модели могут сыграть здесь немаловажную роль. Между тем, в ряде работ дебатируются вопросы приемлемости и эффективности моделирования дифференциальных уравнений такого типа структурами [536]. На наш взгляд, как и в любом другом вопросе здесь следует опираться лишь на результаты последующей проверки на соответствие полученной модели и отражаемого ею явления, процесса или объекта, описываемого дифференциальным уравнением.

Классические ***ОС***-модели, по определению, являются дискретными динамическими системами и часто оказываются весьма полезными моделями, в которых изменение состояния *единичного* автомата структуры может иметь место в любой произвольный момент времени вдоль непрерывной временной оси. Поэтому пуассоновские процессы являются одним из наиболее ярких примеров применимости ***ОС***-моделей. В пуассоновской ***ОС***-модели изменение состояния каждого единичного автомата управляется независимым пуассоновским процессом. В монографии [150] приводится достаточно простая методика компьютерной эмуляции пуассоновской ***ОС***-модели классическими ***2-ОС*** с произвольной степенью достоверности. Данная методика может быть использована для организации в ***ОС***-моделях асинхронных детерминированных вычислений.

ОС-модели, искусственный интеллект, робототехника, распознавание образов и другие направления. Высокая степень параллелизма обработки информации и ряд других фундаментальных свойств, обеспечиваемых ***ОС***-моделями, создают весьма перспективные предпосылки для использования их в различного рода ***адаптивных системах***. Так, нейронно-сетевые системы, описываемые одной из ***ОС****-моделей*, могут стать отправной точкой при создании развитых ***адаптивных роботов*** [381]. Последующее развитие робототехники приводит к постановке задач, решение которых связано с существенными математическими и техническими сложностями. В качестве примера можно привести и задачу оперативного управления *адаптивными* автономными транспортными роботами в *динамически* изменяющейся внешней среде. Для решения данной задачи был предложен один достаточно интересный способ адаптивного управления [381], основанный на использовании однородных управляющих структур, являющихся довольно типичной вычислительной ***ОС****-моделью.

Проблема исследования *интеллектуальных алгоритмов* в настоящее время базируется на *активных семантических сетях*. Показано [3,5,54], что целям моделирования таких сетей хорошо отвечают структуры ***ОС****-класса, которые допускают относительно несложную реализацию средствами современной микроэлектроники и могут быть использованы и для организации поиска и обработки информации в *реальное* время при разработке управляющих блоков *интеллектуальных роботов*. Вычислительные ***ОС****-модели позволяют

организовывать эффективное управление ***распределенными*** непрерывными объектами. Данная задача чрезвычайно актуальна при проектировании и разработке гибких автоматизированных производств и многих других важных производственных объектов, работающих в условиях безлюдной технологии [54-56,88,302,360,364,368]. Исследуются вопросы анализа сложных структур на основе системы мониторинга данных для дальнейшего использования методов ***ОС***-моделирования для прогнозирования жизнестойкости конструкций, выявления скрытых тенденций, построения стратегий развития и поиска новых решений. Уже имеются достаточно интересные практические примеры стохастических ***ОС***-моделей разнообразных технологических процессов [536].

Весьма перспективным представляется использование ***ОС***-моделей для распознавания образов и решения связанных с этим задач. В первую очередь стоит вопрос получения решений подобных задач в реальное время, быстрой обработке сигналов и образов. В этом направлении разработаны и исследованы структурные ***ОС***-модели предварительной обработки изображений и выделения информативных признаков. На базе данных моделей в Белоруссии разработан *эскизный* проект клеточного сопроцессора обработки изображений. В качестве примеров прикладного использования полученных результатов предложены структурно-алгоритмические модели обработки полутоновых изображений снимков земной поверхности. Как известно, динамика ***ОС***-моделей обладает инвариантными конфигурациями (*аналогичными в математике фиксированным точкам*), а результаты их исследования имеют самое *прямое* отношение к использованию ***ОС***-моделей для распознавания образов, а также и симулирования однородно-ассоциативной памяти, требующей обеспечения отображений специфических S_k-конфигураций в другие Θ_k-конфигурации. На основе ***ОС***-подобной модели предложена весьма интересная высокопараллельная архитектура *нейронной* ЭВМ для решения задач накопления и хранения знаний, обработки образов и приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных [237]. Используется ***ОС***-концепция, в частности, при создании информационных систем для обработки и интерпретации аэрокосмических изображений в эколого-гидрологических исследованиях. Показана возможность определения геометрических характеристик изображений на основе ***ОС***-моделей [536].

В настоящее время имеется немало предпосылок для понимания и использования вычислительных возможностей *нейроноподобных* сетей, имитирующих архитектуру *нейронных* ансамблей в мозговых тканях. Так как мозг обрабатывает информацию максимально параллельным образом и с высокой степенью надежности, то понимание того, как использовать его архитектуру, представляет огромный интерес для проектировщиков и разработчиков надежных и эффективных параллельных процессоров и нейронных компьютеров [159,333,354,364,368,369,374]. На пути исследования таких *нейроноподобных* моделей используется ряд подходов, начиная с формального моделирования и заканчивая построением конкретных реализаций на основе сетей современных параллельных процессоров. В этом контексте значительный интерес представляют однородные структуры, определенные типы которых допускают моделирование весьма сложных самоорганизующихся динамических систем, ряда феноменов теории хаоса, самоорганизующихся нейроноподобных систем, а также целого ряда других интересных кооперативных феноменов и процессов [54-56,90,149,153,201,333,354,371,374,382,383,407]. В частности, из наших результатов следует, что подход на основе ***ОС***-моделей может быть весьма полезен для симулирования и исследования некоторых интересных феноменов и явлений в теории антихаоса [88,90,536].

Важным свойством ряда ***ОС***-моделей является их способность в той или иной мере к самоорганизации, что позволяет использовать их в качестве вполне удовлетворительной среды моделирования ***развивающихся*** систем, например, в теоретической физике и биологии развития. В таком случае требуются эффективные методы анализа статистичес-

ких свойств локальных функций перехода в ***ОС***-моделях. Одним из таких методов является локальная структурная теория [153], которая, в частности, дает один из методов вычисления инвариантных мер определенного класса дискретных *динамических* хаотических систем, исследования по которым в настоящее время расширяются [536].

Имеются интересные попытки использования ***ОС***-моделей для исследования ***рефлексивных систем*** [3]; в таком случае предлагается реализовывать ***ОС***-модели на односторонних математических поверхностях, например, *листе Мебиуса* или *бутылке Клейна*. Предполагается также, что подобные подходы могут оказаться весьма интересными для описания некоторых моделей гипотетических *Вселенных*. И хотя в данном случае мы имеем дело с конечными структурами, идея использования ***ОС***-*концепции* для построения математической теории конфликтов заслуживает самого пристального внимания [3,55,90]. Достаточно интересными в этой связи представляются исследования на основе ***ОС***-концепции и задач распределенного интеллекта [189,536].

ОС-модели в криптография. Криптология – это наука о безопасности связи. Она достаточно отчетливо подразделяется на две части – криптографию (*науку о шифрах*) и криптоанализ (*науку о вскрытии шифров*). Криптографы стремятся найти надежные методы обеспечения секретности и подлинности сообщений, а криптоаналитики пытаются выполнить обратную задачу, отыскивая слабости в шифрах или подделывая сообщения так, чтобы они были приняты за настоящие. Совершенно новая идея, выдвинутая ***П. Гувмом*** [536], состоит в использовании в криптосистемах с открытыми ключами генерационных возможностей ***ОС***-моделей. При этом следует отметить, что в свое время упоминание о перспективных возможностях ***ОС***-моделей для решения задач сжатия информации и криптографии было дано нами еще в монографиях [1,3]. Несмотря на отсутствие тщательного тестирования и возможности наличия криптографически узких мест, это направление представляет определенный интерес и в настоящее время развивается достаточно интенсивно. Одним из важных свойств ***ОС***-модели является то, что даже в случае ее обратимости в общем случае невозможно вычислять предшественников для произвольных конфигураций, инвертировав правило порождения потомков. Большой практический интерес представляют исследования по созданию криптосистем на основе трехмерных ***ОС***-моделей на разбиении, предложенных ***Т. Тоффоли*** и ***Н. Марголус.***

Теория *кодирования* является сугубо прикладной наукой и ее практические достижения хорошо известны. Однако, наиболее широкое распространение получили лишь самые примитивные способы кодирования: проверка на четность, коды Хемминга, циклические проверки и др. Это происходит как из-за сложности используемого математического аппарата, так и по причине недостаточной разработки вопросов взаимосвязи *кодирования* и *модуляции* [380]. Заданная надежность кодирования достигается за счет избыточности информации. Однако проблема состоит не в том, чтобы просто повышать надежность за счет использования все большей избыточности, а в том, как с помощью, по возможности, меньшей, специальным образом вводимой избыточности, достичь нужного уровня надежности. В этом контексте для кодирования/декодирования информации и был нами предложен подход на основе ***ОС***-концепции [1,3,53-56]. В основу данного подхода положена возможность генерации посредством *полигенных* ***ОС***-моделей произвольной наперед заданной конечной ***КФ*** из некоторой начальной $\mathbf{КФ_0}$. В данном случае *кодер* и *декодер*, находящиеся на пути передачи информации от источника к приемнику, выполняются на основе некоторой *полигенной* ***ОС***-модели и позволяют вести кодирование/декодирование параллельным образом с большой скоростью. Предложенный нами подход представляется весьма естественным и перспективным, ибо именно он (*по нашим представлениям*) лежит в основе кодирования генетической информации [3-5]. Данный подход позволяет весьма существенно сокращать объем избыточной информации, заменяя передачу самой информации порождающим ее алгоритмом. В принципе, ука-

занный подход может быть использован и для сжатия информации (*особенно картинного типа*), хранящейся во внешней памяти ЭВМ. Наконец, подобный подход используется и в различного рода задачах криптования информации. Имеются примеры довольно интересных алгоритмов организации протоколов аутентификации, шифрования и кодирования информации с использованием свойств ***ОС***-моделей [53-56,88,166,219,536].

ОС-модели и физико-химические процессы. В рамках уже даже *классических* ***ОС***-моделей могут быть исследованы некоторые интересные свойства роста и морфогенеза кристаллических структур. Простейшие структуры, наблюдаемые в кристаллах, являются периодическими и с помощью соответствующих ***ОС***-моделей свойства подобных кристаллических образований можно исследовать в точных математических формулировках [1,3, 5,55,85,211,225,332]. Был продемонстриророван целый ряд интересных ***ОС***-моделей, симулирующих определенные типы химических реакций, неорганический раствор которых отражает *биоритмоподобную* периодичность. В данных ***ОС***-моделях локальная функция перехода специфицирует изменения *локальных* концентраций химических компонентов по времени как функцию реакции между локальными компонентами и диффузией между ближайшими окрестностями вещества, подвергающегося химической реакции [166,263,332,333,536]. Весьма важный класс ***ОС***-моделей представляют собой так называемые возбудимые среды и ткани, исследования которых проводятся по многим направлениям в биологии, медицине и ряде других естественных науках [2,54,134,147,160, 166,167,172,198,203,205,214,346,536].

На основе стохастических ***ОС***-моделей проводятся и исследования физико-химических процессов, протекающих на поверхности твердого тела. Данный подход позволяет рассматривать всю совокупность элементарных процессов, таких как адсорбция и десорбция, большинство химических стадий, фазовые переходы, поверхностная диффузия и т.д., с единой методологической точки зрения, что дает возможность исследовать кооперативное поведение всех частиц (*атомов, молекул, ионов и т.п.*), входящих в сложную химическую систему. В этих моделях реализация элементарных физико-химических процессов, приводящих к переходам частиц из одних состояний в другие, происходит в соответствии с вероятностными ***ЛФП***. Значения вероятностей могут определяться на базе рассмотрения термодинамических аспектов элементарных процессов с применением и статистических методов анализа. Программная реализация подобных моделей позволяет производить эффективный анализ элементарных физико-химических процессов.

В частности, рядом исследователей (***Варфоломеева В.В., Коныгин С.Б., Саноян А.Г.***) был предложен подход на основе *вероятностной* ***ОС***-модели для симулирования физико-химических процессов,протекающие на поверхности твердого тела. Изменение структуры и перестройки поверхности катализатора во время реакции происходит под влиянием протекающих элементарных физико-химических процессов в поверхностном слое. В *гетерогенном* катализе такие поверхностные процессы играют весьма существенную роль. Показано, что на основе данного ***ОС***-подхода можно рассматривать всю совокупность элементарных процессов, таких как адсорбция и десорбция, большинство химических стадий, фазовые переходы, поверхностная диффузия и др. с единой методологической точки зрения, что позволяет исследовать кооперативное поведение всех частиц (*атомов, молекул, ионов и др.*), входящих в сложную химическую систему. Разработанная на основе вероятностной ***ОС***-модели методика позволяет получать необходимые данные об изменениях в пористой структуре катализатора в наглядной форме, весьма удобной для дальнейшего использования. При этом, данная методика моделирования применима и к многокомпонентным катализаторам, которые, как правило, являются многофазными системами. Для программной реализации методики создана программа, обеспечивающая ***ОС***-моделирование элементарных физико-химических процессов [536].

Пространственно распределенные динамические системы охватывают весьма широкий круг приложений (*например, сложные химические, технологические, геохимические и социальные процессы, популяции животных и насекомых и др.*). Для задач исследования и моделирования сложнейшей динамики такого типа нелинейных динамических систем предлагается использовать стохастические ***ОС***-модели (*клеточные автоматы*). Интересный обзор применения стохастических ***ОС***-моделей в качестве аппарата исследования и моделирования указанного типа нелинейных динамических систем представлен в [422] с акцентом на описании и анализе возможностей различных типов стохастических ***ОС***-моделей таких, как ***DSMC*** (*прямое симулирование методом Монте-Карло*) и ***LGCA*** (*реакционный клеточный автомат типа решетчатого газа*). В работе проиллюстрировано применение данного аппарата к решению таких задач как: влияние флуктуаций на динамические режимы нелинейных систем, образование структур Тьюринга, влияние гидродинамических мод на поведение химических нелинейных систем (*эффекты перемешивания*), бифуркационное изменение *динамического* режима сложных систем в условиях ограниченной подвижности или низкой пространственной размерности, описание химических систем в микроэмульсиях. Наряду со стохастическими ***ОС*** представлен ряд интересных примеров применения и классических ***ОС:*** задачи типа «реакция – диффузия», моделирование реакции на нерегулярных решетках, имеющих фрактальную размерность, и др. В работе [422] представлена сводная таблица применимости различных типов ***ОС***-моделей для решения того или иного класса задач. В модифицированном виде ее представляет следующая таблица, а именно.

Таблица 7

Тип ОС-модели	***Решаемые задачи***
классические	самовоспроизведение организмов, коллективное поведение живых организмов, кристаллообразование, кластерообразование, переходы типа «***свободное движение–затор***» в городе, эффект перемешивания в реакциях Белоусова-Жаботинского и Бриггса-Раушера, волновые процессы в средах из осциллирующих ячеек. Следует при этом иметь в виду, что имитация случайного каталитического процесса на компьютере в рамках метода вероятностных ***ОС***-моделей заключается в непосредственном моделировании. Однако данный подход не позволяет определять области существования качественно различных состояний каталитических и химико-технологических систем
LGA	гидродинамика
LGCA	реакционно-диффузионные уравнения с учетом флуктуаций (*хаос, структуры Тьюринга, химические волны, зародышеобразование и др.*)
DSMC	газодинамика, управляющее уравнение в общем виде, химические реакции с учетом флуктуаций
BKA	реакционно-диффузионные уравнения с учетом как флуктуаций, так и турбулентного перемешивания, протекающих как в гомогенной, так и в структурированной среде
где: ***LGA –*** Lattice Gas Automata, ***LGCA –*** Lattice Gas Cellular Automata, ***DSMC –*** Direct Simulation Monte-Carlo, ***BKA –*** стохастический клеточный автомат с использованием процедуры Монте-Карло	

При этом следует иметь в виду, что представленная табл. ***6*** не обеспечивает всю полноту охвата задач, решаемых указанными типами ***ОС***-моделей и, прежде всего, классическими ***ОС***. Однако даже из нее видна обширность областей применения аппарата ***ОС***-моделей для исследования сложных пространственно распределенных динамических

систем. При этом, на наш взгляд, вполне справедливо отмечено то обстоятельство, что математики предпочитают развивать теорию *классических* ***OC-***моделей *(как параллельной системы обработки слов в конечных алфавитах, аналогичной машине Тьюринга для последовательной обработки)*, тогда как физики и некоторые другие естественники более имеют дело с моделями типа ***LGA, LGCA, DSMC, BKA*** и др., ибо данные модели позволяют на микро- и мезоскопическом уровнях описывать тонкие детали поведения реальных систем, в частности влияние внутренних флуктуаций на поведение динамических систем. Между тем, наряду с *классическими* математики достаточно активно исследуют и такие важные классы ***OC-***моделей, как полигенные, недетерминированные и стохастические. К сожалению, в целом превосходная работа [422] содержит не совсем корректный краткий экскурс в историю как конечных, так и клеточных автоматов. Обширная библиография в значительной мере дополняет представленный в работе материал. Несколько под иным углом зрения рассматриваются вопросы исследования динамических систем посредством ***OC-***аппарата в [421]. Правда, круг рассматриваемых вопросов достаточно ограничен и не может дать представления о широте данной проблематики.

Книга [566] является *первой*, обобщающей и суммирующей итоги моделирования химических систем на основе ***OC-***концепции. Книга является практическим введением в ***OC-***тематику с акцентом на ее прикладных аспектах, представляя собой оригинальный как учебник, так и практическое руководство по применению ***OC-***моделей в химии. Даются детальные описания с примерами и упражнениями того, как ***OC-***модели могут быть использованы при изучении широкого разнообразия химических, физических и биохимических явлений и процессов. Охваченные рассмотрением темы включают кинетические феномены первого и второго порядка, ферментативную кинетику, равновесие между паром и жидкостью и целый ряд других. Материал книги не сводится лишь к тексту, а снабжен ***CD***, содержащим программные реализации рассмотренных ***OC-***моделей, что позволяет их непосредственно использовать в экспериментальном освоении материала. В книге представлены компактные описания большого разнообразия физических и химических явлений и процессов, иллюстрируемые компьютерными ***OC-***моделями. В целях популяризации практической направленности ***OC-***концепции данная книга, по нашему мнению, играет существенную роль как для начальных курсов по химии, физике, биологии, прикладной математике и биоинформатике, так и в качестве вспомогательного материала для лабораторных курсов по общей химии, органической химии, физической химии, лекарственной химии, химическому машиностроению и другим курсам, имеющим дело со статистическими и динамическими системами. Это позволяет исследовать довольно широкий диапазон динамических явлений, многие из которых обычно недоступны в рамках обычных лабораторных условий из-за ограничений времени, стоимости и экспериментального оборудования. Одновременно книга представляет собой вполне приличный учебник и по прикладным аспектам ***OC-***моделей. Рекомендации и модели данной книги играют роль дидактического руководства по организации подобных ***OC-***ориентированных курсов для целого ряда университетских циклов.

Имеются интересные примеры компьютерногое симулирования термической обработки металлических изделий токами высокой частоты на основе метода классических ***OC-***моделей наряду с применением метода гибридных ***OC-***моделей для исследования влияния газовой атмосферы на процессы разрушения. Интересны результаты по симулированию нестационарных хаотических процессов в магнитосфере на основе ***OC-***моделей.

OC-модели в био-медицине. В настоящее время ***OC-***модели находят все более широкое применение в био-медицине в самом широком смысле этого понятия в качестве весьма привлекательного средства симулирования различных процессов, явлений и объектов живой природы. Прежде всего, одним из важных приложений ***OC-***подхода является моделирование взаимодействующих клеточных систем в биологии и медицине. Примеры

взаимодействующих *клеточных* систем мы можем в изобилии обнаружить в жизненных циклах бактерий или социальных амеб, эмбрионального формирования ткани, заживления ран или роста опухолей и метастазов. Математические модели пространственно-временного формирования структуры могут помочь в понимании принципов кооперативного эффекта *межклеточного* взаимодействия в таких системах, которые нельзя объяснить на уровне отдельной клетки. Для исследования межклеточных взаимодействий ***A. Deutsch*** и другими были определены и исследованы весьма интересные типы стохастических клеточных автоматов в качестве микроскопических моделей клеточного взаимодействия [536]. Вышеупомянутые феномены, исходя из сложных клеточных взаимодействий, не могут быть получены исключительно из экспериментального анализа, но могут быть существенно легче исследованы, используя математические модели, в частности, на основе ***ОС-***подхода. Данные ***ОС-***модели могут быть распространены и на другие весьма интересные приложения в биологии, медицине и иммунологии.

Перспективным представляется использование ***ОС-***моделей в нейрофизиологии. Нейрофизиологи уже давно задумывались над возможными квантовыми механизмами, связанными с работой мозга. В пионерской работе ***С. Хамерофа*** говорится о своеобразных вычислениях, происходящих в так называемых *микротрубочках* цитоскелета. Микротрубочки – важная часть *скелета* клетки. Это полые цилиндрические трубочки, состоящие из субъединиц – ***тубулинов***, представляющих собой молекулы-димеры, которые могут существовать по крайней мере в двух пространственных конфигурациях. Для «*переключения*» из одной конфигурации в другую достаточно, чтобы единственный электрон *переместился с места на место*. Поверхность микротрубочки составлена из тубулинов, расположенных в узлах правильной решетки. Конфигурация каждого тубулина зависит от конфигурации его соседей. Таким образом, формируется образ естественной ***ОС-***модели, функционирование которой влияет на передачу сигналов между нейронами мозга и применение которой может составить довольно эффективный аппарат исследований в экспериментально-теоретической нейрофизиологии [536].

Весьма интересным представляется проект по созданию информационно-программной среды для получения новых фундаментальных знаний в биологии живой клетки, разрабатываемый в институте математических проблем биологии ***РАН.*** Предполагается, что его реализация поможет формированию новых представлений о ***клетке,*** как открытой самосогласованной динамической системе. Такая информационно-программная среда должна базироваться на современных информационных технологиях наряду с использованием имеющегося опыта математического моделирования сложных динамических систем, включая подходы и на основе ***ОС-***концепции. Важность ***ОС-***концепции для биомедицинских наук, в частности, отражает и тот немаловажный факт, что Президиумом научно-методического совета по биологии Министерства образования ***РФ*** в программу дисциплины «*Концепции современного естествознания*» включена тематика ***ОС-***моделей.

<u>ОС-модели и нанотехнологии</u>. Современные технологии производства наноустройств еще далеки от практической реализации самовоспроизводства в том виде, как его описал ***Дж. фон Нейман*** [124], однако идея синтеза вычислительной среды в виде двумерного массива элементарных транзисторных ячеек начинает сегодня отчетливо прослеживаться в экспериментальных работах, ведущихся в некоторых крупных исследовательских центрах ***(IBM, Bell Labs*** *и др.).* Успеху данного направления во многом способствует стремление нанокластеров некоторых химических элементов к самоорганизации с образованием регулярных структур. Специалисты из ***Communications Research Laboratory*** *(Япония)*, ведущие исследования в данном направлении, прямо заявляют, что целью их разработок является создание ***ОС-***модели – большой матрицы простых идентичных компонентов нанометрового масштаба, или ***клеток.*** Эти клетки сообщаются посредством сигналов, передаваемых по цепочке от клетки к клетке. Изготовить такую конструк-

цию в Японии надеются путем химического синтеза. На завершение работы с использованием отдельных молекул в качестве рабочего элемента японские исследователи отпускают себе двадцать лет [536].

На основе ***ОС***-концепции предлагаются подходы и к исследованию задач ***нанотехнологии***. В этом направлении перспективными представляются дискретные системы, среди которых одними из наиболее эффективных для симулирования объектов наномира на языке дискретных сред могут оказаться ***ОС***-модели [536]. Перед нанотехнологией стоит несколько задач, связанных со сборкой методом «*снизу вверх*», а именно: это задачи построения алгоритмов самовоспроизведения, алгоритмов сборки необходимых конструкций из однородной среды, задачи формирования поверхностей требуемых конфигураций, задачи проверки и восстановления целостности наноконструкций и др. Подобные задачи можно вполне успешно решать в рамках ***ОС***-подхода. Довольно перспективным представляется использование компьютерных моделей, базирующихся на ***2-ОС*** (*например, типа* ***У. Ооно–М. Кохомото***), для исследования перспективных наноматериалов.

На протяжении последних почти двадцати лет ведутся весьма активные работы по созданию механизмов, способных к самовоспроизводству. Одним из наиболее перспективных направлений создания физических *самовоспроизводящихся* автоматов представляет область нанотехнологии: микроскопические самовоспроизводящиеся системы, способные к производству макрообъемов организованного вещества – направление, которое может оказать радикальное воздействие на организацию промышленности в будущем и в котором одну из ведущих ролей могут сыграть именно ***ОС***-модели, в которых процессы самовоспроизведения исследуются уже очень давно и где получено немало весьма интересных результатов различного характера.

Моделирование самосборки наноконструкций методом «*снизу вверх*» на самом высоком уровне базируется на следующем предположении: существует множество дискретных агентов, между которыми происходят локальные взаимодействия, которые определяют глобальную структуру. Исходя из данного предположения, вполне естественно обратиться при симулировании нанообъектов к потенциалу ***ОС***-моделей. Непосредственно к задачам нанотехнологии относятся исследования по симулированию сложного поведения посредством ***ОС***-моделей, симулированию отдельных аспектов эволюции посредством систем взаимодействующих дискретных агентов в моделях теории искусственной жизни, симулированию биологических систем посредством ***ОС***-моделей, в частности, симулированию аспектов самовоспроизведения, дифференциации и регенерации.

ОС-модели, синергетика, хаос и теория катастроф. За последние несколько десятилетий в естественнонаучных областях произошел качественный скачок – осознана стохастичность многих сложных процессов и начато изучение больших нелинейных систем. Теории катастроф, хаоса, сложности и синергетика являются разными языками, описывающими поведение нелинейных динамических систем, включая их свойства довольно резким скачком переходить в другое состояние, и используют понятия критических переходов, самоорганизации, иерархичности, фрактальности и т.д. Например, геофизика и метеорология, обладая длинными рядами наблюдательных данных, не только весьма существенно влияли на развитие данной точки зрения [536], но активно разрабатывали и применяли на практике научные идеи и принципы прогноза катастроф, определения риска и возможных ущербов, стратегий принятия решений. В общем случае ***ОС***-модели проявляют ярко выраженное хаотическое поведение, что обусловливает интерес к ним со стороны теории катастроф. При этом, если проблема сводится к *качественному* пониманию сложной пространственно-временной динамики больших нелинейных систем, то во многих случаях предпочтительнее иметь дело не с непрерывной средой, а именно с ***ОС***-подобными моделями. Последовательности конечных конфигураций, генерируемые ***ОС***-моделями различных типов и классов, аналогичны траекториям динамических

систем и их исследование представляет такой же первостепенный интерес с точки зрения исследования определяющих поведенческих характеристик такого типа систем (*периодичность, самовоспроизведение, формообразование, самоорганизация, неконструируемость, аттракторы, обратимость, хаос и т.д.*) [88,90,536].

С ***80-90*** г.г. прошлого века существенно возрастает активность исследований в области динамического хаоса и проблемы сложности. С появлением новых поколений мощных ***ЭВМ*** и ***ПК*** развиваются фрактальная геометрия и геометрия, описывающая структуры динамического хаоса и позволяющая эффективно сжимать информацию при распознавании и хранении образов. Моделируется поведение однородных структур различных типов, а также нейрокомпьютеров, описывающих активные среды и социальные явления, распознавание образов и процессы обучения, проблемы искусственного интеллекта и медицины, генерации ценной информации и управление хаосом. ***ОС***-модели все активнее ассоциируются с синергетической проблематикой [536].

Синергетика – достаточно новое междисциплинарное научное направление, использующее нетрадиционные подходы для выявления общих закономерностей самоорганизации, становления структур, которые образуются в сложных системах в процессе перманентного потокового обмена веществом, энергией и информацией с окружающей средой в неравновесных условиях. Объектом исследований выступают сложные системы, состоящие из множества связанных элементов самой различной природы (*атомов, молекул, клеток, нейронов, механизмов и др.*). Следует отметить, что в отличие от кибернетики синергетика рассматривает не процессы управления и принципы организации, а в данном случае акцент делается на пространственно-временной структуре организации, на условиях ее возникновения, развития и самоусложнения. Синергетика исследует проблемы междисциплинарного диалога, выявляет особенности современных социальных, когнитивных и коммуникативных феноменов. В широком смысле под *синергетикой* понимают совокупность знаний, исходящих из самых различных образов, метафор, идей, фактов, представлений о порядке и хаосе, переходных, нестабильных, кооперативных, когерентных процессах, нелинейностях, о таких математических моделях как диссипативные структуры, ***ОС***-модели, фракталы, катастрофы, нейронные сети и др. Процесс формирования устойчивых регулярных пространственно-временных структур (*причем без внешних организующих воздействий*), называемый *самоорганизацией*, является одной из характерных черт динамики определенных типов ***ОС***-моделей. Именно в этом контексте аппарат ***ОС***-моделей достаточно широко применяется в синергетике для исследования проблем самоорганизации [536].

Собственно *синергетика* занимается поиском и изучением моделей сложных систем, вопросами возникновения порядка из хаоса и перехода от упорядоченных структур к хаотическим. Она возникла из объединения трех направлений исследований: разработки методов описания существенно неравновесных структур, разработки термодинамики открытых систем и определения качественных изменений решений нелинейных дифференциальных уравнений [536]. При изучении систем, их часто описывают системой дифференциальных уравнений. Представление решения этих уравнений как *движения* некоторой точки в пространстве с размерностью, равной числу переменных, называют фазовыми траекториями системы. Поведение *фазовой траектории* в смысле устойчивости показывает, что существует несколько основных его типов, когда все решения системы в конечном счете сосредотачиваются на некотором подмножестве. Такое подмножество называется ***аттрактором. Аттрактор*** есть область притяжения – множество таких начальных точек, что с течением времени ***все*** фазовые траектории, начинающиеся в них, стремятся именно к этому аттрактору. Основными типами аттракторов являются устойчивые предельные точки, устойчивые циклы и торы. Движение точки в таких случаях имеет периодический или квазипериодический характер. Существуют также и ха-

рактерные только для диссипативных систем так называемые ***странные аттракторы***, которые *(в отличие от обычных)* не являются подмногообразиями фазового пространства, и движение точки на них является *неустойчивым*, любые две траектории на нем всегда расходятся, малое изменение начальных данных приводит к *различным* путям развития. А именно, динамика систем со *странными аттракторами* является хаотической.

Во многих исследуемых системах предполагается ограниченность числа фазовых переменных. Однако более близкими к реальности являются *распределенные системы* с бесконечномерным фазовым пространством, типичным примером которых являются активные среды. Исследования показывают, что в таких системах могут существовать конечномерные аттракторы. Существование бесконечномерных аттракторов пока еще не исследовано в достаточной степени [536]. В ряде случаев в среде можно обнаружить либо инициировать возникновение ***спиральных*** волн. Все такие спиральные волны обладают одинаковой частотой; при этом, центр спирали может перемещаться. Эксперименты на ***ОС-***моделях показали, что причиной появления спиральной волны может быть разрыв сложного фронта волны возбуждения, в основе их существования лежит исключительно свойство ***самоорганизации*** среды, не обусловленное внешним воздействием. Перемещение центра спиральной волны тоже является весьма примечательным свойством, так как является резонансом волны с некоторым внешним периодическим воздействием.

Вышеописанные структуры *(в рамках глобальных конфигураций **ОС-**моделей)* также способны взаимодействовать между собой. Например, в результате проведенных экспериментов на ***ОС-***моделях были отмечены эффекты подавления одного ведущего центра более высокочастотным. При этом, *неподвижные* спиральные волны способны к сосуществованию; тогда как, с другой стороны, мы можем определить две перемещающиеся спиральные волны, которые при столкновении аннигилируют. Такого характера взаимодействия позволяют говорить о возможности построении в ***ОС-***моделях на основе подобных структур логических элементов, из которых строятся вычислительные устройства. Весьма интересными представляются и вопросы исследования аттракторов в ***ОС-***моделях.

Хаос – составляющая сложного поведения нелинейных систем. Между тем, имеет место также не поддающееся интуитивному осознанию явление, которое называют ***антихаосом.*** Оно выражается в том, что некоторые довольно беспорядочные системы в процессе своего развития спонтанно «*кристаллизуются*», приобретая довольно высокую степень упорядоченности. Ряд исследователей предполагает, что антихаос играет важную роль в биологическом развитии, эволюции и ряде других феноменов [526]. При этом, имеется ряд аргументов в пользу того, что наряду с хорошо изученными тремя типами поведения динамических систем – стационарными состояниями, периодическими и квазипериодическими колебаниями, а также хаосом, существует и четвертый, *специфический* тип поведения на границе между регулярным движением и хаосом. Было замечено, что на такой границе могут иметь место процессы, подобные процессам обработки информации и эволюции. В противоположность динамическому *хаосу*, рассматриваемое явление, именуемое иногда ***сложностью***, возникает в системах, состоящих из большого числа взаимодействующих элементов. Такие системы часто не только демонстрируют четвертый тип поведения, но в определенной мере обладают и адаптивными свойствами. В качестве одного из типичных примеров, демонстрирующих ряд общих свойств динамических систем на кромке хаоса, можно в полной мере рассматривать и ***ОС-***модели.

В частности, в качестве простого примера можно привести игру «***Жизнь***», представляющую собой классическую ***2-ОС.*** Совокупность правил такой модели *(т.е. ее параметров системы)* такова, что ее динамика находится в узком диапазоне между областями устойчивости и хаоса. В данной ***ОС-***модели наблюдается поведение, похожее на «*естественные*» жизненные процессы. При этом, на основе анализа генерируемых моделью объектов была доказана эквивалентность игры «***Жизнь***» универсальной машине Тьюринга и,

тем самым, доказано наличие в ней процессов, эквивалентных универсальным вычислениям. Наряду с данной моделью имеется немало других ***ОС-***моделей, чья динамика находится в узком диапазоне между областями устойчивости и хаоса. И в этом отношении ***ОС-***модели могут представить самый непосредственный интерес.

По аналогии явлению хаотического движения в нелинейных системах и был присвоен термин ***детерминированный хаос.*** Наблюдаемое хаотическое поведение возникает не из-за внешних источников, не из-за большого числа степеней свободы и не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой. Оно порождается собственной динамикой нелинейной детерминированной системы. Предсказать поведения траекторий хаотических систем на длительное время невозможно, ибо чувствительность к начальным условиям высока, а начальные условия как в физических экспериментах, так и при компьютерном моделировании можно задать лишь с определенной точностью. В то же время хаотические системы могут одновременно демонстрировать и хорошую управляемость и удивительную пластичность – система чутко реагирует на внешние воздействия, сохраняя при этом тип движения. По мнению многих исследователей [536,546,547] сочетание управляемости и пластичности лежит в основе механизмов надежного и гибкого реагирования на возмущения и управляющие воздействия сложных систем, вполне успешно функционирующим в изменчивой среде.

В общем случае динамические траектории ***ОС-***моделей достаточно хаотичны, не могут быть предсказаны на большие промежутки времени. Прогноз движения вдоль данных траекторий становится все более и более неопределенным по мере удаления от начальных условий *(конфигураций).* С точки зрения теории информации это означает, что ***ОС-***модель сама порождает информацию и скорость создания информации тем выше, чем больше хаотичность модели. А так как ***ОС-***модель создает информацию, то ее содержат и динамические траектории модели. На этом пути возникла идея использования таких траекторий для записи, хранения и поиска информации. Показано [536,546,547], что таким образом организованная информация запоминается и хранится в виде траекторий динамической системы и обладает свойствами ассоциативности. Таким образом, и ***ОС-***модели могут оказаться достаточно эффективными для приложений указанных технологий по хранению и ассоциативному поиску информации, передаче и защите информации и др. Все это и стимулирует активные исследования хаотических систем, к которым в определенной мере относятся и ***ОС-***модели. Конкретные примеры применения феномена ***хаоса*** в информационных и коммуникационных технологиях как на основе ***ОС-***моделей, так и других типов динамических систем [536,546,547] дают представление о том, как с помощью хаоса можно решать и созидательные задачи.

В последние пару десятилетий уделяется особое внимание исследованию *системных* механизмов возникновения катастроф. На платформе нелинейной динамики в решении данной проблемы был достигнут довольно существенный прогресс, связанный, прежде всего, с разработкой теории самоорганизованной критичности. Модели данной теории проще описывать не на языке дифференциальных уравнений, а на языке специального класса однородных структур с внешним шумом. В контексте выявления механизма возникновения катастроф на конкретных примерах рассматриваются перспективы применения ***ОС-***моделей и в горной промышленности [536].

ОС-модели логистики и урбанистики. Проблемы логистики являются достаточно важными во многих прикладных областях, включая вопросы урбанистики и транспорта. В то же время эти проблемы в целом достаточно трудны, и для их исследования широко используется компьютерное моделирование. Однако, такое моделирование задач логистики требует большого количества процессорного времени и объема памяти. С другой стороны, динамика *трафика* описывается параллельными алгоритмами, реализуемыми на параллельных компьютерах с высокой эффективностью. И в этом отношении имен-

но ***ОС*** *(как модель параллельных вычислений)* представляют особый интерес, что и привлекло к ним большое внимание при исследовании ряда трафиков. В этой связи цель данного пункта состоит в том, чтобы обратить внимание на ряд наиболее перспективных и интересных подходов к симулированию проблем трафика на основе ***ОС-***моделей, представляющих значительный прикладной интерес в логистике и урбанистике, учитывая то немаловажное обстоятельство, что данные ***ОС-***подходы лежат в русле основных математических методов моделирования транспортных потоков [536].

Так, ***Ю.Я. Хунт*** на основе ***ОС-***моделей предложил весьма интересный подход, который позволяет определять некоторые новые методы вычисления пропускной способности железных дорог Балтийского региона бывшего ***СССР*** *(Россия, Литва, Латвия и Эстония)* [497]. Встраивая соответствующие правила в ***ОС-***модель, мы можем симулировать много видов сложного поведения основных режимов железных дорог Балтийского региона. Так, предварительные наработки показывают, что данный подход в сочетании с компьютерным моделированием позволяет успешно анализировать заданные исходные данные *(количественные, статистические, динамические и аналитические)* для принятия оптимальных решений по дальнейшему развитию пропускной способности железных дорог Балтийского региона. При этом, некоторые полученные рекомендации уже внедрены.

Моделированию дорожного трафика в настоящее время уделяется большое внимание. С одной стороны, управление трафиком в городской среде является критическим для транспортной политики и дорожного планирования. С другой стороны, коллективное поведение большого количества транспортных средств, взаимно взаимодействующих, весьма интересно с физической точки зрения. С этой точки зрения ***ОС-***модели, в которых автомобильная динамика упрощена, сохраняя лишь основные особенности, представляются нам достаточно убедительными моделями для описания систем трафика. В этой связи ряд авторов использовали ***ОС-***подход для моделирования городского трафика. В частности, ***Б. Чопард*** и его коллеги из университета Женевы предложили довольно простую ***ОС-***модель для городского трафика в условиях города Женевы. В такой модели пересечения дорог реализованы в виде кольцевых транспортных развязок. Авторы исследовали универсальные свойства полученной модели и сравнили числовые результаты моделирования с аналитическими. Показано, что динамика хорошо описывается в терминах очередей, формируемых на перекрестках. Данная модель была применена к городу Женева и на ней исследовано время, необходимое для поездки испытуемого автомобиля из одной точки сети в другую. Показано, что транспортный поток обнаруживает явный гистерезис. Числовые результаты на данной модели были получены на ЭВМ Connection Machine ***CM-200*** *(для города Манхэттэн)* и на ***IBM-SP2*** с ***14*** процессорами *(для города Женева)*. На сегодня создан ряд компьютерных симуляторов, демонстрирующих моделирование потоков движения на основе ***ОС-***моделей, которые допускают настройку на тот либо иной режим движения транспорта [536].

А. Дупис и другие предложили новую двумерную ***ОС-***модель для описания городского трафика [498]. Их подход дает недорогое и простое описание городского трафика наряду с поддержкой сложной глобальной динамики. На параллельном компьютере авторы исследуют параллельную работу и эффективность своего ***ОС-***имитатора. На этом пути получен ряд полезных практических рекомендаций по трафику г. Женева *(Швейцария)*. В частности, предложена динамическая схема, описывающая поведение дорожной сети. В [499] предложена ***ОС-***модель транспортного трафика в городах, комбинируя *(и соответственно модифицируя)* идеи, заимствованные из ***BML-***модели городского трафика и ***NS-***модели магистрального трафика. К настоящему времени имеется целый ряд интересных работ по применению ***ОС-***моделей к симулированию дорожного трафика. Был достигнут значительный прогресс в ряде прикладных областей, связанных с проблемами трафика, и сформулированы новые темы для дальнейших исследований в этом нап-

равлении. Наконец, книга [500] имеет дело с современными аспектами теории трафика и ее приложениями к реальным мировым проблемам. Охват тем достаточно широк – от микроскопического и ***ОС-***моделирования потоков трафика до загрязнения воздуха на городских улицах, связанного с интенсивным транспортным движением.

Потоки трафика демонстрируют разнообразие коллективного поведения, типичного в ***децентрализованных*** системах. В таких системах упорядоченные конфигурации могут возникать без централизованного управления. На базе известного языка ***Logo*** была создана его версия ***StarLogo*** с массовым параллелизмом, которая представляет собой программную среду моделирования для исследования функционирования *децентрализованных* систем. На ее основе можно эффективно симулировать многие явления реальной жизни, включая ***ОС-***модели потоков трафика и пробок. Для детального ознакомления с проблематикой рекомендуем сайт ***http://cuiwww.unige.ch/~chopard/Traffic/traffic.html.*** Немало интересных вопросов исследования трафика и транспортных проблем на основе ***ОС-***моделей обсуждалось на конференции [360] и на ряде других форумов [536].

Довольно интересный компьютерный имитатор трафика был разработан в Японии на основе ***ОС-***концепции и стохастической скоростной модели ***(Hikaru S.*** *и др.).* Так как для него вычислительные затраты весьма существенны, то для имитатора был реализован параллельный режим выполнения на кластерной компьютерной системе. С этой целью вся предметная область делится на подобласти, затем обработку этих подобластей производят ПК. Полученные числовые результаты показывают, что предложенная модель имеет относительно неплохую эффективность в режиме распараллеливания [536].

Подход на основе ***ОС-***моделей используется для исследования и симулирования целого ряда задач как в городском планировании, так и в ряде других более экзотических для ***ОС-***моделей областях: география, планирование ландшафта, история и др. [213,216,217, 385,502-504]. Достаточно интересным представляется предложенный ***Г.Г. Малинецким*** и ***А.Я. Темкиной*** подход к симулированию роста и взаимодействия городов с использованием *необратимых* ***ОС-***моделей. С целым рядом других интересных приложений подхода на основе ***ОС-***моделей в городском планировании можно ознакомиться в [360,536].

<u>ОС-модели в экологии.</u> Ряд исследователей использовали подход на основе ***ОС-***моделей для симулирования в ***экологии.*** Наметился существенный рост числа публикаций, имеющих дело с ***ОС-***моделями и симулированием в экологии [505-514]. Между тем, имеются и вопросы о том, как различные аспекты ***ОС-***подхода затрагивают его полезность для экологических моделей. Данные вопросы достаточно детально обсуждаются в интересных работах [505,506,510-514]. Главный вопрос, к которому нужно обратиться – вопрос о синхронности ***ОС-***моделей. В [505] и др. отмечается, что *одновременное* обновление всех элементарных автоматов имеет разногласия с *локальностью* взаимодействия, составляющего одну из сильных сторон ***ОС-***моделей. Показано, что изменение определения ***ОС-***модели с учетом *асинхронного* обновление элементарных автоматов может драматично изменить поведение модели в целом. В частности, часто интересная структура, обнаруженная в динамике ***ОС-***модели, фактически, артефакт синхронного обновления [512].

Однако, несмотря на все вопросы, связанные с применимостью подхода на основе ***ОС-***моделей к экологическому симулированию, на сегодня мы имеем целый ряд довольно интересных экологических ***ОС-***моделей. В частности, в работах [425,502] рассматриваются ландшафтные проблемы и связанные с ними интересные экологические вопросы в контексте ***ОС-***моделирования, имеются интересные попытки построения математических моделей землепользования на основе ***ОС-***концепции [536]. ***ОС*** ряда типов, прежде всего, стохастические как дискретные (*по пространству, состояниям элементарных автоматов и времени*) динамические системы успешно используются и для моделирования динамики растительного покрова. В частности, ***H. Balzter*** и соавторы использовали ***ОС-***подход для моделирования динамики трех видов растительного покрова, в то время как

D. Logofet и ***T. Lesnaya*** на основе подобного подхода исследовали вопросы моделирования сукцессии лесов [536]. Имеются и другие интересные работы в этом направлении. Так, модельный подход широко используется для решения агроэкологических задач и оптимизации природопользования. Проведен достаточно детальный анализ количественных методов описания динамики экологических систем, показаны возможности агроэкологических моделей при составлении агроэкологических прогнозов. Между тем, балансовые модели, являющиеся основным инструментом исследования динамики гетерогенных систем, не способны передать смену их состояний и изменение кинетических характеристик. Именно поэтому в качестве альтернативы и были предложены автоматные модели с дискретно-переменными скоростными коэффициентами, в качестве одного класса из которых и являются ***ОС-***модели [536].

Для исследования целого ряда практически важных проблем, относящихся к динамике развития экосистем, достаточно широко применяется модельный подход на основе интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений, например, для моделирования разнообразных биологических сообществ. В целом, модели развития экосистем можно подразделить на два больших класса, а именно:

непрерывные (*на основе обыкновенных дифференциальных уравнений для сосредоточенных и дифференциальных уравнений в частных производных для пространственно-распределенных систем*);

дискретные (*на основе систем алгебраических уравнений, которые в большинстве случаев можно получить дискретизацией дифференциальных уравнений; а в пространственно-распределенном случае в качестве таковых выступают именно* ***ОС-****модели*).

Между тем, в любом случае перед применением моделей любого из вышеуказанных типов необходимо доказать их адекватность моделируемой системе, для чего используются хорошо известные методики, в частности, ретроспективный анализ [536].

Как уже отмечалось, ***ОС-***концепция может применяться для моделирования пространственно распределенных физических систем в качестве некоей альтернативы к подходу на основе диффуравнений в частных производных. В работе [376] для симулирования процесса биовосстановления загрязненных почв используется одна разновидность ***ОС-***модели – макроскопические клеточные автоматы. Предложенная ***ОС-***модель программно реализована с выполнением на ЭВМ параллельной архитектуры ***MIMD-***типа. Рассмотрено различие моделирования на основе ***ОС-***концепции и диффуравнений в частных производных. Моделирование данной общезначимой проблемы является и важной социально-экономической задачей, где прогресс в моделировании может существенно улучшить эффективность методики дезактивации загрязненных почв. В ряде экспериментов на основе ***ОС-***моделей симулировался такой важный с экологической точки зрения процесс как прогрессивное обезлесение дренажа в результате расширения сельскохозяйственных угодий. Интересные ***ОС-***модели симуляции лесных пожаров позволяют решать важные задачи предсказания их поведения. Элементы ***ОС-***подхода используются для формирования прогнозных нечетких значений урожайности и предпрогнозного анализа объемов стока горных рек. В целом, использование ***ОС-***моделей представляется нам достаточно перспективным при исследовании целого ряда экологических и эколого-экономических проблем, что обусловлено длительностью экологических процессов, делающей их экспериментальное исследование практически невозможным. В этом случае можно ограничиться моделированием динамики экологических систем. Созданы и ***ОС-***модели эволюционного картографирования ландшафтов Восточной Сибири. Были предложены интересные подходы к симулированию процессов *структурообразования* в лесах Пермского края на основе уравнений реакции-диффузии и ***ОС-***моделей. Имеются климатологические проекты по определению зависимостей между аномальными явлениями планетарной климатической системы на основе ***ОС-***моделей. В рамках между-

народного проекта ***LUCC*** *(международной геосферно-биосферной программы)* проводились систематическое обобщение и анализ результатов исследований о причинах *глобальных* изменений в использовании земельных угодий в сопоставлении с данными по *динамике* глобальных изменений растительного покрова. В рамках данного проекта были реализованы серьезные инициативы по примененииюи новых технологий, в частности, моделирования на основе ***ОС-***концепции. Предложены достаточно интересные подходы к системному анализу и разработке математического обеспечения для прогнозирования экологической безопасности на основе ***ОС-***моделей [536].

Из отечественных разработок в данном направлении *(и даже в более широком контексте)* можно отметить компьютерную систему для моделирования и трехмерной визуализации динамических процессов в реальном масштабе времени ***(СПИИ****, С-кт.-Петербург)*. Главной особенностью этой системы является использование быстрых математических алгоритмов, разработанных на основе ***ОС-***теории, биологического подхода совместно с оригинальной технологией визуализации в реальном масштабе времени. Данная система может использоваться для экологического моделирования, создания ***3-***мерных карт местности в реальном масштабе времени, распознавания образов и т.д. Достаточно интересные результаты можно отметить и по применению ***ОС-***моделей для создания географических информационных систем, в частности, городской географии, как примера практического применения методов пространственного подразделения и анализа [536].

ОС-модели в вулканологии. Уделяется внимание использованию ***ОС-***концепции даже в такой, на первый взгляд, далекой от ***ТОС-***проблематики области, как *вулканология* [397-399]. Известно, что ***ОС-***модели, обладающие высокой степенью параллелизма, являются *альтернативой* дифференциальным уравнениям в задачах моделирования и симулирования целого ряда сложных систем, которые могут быть описаны в терминах *локальных* взаимодействий составляющих их компонент. При этом, ***ОС-***модель легко и естественно реализуема на параллельных компьютерах и использует возможности параллелизма без существенных ограничений. Прогноз потоков лавы был преобладающе ограниченным качественными аспектами до использования методов, связанных с компьютерным моделированием. Действительно, в реальных условиях, исследующих поток лавы *аналитически*, применение дифференциальных уравнений, практически, невозможно, кроме очень простых случаев. Для устранения связанных с этим сложностей был использован подход, базирующийся на концепции ***ОС-***моделирования. В частности, были разработаны трехмерные ***ОС-***модели, однако временные издержки вычислений по этим моделям не позволили использовать их для больших потоков лавы, что потребовало упростить их путем сведения размерности к двум. Таким образом, подход на основе ***ОС-***моделирования, когда пространство и время считают дискретными, преодолевает многие из сложностей, связанных с применением дифференциальных уравнений. Серьезные успехи в этом направлении были получены итальянскими специалистами. Так, в работе [397] представлена ***ОС-***модель для симуляции потоков лавы с применением ее к моделированию извержений вулкана Этна в ***1986-87, 1991-92***. Важная задача вулканологии состоит в способности моделирования вулканических явлений для достоверного предсказания их потенциальной опасности. И в этом отношении ***модельный*** подход имеет первостепенное значение, позволяя получать вполне приемлемые результаты.

Поток лавы рассматривается как динамическая система, основанная на локальных взаимодействиях с дискретным временем и пространством, где пространство представлено квадратными ячейками. Каждая ячейка характеризуется определенными значениями *(состояниями)* следующих выбранных физических параметров – высота и толщина лавы, температура лавы и оттоки лавы к соседним ячейкам. Реология лавы изучается и косвенно через ее воздействие на толщину лавы. Граничные значения, определяющие моделирование, описывают основную топографию, скорость вытекания лавы, темпера-

туру извержения, температуру перехода лавы в твердое состояние и реологию. ***ОС-***модель, предложенная для исследования потоков лавы, была реализована и с программой ***SCIARA*** на языке ***Pascal*** для ***ПК Macintosh*** с выводом результатов на экран в картографической форме. Данная ***ОС-***модель была апробирована на данных роста поля потока Этны за ***1986-87*** и ***1991-93*** г. Даже при условии, что набор данных являлся однородным, модельный и реальный поля потока показывают поразительно подобные совпадения форм роста. Дальнейшее развитие ***ОС-***модели для исследования поведения обширных потоков лавы было представлено в [399] применительно и к вулканической активности вулкана Этна. В настоящее время существует ряд и других подходов к моделированию описанных явлений [536]**.** В частности**,** ***Ишихара*** и др. [398]**,** используя несколько подобный подход на основе ***ОС-***концепции, базирующийся на уравнениях Навье-Стокса, получили ряд важных числовых характеристик. Однако их подход неприменим к многочисленным потокам либо к потокам, которые выталкиваются периодически. Достаточно интересным представляется и применение ***ОС-***моделей в сочетании с их компьютерной реализацией для симулирования оползней в горных местностях [401].

С процессами, связанными с вулканической активностью, весьма тесно связаны и сейсмологические процессы. В процессе развития естествознания была осознана стохастичность многих сложных процессов и начато изучение больших нелинейных систем. Теории катастроф, хаоса, сложности и синергетика представляют собой разные методологические платформы, методами которых описывается и исследуется поведение нелинейных динамических систем. При этом, геофизика, обладая длинными рядами наблюдательных данных, не только существенно влияла на развитие этого мировоззрения, но и активно разрабатывала и практически применяла идеи и методы прогноза катастроф, определения риска и возможных ущербов, стратегий принятия решений [536]. Так, для исследования *сейсмических* процессов довольно широко используются пружинно-блочные модели разломов и модели типа кучи песка на основе однородных структур. Данные модели обладают рядом общих свойств, включая самоорганизованно критическими свойствами. При этом, существующая гипотеза о невозможности прогноза в самоорганизованно критических системах была перенесена на сейсмические процессы и породила сомнения в возможности прогноза сильных землетрясений. На сегодня данная гипотеза не подтверждена**,** но и не опровергнута**.**

В этой связи ***И.В. Кузнецовым*** и другими проводятся исследования *обратной* задачи для ***ОС-***моделей, симулирующих динамику указанных сейсмических процессов [536]. Точнее, исследуется возможность восстановления управляющих параметров ***ОС-***модели на основе полученного множества событий, сгенерированного данной моделью. После чего восстановленные значения используются для дальнейшего прогноза событий. Полученные на сегодня алгоритмы восстановления пока не позволяют решать обратную задачу прогнозирования в широком классе ***ОС-***моделей**,** тем более для прогноза реальной сейсмичности**.** Между тем, они, пожалуй, на основе более детального исследования таких ***ОС-***моделей позволят по динамике системы определять ее класс и специфичность, а также развить новый подход к проблеме прогнозирования в нелинейных диссипативных системах, сочетающий достаточно грубую**,** статистическую оценку управляющих параметров с функционалами, характерными для подготовки критического перехода в системах данного класса [536]. При этом следует иметь ввиду, что подобные исследования**,** ориентированные на сейсмологические приложения**,** могут иметь существенно более широкую применимость в задачах, рассматриваемых с точки зрения синергетики.

Успешное применение синергетики в современной геомеханике в определенной мере связано с использованием методологии, базирующейся на ***ОС-***моделях. Это обусловлено тем важным обстоятельством, что ***ОС-***модели обеспечивают удовлетворительное симулирование явлений, исследуемых в геомеханике, для которых механизм не известен.

В такой ситуации строгий математический аппарат непригоден и именно ***ОС-***модели представляют собой наиболее эффективный аппарат исследования [536].

ОС-модели в экономике. К решению современных проблем *нелинейной* экономической динамики *(экономической синергетики)*, таких как анализ процессов, происходящих на рынках капитала под влиянием объективных экономических условий и субъективных решений участников рынка, теории эффективного, переходного и когерентного рынков, прогнозирования рыночной конъюнктуры, изменчивости рынков, теории экономических циклов, экономических кризисов, экономического хаоса и т.д., наряду с систематическим применением фрактального анализа привлекаются также прикладная нелинейная динамика, теория ***ОС-***моделей, нечеткая логика, нейронные сети и другие новейшие математические теории. Известны работы по использованию ***ОС-***моделей в банковских технологиях, например, в качестве модели диффузии инноваций для симулирования распространения интернет-банкинга. Результаты анализа современных методов искусственного интеллекта применительно к задачам *календарного* планирования единичного производства показали, что в этом направлении применима и ***ОС-***концепция. ***ОС-***модельный подход все шире используются в качестве инструмента эволюционного симулирования экономической динамики. В настоящее время для представления математических моделей социально-экономических систем все шире наряду с классическими методами используются и неклассические, в частности, и ***ОС-***модели, позволяющие учитывать пространственную структуру систем. В качестве одного из современных концептуальных подходов к описанию нелинейных экономических процессов на основе ***ОС-***концепции исследуются законы эволюции экономических структур на макро- и микроуровне, жизненные циклы экономических структур, товаров, технологий с позиций эволюционной экономики. В число современных методов анализа финансовых и экономических процессов все прочнее входят методы на основе ***ОС-***концепции [536]. В частности, ***С. Беляков*** предложил интересные математическую модель и метод для анализа рынка ценных бумаг, включая прогнозирование котировки акций ряда ведущих российских компаний. Данная модель базируется на концепции *линейных* ***ОС***, которые имеют ряд преимуществ перед традиционными классическими моделями. В исследованиях проблем нелинейной экономической динамики *(экономической синергетики)* среди современных математических средств все шире используются и ***ОС-***модели [536].

ОС-модели в социологии. Весьма широко ***ОС-***концепция используется также для исследования различного типа автоматных моделей коллективного поведения [177,196,201]. В задачах моделирования социальных явлений сегодня довольно широко применяются классические математические методы, например, описание динамики процесса дифференциальными уравнениями, однако появились уже и первые достаточно интересные модели социальных явлений, базирующиеся на основе ***ОС-***концепции. Подобная концепция используется и для построения моделей формирования общественного мнения, включая моделирование электоральных процессов. Более того, оказывается, что ***ОС-***модели для прогнозирования экономических временных рядов имеют даже определенные преимущества перед классическими методами. По мнению некоторых исследователей ***ОС-***подход позволяет строить существенно более реалистические модели рынка, чем в случае традиционных подходов к исследованию диффузии инноваций. Главное достоинство данного подхода заключается в возможности эмпирической оценки фактора вероятности принятия новинки. Для этого можно использовать данные социологических опросов и материалы фокус-групп. Другое преимущество предлагаемого подхода заключается в возможности получения оценок необходимого числа сторонников и их пространственного распределения в начальный момент маркетинговой кампании. На основе ***ОС-***моделей предпринимаются попытки разработки концептуального подхода к моделированию процессов социальной глобализации, в частности, определения общих

черт систем, основанных на ***ОС***-моделях, и общества, оценки возможности моделирования общественных процессов в рамках таких моделей, а также определения в их терминологии такого широко дебатируемого социального явления как *глобализация*. Имеются интересные попытки применения ***ОС*** к моделированию распространения слухов и эпидемий. Более того, предлагается в отличие от традиционных подходов дать и математическое описание даже таким трудно формализуемым процессам как самоорганизация населения, образование и рост городов или даже государств на основе ***ОС***-моделирования. Исходя из ***ОС***-концепции, предпринимаются попытки моделирования общества как самоорганизующейся системы. На основе ***ОС***-моделей рассматриваются вопросы о возможности проведения численных экспериментов, моделирующих движение неорганизованной группы людей. На основе ***ОС***-концепции строятся модели получения предпрогнозной информации в торговле и т.д. В настоящее время ***ОС***-подход все шире применяется для моделирования различного типа социальных процессов. Имеется ряд попыток применения ***ОС***-подхода к социальным феноменам и даже антропологии. Действительно, принятие гипотезы о фрактальной природе общества сразу же накладывает определенные ограничения на методы его анализа. В таком случае, если мы хотим учитывать пространственную составляющую социальных процессов, то и метод их математического анализа должен коренным образом измениться. Придется прибегнуть к такому аппарату исследований, как ***ОС***-модели и технике программирования на реакционных решетках, где эволюция состояния ячейки полностью определяется состоянием ее ближайших соседей. Ряд подходов подтверждают возможность использования ***ОС***-концепции в математическом моделировании социально-этнических процессов. Представлена достаточно интересная ***ОС***-модель, имитирующая поведение социальной системы на индивидуальном уровне [536].

Определенный интерес представляют попытки применения ***ОС***-подхода к моделированию электорального процесса. Так, в цикле работ ***Т. Брауна*** рассматривается целый ряд контекстуальных моделей электорального процесса. Он считает, что уже классические ***ОС***-модели вполне приемлемы для этих целей, когда избирательные предпочтения индивида определяются установками его ближайшего окружения. Так, одна из таких ***ОС***-моделей предполагает, что индивид принимает решение голосовать в момент ***t+1*** за демократов или республиканцев согласно правилу простого большинства. Учитываются взгляды индивида и четырех его ближайших соседей в момент ***t*** (*окрестность соседства* ***Неймана***). Если из пяти человек трое или больше поддерживают демократов, индивид также голосует за демократов. Если большинство составляют республиканцы, индивид и в этом случае разделяет точку зрения большинства. В данном случае ***ОС***-модель имеет два состояния, а именно: ***1 –*** голосование за республиканцев и ***0 –*** голосование за демократов. ***Т. Браун*** и его коллеги провели вычислительные эксперименты на конечной ***ОС***-модели размером ***128x128*** при случайной начальной конфигурации голосов. Динамика ***ОС***-модели исследовалась на большом временном интервале – до ***20000*** итераций. Оказалось, что партийная борьба приводит к весьма сложным конфигурациям распределения голосов, существенно зависящим от их начального распределения [536].

Одной из проблем, возникающей при движении группы людей, является образование «заторов» или «пробок» при наличии некоторых препятствий на пути движения такой группы. Если по каким-то причинам такие препятствия должны обязательно находиться на пути людей, то кажется целесообразным заранее предсказать, насколько сильную помеху они создадут. Поскольку реальный эксперимент требует значительных затрат, а иногда в качестве экспериментальных данных могут выступать лишь результаты уже произошедших происшествий, подчас с трагическим исходом, то продуктивной может оказаться идея проведения численных экспериментов, моделирующих подобные ситуации. Для этих целей, в частности, могут быть использованы подходы на основе ***ОС***-мо-

делей, относящихся к классу решеточных газов. Построены имитационные модели распространения паники, в рамках концепции мультиагентных систем на основе ***ОС-***модели созданы их новые виды, позволяющие симулировать динамику дифференцированного по экономическим, социально-психологическим и ролевым характеристикам субъектов социума для различных сценариев заражения, оздоровления, профилактики [536].

В настоящее время на стадии становления находится ***компьютерная социология*** [536], базирующаяся на использовании возможностей компьютеров для решения социологических теоретических, эмпирических и практических задач. Это направление возникло как средство разработки и проверки социологических теорий, измерения социальных явлений, определения принципов и закономерностей строения и функционирования социальных процессов, социальных систем и их прогнозирования. Оно используется и для разработки рекомендаций по управлению различными социальными явлениями, процессами, социальными системами с использованием компьютерных моделей, предназначенных для проведения имитационного компьютерного моделирования. По мнению ряда исследователей *компьютерная социология* представляет собой специфический метод исследования. Компьютерные модели в ней подразделяются на ***3*** основных класса, а именно: ***(1)*** основанные на классической или компьютерной социологической теории, ***(2)*** основанные на предварительном эмпирическом анализе собранных данных без связи с какой-либо теорией, ***(3)*** из других областей знания, например, ***ОС-***модели, нейронные сети, модели детерминированного хаоса, сложности и т.д. При этом, следует отметить, что главным теоретическим понятием компьютерной социологии является понятие «*искусственного общества*» – реально функционирующей компьютерной системы, состоящей из одной или нескольких компьютерных моделей для проведения имитационного компьютерного моделирования. Таким образом, в отличие от традиционных социологических теорий, существующих в форме текстов, или математических социологических теорий, существующих в виде аксиоматики, математических формул, теорем, в компьютерной социологии ***теория –*** это реально функционирующая компьютерная система, в частности, базирующаяся на ***ОС-***концепции. Составной частью этой концепции являются алгоритмы для математического моделирования социальных систем разного уровня иерархии, базирующиеся на правилах функционирования ***ОС-***моделей.

Растет интерес к ***ОС-***моделям, используемым для исследования распространения идей, эмоций, для изучения вопроса влиянии на динамику группы таких формальных признаков, как величина популяции, возможности установления контактов и степень разнообразия элементов популяции. При этом, следует иметь в виду, что ***ОС-***среда с некоторыми свойствами, подлежащими изучению, и изменением правил локального перехода единичных автоматов не всегда предсказуема, а вопрос о правильности ее поведения или результатов просто некорректен, что требует тщательной верификации.

Широкий круг социально-экономических явлений обладает характерной чертой такой как ***лавинообразность,*** объединяющей их в один класс. Процессы вышеуказанного типа весьма серьезно влияют на социально-экономическую и политическую безопасность государства и общества, особенно в условиях нестабильности, широкого распространения инфотехнологий и влияния фактора глобализации. На сегодня не существует достаточно надежных способов предсказания и управления лавинообразными социально-экономическими процессами ***(ЛСЭП)*** и причин тому множество. В этом контексте достаточно интересным представляется подход к созданию математической теории ***ЛСЭП,*** повышение на ее основе качества прогнозирования возникновения и развития данного типа процессов, предложенные ***В.Н. Данич.*** В частности, им созданы имитационные модели распространения паники, в рамках концепции мультиагентных систем на основе ***ОС-***моделей созданы их новые виды, позволяющие симулировать ***динамику*** дифферен-

цированного по важнейшим социально-экономическим характеристикам субъектов социума для различных сценариев заражения, оздоровления и профилактики [536].

В настоящее время в связи с бурным развитием сетевой инфотехнологии и формирующихся на ее основе социальных сетей наметилась тенденция их формального исследования. Под ***социальной*** сетью понимается множество персон, которые могут вступать во взаимодействие друг с другом. Понятие классических социальных сетей используется в социологии при изучении организационного поведения и межорганизационных отношений, распространения инфекционных заболеваний, горизонтальных связей и взаимной поддержки индивидов, распространения информации и организации информационных войн, изучении политических, культурных и научных связей. Такое использование можно определить как классические социальные сети в отличие от появившихся в последнее время виртуальных или онлайновых социальных сетей. В отличие от классической сети и социальной группы социальное сообщество, сформировавшееся в среде ***Internet (социальная сеть)*** допускает более активное и оперативное исследование, измерение и классификацию. Для анализа таких социальных сетей можно вполне успешно использовать развитые математические модели, включая и ***ОС-***модели [536].

По мнению целого ряда известных специалистов психология предоставляет множество проблем, которые могут решаться на основе использования синергетических моделей. Среди таких проблем можно, в частности, отметить возникновение тех или иных типов социальльного поведения, возникновение архетипов. Синергетическое моделирование позволяет выявлять наиболее важные параметры порядка и управляющие параметры. Так, симулирование поведения определенных типов ***ОС-***моделей дает возможность исследовать некоторые общие закономерности поведения коллектива индивидов в определенных условиях, что, в свою очередь, позволяет вырабатывать некоторые полезные рекомендации по управлению коллективом.

Между тем, недавно в результате взаимного интереса ученых-естественников и гуманитариев появилась концепция анализа политики как нелинейной системы. В значительной мере она представляет собой некую «*технократическую*» точку зрения из-за прямого переноса в сферу изучения политики понятий, чуждых методологии гуманитарных наук. Нелинейный анализ имеет особую направленность: показать на имитационных моделях, когда и при каких обстоятельствах международная система находится на грани хаоса, чреватого потрясениями или глобальными конфликтами. Для построения таких моделей, представляющих собой максимально детальный аналог реальности, используется достаточно сложный математический аппарат (*теория сложных систем, теория хаоса, ОС-концепция и др.*) и суперкомпьютеры. Предложены даже математические ***ОС-***модели в качестве примеров, иллюстрирующих некоторые вопросы философии [536].

Искусственная жизнь и ОС-модели. «Искусственная жизнь ***(Artificial Life – AL)*** **»** – исследования искусственных систем, демонстрирующих элементы характерного поведения естественных живых систем. Они хорошо дополняют традиционные биологические науки, заинтересованные в анализе живых организмов, пытаясь симулировать *жизнеподобное* поведение в компьютерах и других искусственных средах. ***AL*** рассматривает жизнь как свойство организации материи, а не свойство материи, которая организована таким образом. При этом, если классическая биология в значительной мере интересуется материальной стороной жизни, ***AL*** интересуется формальными основами жизни. Модели ***AL*** рассматривают живой организм как большую совокупность простых машин, по определенным правилам нелинейно взаимодействующих друг с другом, обеспечивая жизнеподобную глобальную динамику. В целом, многие концептуальные и философские проблемы, имеющие отношение к ***AL***, имеют непосредственные параллели с проблематикой сложных и эволюционных систем, кибернетикой и искусственным интеллектом.

Одной из важнейших составляющих естественной жизни является феномен ***самоорганизации,*** который должен быть присущ и моделям ***AL.*** Вообще говоря, под ***самоорганизацией*** понимается процесс, в результате которого многокомпонентные системы имеют тенденцию к достижению специфического состояния, множества циклических состояний либо маленького объема их пространства состояний без внешнего воздействия. Все механизмы, определяющие ее поведение, являются ***внутренними*** по отношению к системе **–** самоорганизация в противоположность внешне определенной организации. Таким образом, разумно потребовать, чтобы для системы, исследуемой на наличие феномена самоорганизации, ее порядок не может определяться специальными начальными состояниями, которые могли бы влиять на процесс ее развития. Поэтому, для обеспечения гарантии того, что система является самоорганизующейся, следует инициировать ее со случайных начальных состояний и наблюдать достигает ли она желаемого порядка или поведения аттрактора. Так, под ***аттрактором*** динамической системы понимается притягивающее, замкнутое инвариантное множество в ее фазовом пространстве. Актуальными проблемами теории аттракторов динамических систем являются исследование эффектов чувствительности по отношению к начальным условиям и оценивание размерностных характеристик инвариантных множеств**.** Как правило, чувствительность по отношению к начальным условиям на аттракторах сравнивается с классическими определениями неустойчивости по ***Ляпунову, Пуанкаре*** или ***Жуковскому.*** А так как ***ОС-***модели представляют собой специальный тип параллельных дискретных динамических систем, то и вопрос их аттракторов исследуется достаточно интенсивно [536].

В качестве двух различных типов систем**,** обладающих свойством ***самоорганизации*** в вышеуказанном смысле**,** можно рассматривать ***NK-***булевы сети ***Коффмана*** и дискретное логистическое уравнение. ***ОС-***модели можно отнести к той той же самой категории детерминированной, необратимой самоорганизации. Подобно ***NK-***сетям, ***ОС-***модель самоорганизуется исключительно согласно ее *локальной* функции перехода. В булевых сетях это обычно интерпретируется как моделирование некоторой закрытой *абстрактной* динамики **(***например, геномные эпистатические сети, химические реакции и т.д.***)**, тогда как в ***ОС-***моделях локальные правила перехода часто рассматриваются как моделирование некоей искусственной физики в искусственном топологическом пространстве**,** а конфигурации клеточной активации **(***циклы состояний***)** рассматриваются как эмергентные феномены. В частности, когда наблюдаемые последовательности конфигураций ведут себя подобно некоторым феноменам жизни **(***движение, самовоспроизведение, регенерация и т.д.***)**, то часто утверждается**,** что это представляет проявление искусственной жизни из искусственной материи [536].

Для искусственной физики с микропричинной связью установлены простые *локальные* правила перехода **(***состояние клетки полностью зависит от ее соседей согласно индекса соседства и их предыдущих состояний***)**, а наблюдаемые последовательности конфигураций в качестве искусственной жизни. Между тем**,** здесь имеет место одна очевидная проблема с интерпретацией такой аналогии **–** в реальном мире локальные правила, приводящие к некоторой физической причинной связи, генерирует все, что нас окружает, и живое, и неживое. В ***ОС-***мире же аргументы часто приводятся для обоснования искусственной жизни, но не для строгих ***критериев*** отличия искусственной жизни от искусственного неживого, также генерируемого такой искусственной физикой. Именно в данном направлении весьма желательна активизация исследований при использовании ***ОС-***моделей в качестве среды изучения феноменов, относящихся к искусственной жизни.

Здесь следует упомянуть еще одну из современых теорий определения жизни **–** теорию ***аутопоэза,*** представляющую собой одну из современных попыток выразить критерий жизни**.** Важными понятиями данной теории являются «***паттерн***» **(***конфигурация***)** и «***организация***»**.** При этом, под *паттерном* понимается некоторый тип структуры, характер-

ный для множества частных реализаций этой структуры, тогда как под ***организацией –*** частная реализация паттерна. ***Аутопоэтическая*** система находится в состоянии постоянной необратимой эволюции, поскольку обратимость связана с воспроизведением тех же следствий при одних воздействиях внешней среды, что отрицает автономность системы. Получая постоянную активацию со стороны среды, *аутопоэтическая* система каждый раз уникально отвечает на нее, образуя уникальную траекторию своего развития. Кроме естественного отбора, в эволюции ***аутопоэтических*** систем действует принцип естественного порядка, выражающийся законами сетевой и нелинейной организации систем, например, в форме дифференциальных уравнений либо ***OC-***моделей [536].

OC-подобные игры. Особое место среди прикладных аспектов ***TOC-****проблематики* занимают так называемые ***OC-***подобные игры, среди которых наиболее популярной является игра «***Жизнь***» американского математика ***Дж. Конуэя.*** Данная игра представляет собой бинарную классическую ***2-OC*** и была предложена в качестве формальной модели исследования ряда общих принципов развития некоторых абстрактных биологических сообществ. В настоящее время интерес к игре настолько велик, что ею увлекаются многие тысячи любителей и профессионалов во всем мире, а в ***США*** существует даже клуб любителей игры и издается специальный журнал, не считая многочисленных публикаций в различного рода изданиях, в том числе и электронные [150,166,168,172]. Для энтузиастов игры «*Жизнь*» предназначен ежеквартальный бюллетень (*автор и издатель* ***R.T. Wainwright)***, первый номер которого вышел в марте ***1971.*** Данная игра легко обобщается на ***3-***мерный случай и более общий, чем бинарный, алфавит состояний [536].

В процессе своего развития игра «***Жизнь***» превратилась в своего рода самостоятельный объект исследования (*чему во многом способствовало массовое распространение* ***ПК*** *и множество симулирующих игру программ*), привлекший к себе внимание целого ряда математиков-профессионалов, и в данном направлении было получено и множество интересных и разноплановых результатов [3,54,131,146], оказавших вполне определенное влияние и на развитие самой ***TOC-***проблематики. Подавляющее число результатов по этой игре и ее модификациям было получено посредством специальных компьютерных симулирующих программ, позволяющих представлять сам процесс исследования динамики игры в виде захватывающих цветных компьютерных фильмов. Такая возможность привлекает к данной и ей подобным ***OC-***играм многих пользователей ***ПК***, что не может не отразиться как на их дальнейшем развитии, так и на развитии самой ***TOC-***проблематики в целом. Весьма интересное обсуждение такого сложного феномена как «***биологическая жизнь***», проблемы искусственной жизни, а также вопросов самоорганизации в контексте ***OC-***моделей наряду с целым рядом других интересных биологически мотивированных тем, можно найти в курсе лекций [419] для университета Штата *Индиана* ***(США)*** по биологически-мотивированным вычислениям.

Между тем, сугубо теоретических результатов по данному типу ***OC-***моделей относительно немного. Они ограничиваются, насколько нам известно, нашими результатами по неконструируемости в такого типа ***OC-***моделях и по реализации в них *базовых* логических функций [3,54,409]. При этом, было показано, что игра «***Жизнь***» эквивалентна универсальной машине Тьюринга, что обусловлено наличием в ней процессов, эквивалентных универсальным вычислениям. Тогда как компьютерный анализ такой ***OC-***модели и целого ряда ее модификаций размерностей ***d=*****{*1,2,3*}** представлен достаточно широко. Естественно, простота формулировки данной ***OC-***модели позволяет просто реализовывать ее и вручную, не прибегая к помощи компьютера, на клеточной бумаге, однако отслеживать ее динамику на значительное число шагов весьма трудоемко и крайне невыразительно в визуальном отношении. Именно использование достаточно быстрых ЭВМ и позволило получить целый ряд весьма интересных динамических свойств данного типа ***OC-***моделей. Здесь же уместно отметить, что ряд результатов теоретического харак-

тера был получен именно с помощью компьютерного моделирования. Так, ***П. Ренделу*** [429] во многом именно таким подходом удалось погрузить ***МТ*** в среду игры «***Жизнь***». С результатами по данным ***ОС***-моделям и использованным для них программным симуляторам можно ознакомиться, например, в [8,146,168,172,409,429,536] и цитируемой в них литературе. В частности, интересная программа ***3D-Life*** для симуляции ***3D***-мерной игры «***Жизнь***» была создана ***Ф. Мэтью*** и распространяется бесплатно. Из других программных симуляторов игры «***Жизнь***» можно отметить такие как ***Life***, ***LifeLab***, ***CASim*** и ***Plife***. Одним из лучших отечественных симуляторов игры «***Жизнь***» следуют отметить и программу ***FAM Life***, обладающую богатыми возможностями настройки. Особенностью реализуемого ею алгоритма является использование побитного хранения клеток. Программа может обрабатывать более полумиллиона клеток, причем с достаточно высокой скоростью. Для ускорения работы применяется ***DirectX***. Достаточно много интересного в данном направлении можно получить и в ***Internet*** по ключевой фразе «***Game Life***».

Определенный интерес представляет и программа ***KukuLife С. Абрамова*** – расширение классической игры «***Жизнь***», которое допускает до ***8*** типов клеток и до ***8*** типов веществ. Рядом исследователей из ***ОИЯИ*** (г. Дубна) рассматривался класс ***ОС***-моделей с перестановочно инвариантными локальными правилами перехода, действующими на симметричных решетках. Было показано, что в бинарном случае такие локальные правила перехода представляют собой обобщение правил игры «***Жизнь***». Учитывая же инвариантность относительно переименований состояний можно дополнительно уменьшать число возможных локальных правил. Рассматривались также алгоритмические подходы к исследованию динамики ***ОС***-моделей с высокой симметрией [536].

Между тем, игра «***Жизнь***» интересна не только с точки зрения ее захватывающих игровых качеств, но и в качестве весьма интересной ***необратимой ОС***-модели, обладающей универсальностью, точнее на основе ее специфических конфигураций можно строить все логические элементы, обусловливающие универсальную вычислимость. Более того, конфигурации, возникающие в игре «***Жизнь***», очень точно воспроизводят возмущения течения поверхности потока жидкости, образованные механическим препятствием. Но и другие элементы динамики игры «***Жизнь***» имеют ряд интересных интерпретаций.

В этом контексте можно отметить и предложенный ***В.Н. Задорожным*** автомат ***Инь-Ян***, представляющий собой ***2-ОС*** с индексом соседства Мура и алфавитом ***A={0,1,2}***, чья локальная функция перехода *(как полагает автор)* приближенно имитирует диалектический закон единства и борьбы противоположностей. При этом, локальная функция определяется таким образом, чтобы популяции единичных автоматов в состояниях «***1***» и «***2***» конкурировали между собой, но не могли развиваться друг без друга [536]. Читателю в качестве полезного упражнения предлагается оценить для данной модели размер минимального блока, содержащего ***НКФ***, как это было сделано для игры «***Жизнь***».

Весьма интересны попытки применения ***ОС***-подхода к компьютерным играм намного более сложного типа. В частности, ***К. Доннингер*** – известный специалист в области создания программ для компьютерных шахмат, опираясь на потенциал уже имеющегося программно-аппаратного комплекса, уделяет все большее внимание компьютерной игре ***GO***, разрабатывая новые методы ее программной реализации с использованием ***ОС***-моделей и средств распознавания образов [536].

К данной тематике в определенной мере примыкает целый ряд работ ***Тоффоли***, ***Фредкина***, ***Беннетта***, ***Ландауэра***, ***Фейнмана*** и др., рассматривающих Вселенную как ***ОС***-модель. Особо следует отметить интересную работу ***М. Минского*** «Клеточный вакуум», в которой он показывает, что идея ***относительности*** имеет место и в ***ОС***-моделях, когда часы *(осцилляторы)* приближаются к скорости света – они замедляются, но не тем же самым образом, которым они это делают в непрерывном пространстве. В целом, данные

работы ориентированы на исследователей, интересующихся вычислительными аспектами физической Вселенной или физикой вычислений [536].

Действительно, теоретические модели клеточной Вселенной – довольно удобный математический формализм, но, с другой стороны, крайне неустойчивая философская концепция. Единственно разумной философской интерпретацией такой *клеточной* Вселенной представляется нам квантовый компьютер, базирующийся на концепции недетерминированной ***ОС***-модели. Такая модель будет функционировать в дискретном поле событий, т.е. в дискретном времени. Даже при бесконечном количестве клеток ее поведение будет весьма тривиальным, порождая, между тем, весьма сложное поведение.

Между тем, ***ОС***-модели использовались профессиональными математиками и любителями не только для изобретения многочисленных игр, не менее пристально их изучали как математический аппарат для научных целей. В силу их сетевой структуры и способности работать с большими количествами дискретных переменных эти математические структуры были признаны в качестве эффективной альтернативы дифференциальным уравнениям при симуляции сложных динамических систем.

ОС-модели в образовании. К вышесказанному непосредственно примыкает и вопрос по применению ***ОС***-концепции в образовательных целях. ***ОС***-модели успешно могут быть использованы и в образовании, стимулируя развитие навыков моделирования и освоения технологий. Ряд компьютерных игр базируются на понятии ***ОС***-моделей и студенты находят их привлекательными. Концепции, применяемые при создании подобных игр, могут использоваться для моделирования математических, научных и социальных объектов и явлений. Надлежащее использование привлекательности данных игр может способствовать мотивации интересов студентов в изучении важных проблем. Изучение подходов к обучению – важный аспект в преподавании любой темы. Важным подходом является ***визуализация***, которая для некоторых студентов является основным способом усвоения, тогда как для других является хорошим подспорьем закрепления изучаемого материала. И в этом отношении ***ОС***-модели – естественный способ визуализировать явления в их динамике как вручную на бумаге, так и средствами компьютера. Студенты должны иметь навыки моделирования, ибо все современные науки используют компьютерные модели для экспериментирования. Применение компьютерных моделей для проведения научных экспериментов должно стимулироваться с самого начала студенческой практики как эффективный способ научного исследования. В этом отношении ***ОС***-модели – вполне естественный подход к преподаванию навыков моделирования, т. к. они включают и время, и пространство. Преподавание ***ОС***-концепции прививает студентам *практический* смысл компьютеров и уверенность при решении проблем с их использованием. В частности, это обусловлено весьма тесными связями между ***ОС***-моделями и компьютерами. Многие модели компьютеров в той или иной мере базируются на ***ОС***-моделях, а одна из самых быстрых вычислительных систем с массовым параллелизмом – ***Connection Machine*** – непосредственно базируется на ***ОС***-концепции. ***ОС***-модели побуждают студентов думать творчески и в том отношении, что огромные возможности компьютера не освобождают их от собственного творчества при решении проблем. В то же время использование ***ОС***-моделей как метафоры с пониманием их возможностей наряду с ограничениями может служить хорошим эвристическим средством, стимулирующим логическое и творческое мышление, направленное на познание сложных объектов. Как показывает опыт использования в обучении подобных моделей сложных взаимодействий, студенты довольно легко понимают принципы их функционирования и с интересом обсуждают связи между моделями, возможными метафорами и реальными ситуациями познания, обучения и образования, включающими помощь и противодействие. При этом, имеются обнадеживающие результаты по разработке математической модели глобальной системы образования, базирующейся на ***ОС***-модели. Имеется ряд

успешных попыток симулирования возрастной динамики высшей школы ***РФ*** на основе ***ОС***-подобных моделей, в частности, применение такого типа моделей для симулирования динамики профессорско-преподавательского состава высшей школы ***РФ*** [536].

Знакомство с указанными идеями в процессе компьютерного обучения позволит даже школьникам прикоснуться к «*краевым*» проблемам компьютерного моделирования – если любой физический процесс можно представить в форме вычислительного процесса, то в ***ОС***-моделях соответствие между «*физикой*» и «*вычислениями*» максимально велико. Поэтому учитель получает блестящую возможность использовать *компьютерное* моделирование не просто в качестве иллюстрации действия естественнонаучных законов, а в качестве инструмента, позволяющего по-настоящему понять уже на школьных уроках фундаментальные идеи теории алгоритмов и служить хорошим введением в элементы компьютерного моделирования посредством достаточно прозрачных ***ОС***-моделей. На сегодня имеется уже немалый отечественный опыт по ознакомлению школьников с машинами Тьюринга и Поста, правда, в основном это относится к школам с углубленным изучением математики и информатики. И действительно, материал, знакомящий учащихся с фундаментальными основами информатики и вычислительной техники, должен присутствовать в школьном курсе информатики, который имеет *фундаментальную* направленность и предназначен для более осознанного овладения данными дисциплинами. В этот же материал следует включить и базовые сведения по ***ОС***, как новой перспективной среде математического и физического моделирования, а также *формальным* моделям параллельных вычислений и перспективных параллельных архитектур вычислительной техники. Доступность школьникам (*пусть даже и специализированных школ*) данного материала вполне сопоставима с доступностью упомянутых формальных моделей универсальных вычислителей, лежащих в основе современной теории вычислений.

Открытие в университетах ряда новых специальностей, например, «*Химия, физика и механика материалов*» (***РФ***) делает весьма актуальным вопрос о подготовке учеников средней школы к продолжению учебы на принципиально новом образовательном направлении - фундаментальное *материаловедение*. В связи с открытием таких специальностей становится важной разработка программных модулей, которые давали бы возможность школьникам найти путь к осознанию междисциплинарных проблем на стыках химии, физики, математики, биологии. Для решения поставленной задачи в школьном курсе весьма целесообразно было бы использовать теорию ***ОС***-моделей, легко реализуемых на компьютере. С помощью этого аппарата можно наглядно совмещать в пространстве и во времени законы физики, химии, биологии, геометрии [536]. Курс математического и компьютерного моделирования представляет прекрасное поле для применения и закрепления теоретических дисциплин и ***ОС***-модели все интенсивнее используются в этом курсе. С психологической точки зрения простота ***ОС***-среды, сочетающаяся с мощными средствами представления сложных алгоритмов, позволяет предположить, что активное взаимодействие школьников с этой средой будет способствовать развитию новых типов алгоритмического мышления, реально отражающего мир современных алгоритмов, резко отличный от старых представлений об универсальном характере последовательной обработки команд. К сожалению, на сегодня в школьной практике (*да и не только*), господствуют именно традиционные представления. Между тем, впервые в отечественной учебной литературе для университетов в курс информатики, рекомендованный министерством образования ***РФ***, в качестве формальных моделей вычислителей наряду с машинами Тьюринга (*как моделью последовательных вычислений*) нами были представлены и классические ***ОС*** как формальные модели параллельных вычислений [94-96,536]. В ряде российских университетов для соискателей степеней магистра и доктора уже читаются спецкурсы по эволюционной кибернетике, программированию, синергетике и др. с включением базовых сведений по однородным структурам и их прикладным аспектам.

Разработанная еще в ***1994*** рабочей группой ***IFIP*** под эгидой ***ЮНЕСКО*** межправительственная модульная программа по информатике и компьютерным наукам включила в перечень рекомендуемых дисциплин для уровня высшего образования также изучение и тематики клеточных автоматов ***(ОС-моделей).*** Начиная с ***2006*** г., в программу физического факультета Санкт-Петербургского университета по дисциплине «***Магнитосфера***» включена тематика по использованию ***ОС-***моделей для симулирования сложных геофизических процессов.

ОС-модели и музыка. Весьма интересными представляются нам попытки использования ***ОС-***моделей для создания различного рода музыкальных композиций. Для этих приложений данный тип моделей привлекает интерес именно из-за принципов их организации. Действительно, так как ***ОС-***модели генерируют большое число самых разнообразных конфигураций и при предположении, что музыкальную композицию можно представить себе как основанную на истории конфигурации и формального манипуляция ее параметрами, то не вызывает удивления тот факт, что исследователи начали осознавать, что ***ОС-***модели могут быть использованы для генерации музыкальных эффектов.

При этом, наибольший интерес представляют те ***ОС-***модели, чья динамика характеризуется циклическим поведением, самоорганизацией и/или свойствами распространения конфигураций. Интересное обсуждение важности этих свойств для музыкальных приложений можно найти в [537]. Так, ***Э. Миранда*** для исследования синтеза звуков на основе ***ОС-***моделей использовал методику т.н. «*гранулированного синтеза*» [538]. Суть ее состоит в быстрой генерации последовательности очень коротких звуковых импульсов, названных «***гранулами***», которые вместе формируют большие звуковые эффекты. Данная методика несколько напоминает методику анимации, используемую, например, в кино либо мультипликации. На основе ***ОС-***модели был создан специальный генератор гранул ***(Chaosynth)***, посредством которого каждая гранула представляется некоторой h конфигурацией ***ОС-***модели. В этом случае глобальная функция S перехода модели определяет *историю* звуковых гранул, т.е. динамику генерации конфигураций $h^{t+1}=S(h^t)$. Фирма ***Nyr Sound*** выпустила и программный синтезатор ***Chaosynth***, предназначенный для создания и воспроизведения отдельных звуков, но его можно использовать также в качестве управляемого по ***MIDI*** монофонического синтезатора. В программе применяется ***ОС-***технология и гранулярный синтез. Использование в программе ***ОС-***моделей в качестве управляющего элемента позволяет добиться более точного и разнообразного звучания, чем при традиционном гранулярном синтезе [536].

После целого ряда экспериментов с генератором ***Chaosynth*** была выбрана специальная ***ОС-***модель, названная ***ChaOs*** (*как сокращение от* ***Ch****emical* ***Os****cillator*) и используемая для симулирования поведения типа каталитической реакции, известной как реакция Белоусова-Жаботинского. В этом случае ***ОС-***модель симулирует способ порождения наиболее естественныхе звуков, произведенных акустическими приборами: она иллюстрирует тенденцию сходиться от широкого распределения их частичных тонов к формированию колебательных структур. ***ChaOs*** можно представить себе в виде матрицы ячеек, содержащих идентичные простые электронные схемы, чье поведение можно сравнивать с поведением искусственного нейрона или перцептрона.

Для выявления ***ОС-***моделей, генерирующих последовательности конфигураций, которые могли бы быть использованы для симулирования распространения музыкальных эффектов, были проведены многочисленные эксперименты. В результате эти эксперименты завершились созданием системы, названной ***CAMUS*** (*сокращение от* ***C****ellular* ***A****utomata* ***MUS****ic*). Система ***CAMUS*** использует два типа ***ОС-***моделей, а именно: классическую игру «***Life***» и ***Demon Cyclic Space*** [539]. В общих словах, ***CAMUS –*** система композиции, использующая динамические свойства ***ОС-***моделей для генерации музыкальных форм.

На наш взгляд, ***Chaosynth*** и ***CAMUS*** можно рассматривать в качестве как успешных социологических исследований, так и хороших отправных точек для дальнейшего экспериментирования. Возможно, на следующем шаге можно попытаться интегрировать оба типа систем, чтобы изучить соотношения между абстрактными музыкальными формами и микроорганизацией их содержания *(в данном случае синтезированных звуков)* в рамках контекста классических ***OC-***моделей. В настоящее время ***Chaosynth*** поддерживает платформы ***Windows*** и ***Macintosh,*** и поставляется ***Nyr Sound,*** тогда как ***CAMUS –*** свободно распространяемая система, располагающая двумя версиями, одна из которых базируется на ***3-***мерной ***OC-***модели. Обе версии системы можно найти на CD к книге [537]. Для более детального ознакомления с исследованиями и конкретными разработками по применению ***OC-***моделей для музыкального творчества можно обратиться к [536]. Среди конкретных реализаций в этом направлении следует отметить также автомат ***Монка (****Automatous Monk****) П. Рейнерса,*** представляющий собой программную реализацию ***1-OC*** для генерации музыкальных композиций, правда, весьма далеких от совершенства. При этом, результирующая музыка может выполняться и сохраняться в ***MIDI-***файлах.

Алгоритмическая музыкальная композиция **–** применение четкого алгоритма к процессу создания музыки**.** ***OC-***модели представляют именно тот класс математических структур, чья сложная динамика представляет особый интерес с точки зрения алгоритмической музыкальной композиции. С другой стороны, компьютеры идеальны для вычисления динамики ***OC-***моделей и ее графического отображения. Эта динамика может быть также отображена в звуковые эффекты. Однако методы обнаружения отображений динамики ***OC-***моделей в приятную и интересную музыку **–** весьма и весьма непростая задача. В ряде работ представлено несколько интересных методов для реализации музыкальной композиции на основе ***OC-***моделей на языке ***Java*** и исследуются конкретные ***OC-***отображения, приводящие к наиболее хорошим результатам [536]. Имеются весьма интересные примеры, иллюстрирующие как потенции ***OC-***моделей для генерации нетривиальных музыкальных композиций, так и для лучшего понимания структурной динамики ***OC-***моделей, используя акустическую модальность. Развиваемая в настоящее время алгоритмическая музыка использует как ***OC-***модели, так и фракталы, например, такие программы как ***FractMus*** и ***MusicGenerator*** [536].

Однако не только в таком виде искусства как музыка ***OC-***модели оказались достаточно интересным инструментом для создания музыкальных композиций *(правда, пока еще не столь совершенных)*, но исследования их динамики наряду со свойствами фракталов неожиданно привело к появлению даже нового направления в изобразительном искусстве; сложность и естественность генерируемых ими структур оказались необыкновенно эстетически привлекательными [536].

Некоторые другие приложения OC-моделей. Ниже кратко отмечены вопросы приложений ***OC-***моделей, которые не нашли отражения выше либо на них не делалось отдельного акцента. В частности, хороший анализ приложений ***OC-***моделей *(как конечных, так и бесконечных)* к задачам распределенного интеллекта, криптографии и взаимодействующих биопопуляций можно ознакомиться в монографии [161]. Здесь рассматриваются как вопросы погружения упомянутых задач в ***OC-***модели, так и интересные концептуальные соображения и обсуждения. Одни из первых работ по геометрическим фигурам восходят к ***Г.Ф. Вороному,*** который определил один класс дискретных диаграмм, ныне именуемых дискретными диаграммами ***Вороного.*** Данные диаграммы весьма неплохо отвечают концепции ***OC-***моделей, включая группу *классических* однородных структур.

Интересные прикладные аспекты ***TOC-***проблематики возникают в связи с общими вопросами искусственного интеллекта; структурной теорией газа; теории информации и статистической физики; задачами, возникающими при моделировании микроскопических физических процессов, и сложной макроскопической динамики *(главным образом, в*

связи с теорией турбулентности); с рядом задач фрактальной теории и теории хаоса, дискретной синергетикой и др., а также в связи с проектированием ЭВМ специального назначения [5,117-119,123-126,128,129,131,133,149,175,182,183,192,309,328,345,348, 353,371-376, 377-379]. В ряде случаев эти задачи пересекаются с вышерассмотренными вопросами.

Ряд классов однородных структур может использоваться в качестве основы для исследования и моделирования *концептуальных* феноменов пространственно-распределенных динамических систем, включая гипотетические Вселенные. Так, например, ***однородные структуры на разбиении (ОСнР)*** уже на аксиоматическом уровне обладают такими фундаментальными свойствами как ***однородность, локальность, синхронность*** и на программном уровне свойством ***обратимости*** динамики погружаемых в них различного рода моделей, из которых физические модели представляют наибольший гносеологический интерес. Данное обстоятельство создает не только хорошие предпосылки для использования ***ОСнР***-среды в качестве основы концептуальных физических моделей (*прежде всего на микроскопическом уровне*), но и позволяет достаточно эффективно моделировать динамику пространственно-распределенных систем в целом, развивающихся как в пространстве, так и во времени. В рамках этой проблематики определенный интерес представляют и ***ОС***-модели гипотетических Вселенных, а также целого ряда экстраординарных явлений. К большому сожалению, недостаточно профессиональная и продуманная популяризация ***ОС***-концепции имеет и негативную сторону, когда, в частности, уже в художественных произведениях в ее свете рисуют картины строения Вселенной. Между тем, спекуляции относительно *аналогий* феноменов и явлений, наблюдаемых во Вселенной, да и в других проявлениях внешнего мира, с динамическими свойствами ***ОС***-моделей могут нанести непоправимый вред самой ***ОС***-концепции, прежде всего [88,90,536].

В частности, на основе ***ОСнР***-концепции нами рассматривался ряд интересных моделей как некоторых феноменов пространственно-распределенных динамических систем, так и гипотетических Вселенных [90]. Были получены достаточно интересные модели развития, определяющие характеристики которых оказались ***инвариантными*** относительно направления временной шкалы, т.е. не меняющиеся при замене прямого хода времени на обратный и ряд других. Ряд весьма интересных моделей пространственно-распределенных динамических систем исследовался и на основе ***асинхронных ОС***-моделей значительно более общего вида [5]. Подобные модели и их интерпретации представляют вполне определенный интерес в контексте современных нетрадиционных концепций истории нашей Вселенной и целого ряда экстраординарных феноменов и явлений.

Из более прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики можно отметить использование ***ОС***-концепции и ряда ***ОС***-моделей для решения и исследования задач сетевого планирования, в частности, имеется ряд интересных работ по созданию проблемной среды, базирующейся на ***ОС***-подходе, для решения оптимизационных задач типа коммивояжера и календарного планирования [536]. Интересные работы по использованию ***ОС***-моделей в задачах надежности и самовосстановления многокомпонентных сложных дискретных динамических систем технического назначения можно найти в [5,55,181,192,184,187,190, 191,276,536]. Так, например, показано, что в классе не строго локализованных ***ОС***-моделей некоторые непрерывно самовоспроизводящиеся автоматы могут быть и самовосстанавливающимися. *Недетерминированные* ***ОС***-модели представляют определенный интерес для исследования вопросов надежности сложных динамических клеточных систем.

Автоматизация производственных процессов создания новых материалов часто сводится к решению обратных задач, необходимых для формирования основных параметров технологии. По причине *нелинейности* такого типа задачи решаются, главным образом, в рамках планирования экспериментов, базирующихся на статистических методах. Некоторые авторы в качестве основы для проведения данных экспериментов предлагают использовать компьютерные подходы, базирующиеся на т.н. «*подвижных*» ***ОС***-моделях.

В этом же русле лежат и работы по созданию новых антифрикционных материалов для подшипников скольжения, также базирующиеся на компьютерных ***ОС-***моделях [536].

Большинство современных моделей муравьиных сообществ и других социальных насекомых не достаточно строги**.** ***ОС-***модели, начиная с правил поведения, связаны**,** прежде всего, с движущимися элементами, а не с их местоположением в пространстве. Однако, имеется немало важных вопросов**,** которые одинаково хорошо применимы к указанным социальным моделям и к ***ОС-***моделям. Например**,** как простые локальные правила обеспечивают сложное глобальное поведение? Из других достаточно интересных биологически-ориентированных можно отметить ***ОС-***модели морских раковин**.** Предложенные ***ОС-***модели вселяют определенный оптимизм в такой прикладной области [536].

Наконец**,** наименее практическим в ближайшее время**,** но наиболее перспективным в отдаленном будущем, может оказаться использование ***ОС-***моделей и в космонавтике при организации межзвездных полетов**.** Так**,** например**,** в ***1984 Р. Форвард*** привнес в эту идею достижения компьютерной техники**,** базирующейся на вычислительных ***ОС-***моделях. В результате появился на свет проект межзвездного космического аппарата «***Старуисп***»**.** Аппарат мало похож на современные в нашем понимании космические корабли и представляет собой *парус***,** имеющий размер по диаметру в ***1*** км. и весящий порядка ***20*** г**.** Сам парус соткан из тончайшей проволоки в виде множества *шестиугольных* ячеек**,** в ***10*** триллионах пересечений которых расположены копии микроэлектронной схемы **(***сверхмикропроцессоры***)**, образующие в целом сверхмощный компьютер высокопараллельного действия, т.е. типичную вычислительную ***ОС-***модель. Каждая микросхема чувствительна к свету и может работать как крошечная телекамера**.** Двигаться такой аппарат**-***парус* будет под действием *космического* ветра**,** порождаемого искусственным мазером**,** находящимся на околоземной орбите. Естественно, что осуществление подобного проекта настолько грандиозно и сложно во всех отношениях**,** что его техническая реализация вряд ли представляется возможной ранее ***2050*** года. Из более прозаических в данной области можно отметить исследования **(***проводимые в Российской Академии Космонавтики***)** по использованию стохастических ***ОС-***моделей для анализа повреждающих воздействий на космический аппарат факторов внешней среды. Проблема атомно-молекулярного взаимодействия и статистического моделирования изменений физико-химических свойств материалов при длительном их пребывании в условиях космического пространства становится все более актуальной в связи с перспективами создания Лунной базы, а также длительных пилотируемых полетов, например, к Марсу.

Завершая на этом обсуждение прикладных аспектов ***ТОС-***проблематики, следует отметить, что вне его рамок остался целый ряд интересных прикладных тем **(***список которых постоянно расширяется***)**, представляющих самостоятельный интерес**.** Поэтому заинтересованный читатель должен постоянно отслеживать развитие данного направления ***ТОС-***проблематики по соответствующим публикациям как в традиционных**,** так и в электронных изданиях. При этом, хотелось бы подчеркнуть, что, по нашему глубокому убеждению, *классические***,** *полигенные***,** *недетерминированные* и *стохастические* ***ОС-***модели**,** а также их различные модификации и обобщения могут быть эффективно использованы и во многих других областях, но одной из наиболее интересных и перспективных областей приложений здесь представляется использование ***ОС-***подхода как *новой* перспективной среды моделирования различного рода процессов, объектов и феноменов**,** из которых и физические**,** и биологические приложения представляются нам наиболее интересными [90,392,536]**.** И поэтому прикладному аспекту ***ТОС-***проблематики следует уделять самое пристальное внимание**,** не упуская также из вида и исследования ***ОС-***моделей в качестве важного самостоятельного математического объекта.

Будучи прекрасной средой симулирования широкого круга процессов**,** явлений и феноменов в различных областях **(***физика***,** *биология***,** *химия***,** *вычислительные науки и др***.)**, ***ОС-***мо-

дели, между тем, обладают свойством универсальной вычислимости и на их основе создан и проектируется целый ряд реальных вычислительных систем параллельной архитектуры. Сама концепция ***ОС-***моделей *(прежде всего,* ***классических)*** достаточно проста и доступна для восприятия даже неподготовленному в ***ОС-***проблематике человеку. Классическая ***ОС-***модель, представляя собой весьма простой для восприятия компьютер высокопараллельного образа действия, на *низшем* уровне располагает достаточно простым языком программирования, базирующемся на системах параллельных подстановок следующего простого вида, а именно:

$$\sigma^{(n)} : x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \Rightarrow x_1^* \qquad (x_1^*, x_j \in A;\ j = 1 .. n)$$

определяющих локальные функции перехода в ***ОС-***моделях. При этом, конкретная реализация ***ОС-***модели может быть представлена как на бумаге *(делая использование компьютера и программирования вовсе необязательным)*, так и путем погружения ее в некоторую программную среду ***(Basic, Pascal, C++, Fortran*** *и др.)*. Во втором случае можно работать с довольно сложными ***ОС-***моделями при относительно небольших навыках программирования. Использование ***ОС-***моделей способствует развитию навыков в следующих основных направлениях, а именно:

(1) ознакомление с основами перспективной среды моделирования, суть которой весьма прозрачна и для многих приложений достаточно наглядно интерпретируема;
(2) получение навыков программирования на высокопараллельном языке подстановок; в случае использования ОС-моделей типов, отличных от классических, можно оперировать и другими последовательно-параллельными языками;
(3) в определенной мере привитие навыков параллельного образа мышления.

Простота ***ОС-***концепции позволяет творчески использовать ее со студентами университетов и колледжей, и даже средних школ, в увлекательной игровой форме приобщая к такой перспективной во многих отношениях проблематике. С примерами такого подхода можно ознакомиться в [408,425,426]. В частности, статья [426] мотивирует целесообразность включения ознакомления с ***ОС-***концепцией *(клеточными автоматами)* в учебные программы. Приводятся примеры и рекомендации к типовым упражнениям; при этом, каждый пример соотносится с соответствующей дисциплиной, дается источник или мотивация примера, а также желаемый уровень подготовки – средняя школа или колледж. На наш взгляд, ознакомление с ***ОС-***концепцией представляется полезным и для студентов университетов, прежде всего имеющих дело с задачами моделирования физических процессов, явлений и феноменов. ***ОС-***аппарат – превосходный инструмент моделирования и в этом качестве он представляет интерес и для многих других специальностей.

Следует отметить, что ***ОС-***концепция является в определенном смысле уникальным явлением – с ***одной стороны***, она является ***основой*** формального моделирования целого ряда процессов, феноменов и объектов в весьма широком спектре областей, а с ***другой стороны*** она имеет эквивалентные технические реализации в виде ***ML-***сопроцессоров ***Легенди, CAM-***машин ***Тоффоли***, клеточных процессоров, однородных вычислительных сред, систолических структур, сетей транспьютеров и др., что делает ее весьма привлекательной как в теоретических, так и в прикладных исследованиях во многих областях, с полным основанием возводя ее на новый ***междисциплинарный*** научный уровень.

При этом следует отметить, что к тематике ***ОС-***моделей различных типов и классов достаточно тесно примыкают и т.н. ***решеточные системы***, возникающие не только при исследованиях распределенных сред, но также и при описании процессов, происходящих в системах, имеющих существенно дискретную структуру как в пространстве, так и по времени. К таким моделям непосредственно приводит целый ряд задач теории синхронизации радиогенераторов, биологии, био-медицины, исследования поведения клеточных автоматов, нейронных сетей и другие [536].

Вполне уместно здесь вкратце упомянуть о приложениях конечных ***OC-***моделей, одной из важнейших областей которых является проектирование ***VLSI (СБИС).*** При этом, возможно, что наиболее успешным применением ***OC-***моделей для ***VLSI*** будет генерация псевдослучайных последовательностей и их применение для систем встроенного самоконтроля**.** Из других приложений можно отметить коды с исправлением ошибок**,** криптосистемы, разработка ассоциативной памяти, графика и тестирование конечных автоматов. На сегодня в ***VLSI*** наиболее применимы *бинарные* ***1-OC,*** имеются достаточно интересные примеры применения ***2-OC*** и ***гибридных OC-***моделей. С прикладной и теоретической тематикой относительно конечных ***OC-***моделей достаточно детально можно ознакомиться в целом ряде интересных публикаций, представленных в перечне [536].

В представленных выше прикладных аспектах ***TOC-***проблематики в значительной степени делался акцент на отечественных работах, объем и широта охвата проблематики которых, к сожалению, пока достаточно существенно уступают зарубежным исследованиям. Однако это относится, прежде всего, именно к прикладным аспектам, тогда как в теоретическом отношении рядом отечественных исследователей получен целый ряд результатов фундаментального характера, внесших достаточно существенных вклад в теоретическую составляющую ***TOC-***проблематики. Ряд из них отмечен и в настоящей монографии, тогда как с другими можно ознакомиться в цитируемой литературе.

В заключение следует отметить, что большое разнообразие моделей на основе ***OC-***концепции может быть найдено в списке [536], а их разноплановость характеризуется уже простым и неполным перечислением таких разделов как: физика, математика, теория хаоса, статистическая физика, гидродинамика, химия, биология, экология, иммунология, эпидемиология, промышленная технология, логистика, сейсмология, нейронные сети, вулканология, сельское хозяйство, порошковая металлургия, материаловедение, программирование **(***включая генетическое и параллельное***),** вычислительная техника, хранение и поиск информации, криптография, кристаллография, социология и многие другие**.** В частности**,** интересная работа [515] посвящена вопросам симулирования инновативных процессов посредством стохастических ***OC-***моделей. В свою очередь, представленные в списке [536] оригинальные источники содержат целый ряд других весьма интересных ссылок по ***OC-***тематике и связанным с ней прикладным аспектам**.** Наконец, целью данного достаточно поверхностного обзора по прикладным аспектам ***TOC-***проблематики было не столько охватить все *разнообразие* данного прикладного направления **(***с которым можно ознакомиться в англоязычном интернете***,** *например***,** *через* ***Google*****),** сколько в определенной мере представить тот спектр областей**,** в которых все шире используются концепция, методология и собственно сами ***OC-***модели различных типов и классов. В то же самое время следует четко представлять, что ***классические OC-***модели, рассмотренные в настоящей книге, являются всего лишь неким формальным математическим объектом **(***абстрактным бесконечным автоматом со специфической внутренней организацией***,** *параллельной дискретной динамической системой***),** исследование которого **(***подобно другим математическим объектам***)** представляет несомненный познавательный интерес. С другой стороны, попытки интерпретации определенных динамических свойств данного объекта с точки зрения проецирования их на реальные естественные процессы и явления**,** тем паче попытки получения на их основе далеко идущих и глубоких научных выводов, прогнозов и обобщений, в подавляющем большинстве случаев носят в той или иной мере надуманный, тенденциозный и безосновательный характер**.** Между тем**,** ***OC-***модели и прежде всего, отличные от классических, во многих случаях представляют собой прекрасную среду симулирования и исследования процессов и явлений во многих областях, чему на сегодня имеется масса примеров. Однако и концепция классических ***OC-***моделей помимо их самодостаточности как математического объекта может успешно использоваться в качестве неких формальных прототипов реальных объектов [536].

Заключение

В предложенной монографии как на содержательном уровне, так и в виде строгих математических формулировок и доказательств представлен целый ряд результатов по основным разделам математической *теории однородных структур* **(*ТОС*)**, полученных нами ранее, а также обобщенные, уточненные и совершенно новые результаты. Полностью не охватывая всей обширной проблематики данной области современной математической кибернетики, представленные, между тем, результаты лежат в русле основных ее направлений и составляют существенную часть современного состояния исследований в этом направлении. Для более полного ознакомления с современным состоянием ***ТОС*-**проблематики приведена достаточно обширная библиография, в свою очередь, содержащая и ссылки на многочисленные работы в данном направлении. При этом, содержательный уровень изложения, иллюстрируемый примерами и отдельными доказательствами, позволяет использовать монографию весьма широким кругом читателей из самых различных сфер потенциального применения концепции, методов и результатов ***ТОС*-**проблематики. Представит она также вполне определенный интерес для студентов и аспирантов соответствующих специальностей университетов (*прежде всего, естественно научного профиля*), а также преподавателей по курсам информатики, вычислительной техники, математическому и физическому моделированию, теории автоматов и ряду других.

Однородные структуры **(*ОС*)** являются наглядным примером получения достаточно сложных объектов и их *динамики* на основе весьма простых исходных элементов и предпосылок (*аксиоматики*). В этом смысле они лучше отвечают математическим моделям, используемым в более абстрактных областях теоретической физики, математической биологии и дискретной синергетики, чем более практическим моделям вычислительных наук, базирующимся на современной микроэлектронной технологии. Хотя с дальнейшим развитием технологий (*прежде всего, нанотехнологий*) в данной области они, пожалуй, и смогут играть все более растущую роль в качестве формальных моделей и прототипов высокопараллельной обработки информации. Данный вопрос рассматривался и выше в связи с проблемами создания техники, базирующейся на *обратимых* вычислениях, как одной из основ прогресса в создании новых поколений высокоэффективной вычислительной техники. Следовательно, ***ОС* –** более чем полезные абстракции, ибо они обладают рядом фундаментальных свойств, которые могут привести к созданию на основе вычислительных ***ОС*-**моделей перспективных ***архитектур*** высокопроизводительных компьютерных систем и управляющих модулей систем искусственного интеллекта будущих поколений, а также сыграть роль перспективной модельной среды для самого широкого круга приложений, выводя ***ТОС*-**проблематику на новый *междисциплинарный* уровень. Несколько слов об используемой терминологии. В настоящее время проблематика клеточных автоматов **(*Cellular Automata – CA*)** достаточно хорошо развита, являясь вполне самостоятельной областью современной математической кибернетики, которая имеет весьма существенную сферу заявлений. Вместе с тем, необходимо подчеркнуть, в *русскоязычной* терминологии (*основы которой впервые были заложены в монографии* [1]) для понятия «***клеточные автоматы***» был определен термин «***Однородные Структуры*» *(ОС; Homogeneous Structures – HS)***,** ныне ставший широко распространенным. Именно поэтому на протяжении настоящей монографии наряду с данным термином используется и его англоязычный эквивалент «***клеточные автоматы, Cellular Automata – CA*».**

Прежде всего, ***ОС*-**модели представляют собой однородную среду из взаимосвязанных *локальным* образом идентичных автоматов, функционирующих максимально синхронным образом. Таким образом, ***ОС*-**аксиоматика обеспечивает такие фундаментальные свойства как *однородность*, *локальность* и *параллелизм* функционирования. Если в такой

модели мы будем ассоциировать с каждым единичным автоматом *отдельный* микропроцессор, то можно неограниченно увеличивать *размеры* подобной вычислительной структуры без существенного увеличения временных и конструктивных затрат, требуемых для каждого нового расширения вычислительного пространства, а также без накладных расходов, связанных с координацией функционирования дополнительного числа элементарных микропроцессоров. Подобные вычислительные ***ОС-***модели допускают практические реализации из весьма большого числа *элементарных* микропроцессоров, ограниченные не столько архитектурными, сколько сугубо экономическими и технологическими соображениями, определяемыми *современным* уровнем развития микроэлектронной технологии, но и с большими потенциями в будущем, прежде всего, в свете весьма интенсивных работ в области нанотехнологий [536].

Наконец, глобальное функционирование ***ОС-***моделей определяется сугубо локальным взаимодействием *небольшого* набора единичных автоматов. Вследствие ограничения скорости распространения информации локальность взаимосвязи простых единичных автоматов ***ОС-***модели может быть положена и в основу повышения ее быстродействия. В компьютерах традиционной неймановской архитектуры время выполнения отдельной команды ограничено *длиной* пути передачи сигнала, вследствие чего их быстродействие в значительной степени определяется их размерами. Тогда как в ***ОС-***моделях длина путей передачи сигналов существенно не зависит от их размеров, позволяя выполнять высокопараллельную обработку информации, что дает возможность создавать *одновременно* очень *большие* и *быстрые* ***ОС-***подобные вычислительные системы. Однако требуемый чрезвычайно высокий уровень миниатюризации таких вычислительных систем выдвигает новые весьма сложные технологические проблемы, решение которых требует весьма существенного продвижения в целом ряде *смежных* физико-технических дисциплин. В данном направлении весьма существенное влияние могут и должны оказать достижения в области биотехнологий и нанотехнологий. Тогда как ***ОС-***модели, в свою очередь, с их возможностью поддерживать обратимые вычисления позволят решить проблемы, связанные с тепловыми режимами сверх миниатюрных вычислительных систем. И этот их аспект в настоящее время исследуется достаточно интенсивно и практически [536].

Вышеперечисленные черты (*высокие однородность, параллелизм и локальность взаимодействий*) обеспечиваются уже самой ***ОС-***аксиоматикой. Тогда как такое важнос с физической точки зрения свойство, как ***обратимость*** динамики, задается программно. В свете перечисленных свойств уже классические ***ОС*** являются высоко абстрагированными моделями *реального* физического мира, функционирующими во времени и пространстве. Поэтому они лучше (*чем многие другие формальные архитектуры*) могут быть отображены на физические реалии в их современном понимании. Более того, и сама ***ОС-***концепция хорошо приспособлена для решения задач *моделирования* из различных областей таких как вычислительные науки, биология развития, теоретическая физика, математика, кибернетика, дискретная синергетика, теория динамических систем, робототехника и др. Сказанное и имеющиеся на сегодня многочисленные примеры приводят нас к заключению о том, что ***ОС*** могут представлять значительный интерес как в качестве новой перспективной среды моделирования и исследования многих дискретных процессов и феноменов, определяемых вышеуказанными свойствами (*возводя* ***ТОС-****проблематику на новый междисциплинарный уровень*), так и в качестве весьма интересного самостоятельного формального объекта исследований. Более того, впервые в мировой практике в учебниках по информатике, утвержденных Минобразования ***РФ*** для университетов, мы представили отдельную главу «***Общие формальные вычислительные модели***», в которой наряду с машинами Тьюринга как формальной моделью классических последовательных (*фон неймановских*) вычислений представлены и ***однородные структуры*** (*клеточные автоматы*) в качестве формальной модели неклассических (*ненеймановских*) высокопараллельных вычислений и обработки информации, а также перспективных моделей новых

поколений вычислительных систем [94-96]. При этом, наряду с сугубо компьютерными мотивациями следует иметь ввиду и весьма важный модельный аспект ***TOC*-**проблематики, обеспечивающий будущих исследователей перспективной и довольно легко программируемой средой моделирования в различных областях. Более того, и в процессе изучения различных, прежде всего, физических явлений и процессов, ***OC*-**модели смогут оказаться весьма полезным средством и в учебном процессе. При этом, их простота и наглядность позволяют использовать ***OC*-**модели не только в учебном процессе университетского цикла, но и в различных курсах колледжей и даже специальных школ.

Еще на одном моменте следует остановиться особо**.** На сегодня в ***TOC*-**проблематике, на наш взгляд**,** складывается ситуация**,** в определенной мере схожая с положением дел в целом ряде современных формальных теорий. Основная ее суть сводится к следующему. Зародившись на основе попыток получения формального аппарата для описания и моделирования процессов в биологии развития, ***OC*** на ранней стадии своего становления использовались для целей моделирования в достаточно узком диапазоне областей**.** Наряду с этим**,** ***TOC*-**проблематика получила существенное самостоятельное развитие в рамках теории абстрактных конечных и бесконечных автоматов**.** И по целому ряду причин все ее последующее развитие стимулировалось и в значительной степени продолжает стимулироваться, в основном, собственными интересами и источниками. Для целей же моделирования ***OC*** длительное время использовались эпизодически**.** И только в последние годы к ***OC*-**моделям возрос интерес в связи с работами целого ряда исследователей из различных областей**,** который следует всячески стимулировать. Данное обстоятельство несомненно будет стимулировать и новые интересные проблемы сугубо теоретического характера. На сегодня мы имеем не только постоянно растущий фронт приложений ***OC*-**моделей, но и расширение самого объекта за счет появления новых типов и модификаций ***OC*-**моделей наряду с их теоретическими исследованиями. Имеющийся на сегодня опыт такого рода подтверждает сказанное [536].

Следовательно, вопросу популяризации ***TOC*** и ее прикладных возможностей в различных областях следует уделять самое пристальное внимание**.** А этому**,** в первую очередь, будут способствовать новые успешные примеры применения концепции**,** результатов и методов ***TOC*-**проблематики в других областях**.** Таким образом**,** мы приходим к необходимости существенно более активного применения ***OC*-**концепции в самых различных областях науки и техники. И это действительно весьма важная, сложная и многоаспектная проблема, способствующая и дальнейшему развитию самой ***TOC*.** Однако при этом, не следует снисходить как до утрированной популяризации, так и до явно вульгарного представления ***OC*-**концепции в качестве всемогущего средства познания окружающего нас сложного мира, который было бы весьма наивно сводить к некоим ***OC*-**моделям. В противном случае серьезное научное сообщество вполне может весьма скептически отнестись к данному **(***потенциально достаточно важному***)** направлению современной математической кибернетики, что весьма пагубно скажется как на самой ***TOC*-**проблематике, так и на многих ее как существующих, так и потенциальных приложениях [536].

Как уже отмечалось выше**,** рассмотренные в настоящей монографии вопросы ***TOC*-**проблематики во многом определялись собственными интересами и вкусами авторов, а также традициями творческой активности ***TTT*** в данном направлении**.** Однако даже на основе представленных здесь результатов **(***как теоретического***,** *так и прикладного характера***)** читатель вполне сможет получить достаточно полную картину современного состояния и проблематики математической теории классических ***OC*-**моделей и ее прикладных аспектов. Завершая изложение базовых аспектов ***TOC***, следует отметить, что ***TOC*-**проблематика находится в стадии интенсивного развития и дальнейшая работа в этом направлении крайне желательна со многих точек зрения и**,** прежде всего**,** учитывая *междисциплинарный* характер общей ***OC*-**концепции.

Summary of the General Results

In what follows, we present main results of the work we have done in mathematical theory of the ***classical homogeneous structures (HS;*** *synonym* ***Cellular Automata)*** during ***1968-2007.*** Indeed, we have done much more, particularly in the areas of mathematics, statistics, software, cybernetics, computer science and mathematical theory of homogeneous structures. Much of our research has been stimulated by scientific programs of ***Tallinn Research Group (TRG)*** and ***International Academy of Noosphere (IAN).*** At present, ***Cellular Automata (CA)*** problems is the well enough developed independent field of the modern mathematical cybernetics, which has considerable sphere of applications. Above all, it is necessary to emphasize, that in Russian terminology (*basics of which in monographs* [1] *were presented for the first time*) for the concept «***Cellular Automata (CA)***» the most widespread synonym «***Homogeneous Structures (HS)***» is used. Therefore this term is used most widely for the space of the given monography.

The ***HS*** is a *parallel* information processing system consisting of intercommunicating identical finite automata. Although ***homogeneous structures*** will be used throughout this monograph as the usual term, it should be borne in mind that ***cellular automata, iterative networks*** etc. are essentially synonyms. We can interpret ***HS*** as a theoretical framework of artificial parallel information processing systems. From the logical point of view the ***HS*** is an infinite automaton with characteristic *internal* structure. The ***HS*** theory can be considered as structural and dynamical theory of the infinite automata. ***HS*** can serve as the basis for modeling of many discrete processes and they present interesting enough independent objects for investigations as well. In recent years has arisen undoubted interest to the ***HS*** theory and in this direction many remarkable results have been obtained. Much of this work has been activated by the growing interest in computer science and mathematical modelling. At present, the ***HS*** theory forms an original part of the modern mathematical cybernetics. Furthermore, for the first time, in world practice in text-books on informatics approved by Ministry of Education of Russia for universities we presented the chapter (*headed as* «***General Formal Computing Models***») in which the Turing machines as a formal model of classical sequential computations, and cellular automata as a formal model of non-classical high-parallel computations and information processing have been considered [88,90,94-96].

HS (Cellular Automata) are suitable models for study and simulation of complex dynamical behaviors of systems with a great number of interacting components. The existence of many fields of applications (e.g., computer science, biology, physics, engineering, social sciences etc.) proves this relevance and interest. The possibility of simulation on modern computers allows us to make easy numerical experiments, and the use of classical tools in combinatorial theory, graph theory and discrete random process theory leads to a great number of theoretical results.

From the theoretical point of view, ***Cellular Automata (CA)*** were introduced in the late ***1940's*** by ***John von Neumann*** at ***Stanislav Ulam's*** advice as formal models of self-reproducing organisms. In addition, the structure studied was mostly on ***1-*** and ***2-***dimensional infinite lattices, though higher dimensions were also considered. Questions of computation universality along with other computation-theoretic questions were considered also. ***Neumann's CA-***model has received the further development in works of his immediate followers whose results together with von ***Neumann's*** work were completed and published by ***A.W. Burks*** [124,128]. The further development and popularization of the ***CA-***problematics can be connected with names of such researchers as ***V. Aladjev, S. Amoroso, E. Banks, J. Buttler, E. Codd, S. Cole, G. Hedlund, G. Herman, J. Holland, M. Kimura, Y. Kobuchi, A. Maruoka, E.F. Moore, J. Myhill, H. Nishio, T. Ostrand, A. Smith, T. Yaku, H. Yamada, A. Waksman*** and some others, whose works in the ***1960's – 1970's*** have drawn attention to the given problematics from the theoretical point of view and have solved, and formulated a whole series of interesting enough problems [5,536].

Later, mathematicians, physicists and biologists began to study cellular automata for the purpose of modelling in their respective domains. Personally we have familiarized oneself with ***CA-***problematics in ***1969*** due to Russian translation of the excellent proceedings edited by ***R. Bellman*** [123] containing well-known articles of ***E.F. Moore, S. Ulam*** and ***J. Myhill.*** From the more practical point of view and game experiment ***CA-***model was more less in the late ***1960's*** when ***John H. Conway*** developed the now well-known game «***Life***»**.** The game was made popular through ***M. Gardner's*** column in the journal ***Scientific American*** and have drawn attention to the ***CA-***problematics of numerous scientists from different fields and amateurs [239]. The original motivation of this game was to design a simple set of rules to study the macroscopic behavior of a population. The criterion for choosing the rules was based on the principle that the growth or decay of the population should not be easily predictable. Meantime, the «***Life***» is probably the most well-known cellular automaton**;** in addition, it possesses abilities to self-reproduction as well as computational universality. Universality was proved by ***John Conway*****,** he showed that a universal Turing machine is embedded in the game of «***Life***»**,** i.e. behavior of the Turing machine is imitated by space-time dynamic of the «***Life***» cellular automaton. Later on was presented quite a simple way to implement any Boolean function in patterns of the game of «***Life***» [536]. Thus, such simple cellular automaton appeared equivalent to universal Turing machine. To this cellular automaton the interest does not vanish till now.

At present, ***CA*** are being studied from many widely different angles, and the relationship of these homogeneous structures to existing problems are being constantly sought and discovered. With a view of general acquaintance with an extensive ***CA-***problematics as a whole and with its separate directions is recommended to address to interesting and versatile reviews of such researchers as ***V.Z. Aladjev, V. Cimagalli, K. II Culik, D. Hiebeler, A. Lindenmayer, A.R. Smith, P. Sarkar, M. Mitchell, T. Toffoli, R. Volmar, S. Wolfram*** et al. [536]. A series of books of such authors as ***V.Z. Aladjev, A. Adamatzky, E. Codd, M. Garzon, A. Ilachinski, P. Kendall, M. Duff, V. Kudrjvcev, N. Margolus, T. Toffoli, O. Martin, K. Preston, M. Sipper, R. Vollmar, B. Voorhees, S. Wolfram,*** etc. also contain quite a few historical digressions on ***CA*** problems, unfortunately, the uniform point of view on the given historical question is absent [5,536]. At last, the bibliography presented in [163,185,187,255,336,496,516-519,536], contains many very useful links to works in field of ***CA*** and their numerous applied aspects.

Meanwhile, considering historical aspect of ***CA*****,** we should not forget the contribution which works of ***K. Zuse*** have brought into given problematics**,** and with which the scientific community has familiarized oneself enough late and frequently does not mention him in this historical context. ***K. Zuse*** not only has built the first programmable computers ***(1935-1941)*** and has devised the first higher-level programming language ***(1945)*****,** but also was the ***first*** who has introduced the idea of Rechnender Raum ***(****Calculating Space****)*** [126,188,423], in other words **–** ***Cellular Automata*** in modern terminology**.** Many years later similar ideas were also republished, popularized and extended in works of other authors such as ***E. Fredkin, S. Wolfram,*** etc. [536].

In a few words we shall dwell on the ***Wolfram's*** book «***A New Kind of Science***» [407], what is expedient in view of correct identification of a place of the ***CA-***problematics in structure of other fields of modern natural sciences. The above voluminous ***(****owing to numerous pictures****)*** and pretentious book contains many results which were received much more earlier by other authors in the ***CA*** theory, in particular, by the Soviet authors ***(****see below****).*** Furthermore, the many fundamental results in this field pertain to other authors. The unhealthy vanity of the author of the book does not allow him to look objectively on history of the ***CA*** theory in a whole. In general, ***Wolfram*** enough frivolously addresses with authorship of the results received in the ***CA-***problematics of what there can be an impression **–** everything made in this field belongs basically to him. In ***2002 S. Wolfram*** unveiled own self-proclaimed masterpiece published by his own company. This multipage volume contains his thoughts on everything from the physics of the ***Universe*** to the mysteries of human behavior, all based on the results of a series of

years of analyzing the graphical output of a whole series of very simple computer programs.

The book contains basically results of computer experiments with simple types of ***CA-***models, drawing the conclusions and assumptions on their basis with doubtful enough reliability and quality. The book's biggest flaw, as a work of scientific literature, is precisely the astoundingly high esteem in which the author holds his own thinking. There is an irritating density of passages in which the author takes personal credit for ideas that are «*common knowledge*» among experts in the relevant fields. In particular, he says: «*The discoveries in this book suggest a new and quite different mechanism that I believe is in fact responsible for most of the examples of great complexity that we see in biology.*». Furthermore, according own recognition of ***Wolfram*** «*New Kind of Science is based on discoveries that I've made from studying extremely simple computer programs (that is to say, simple binary* ***CA-****models)*». Indeed, that is very «*serious*» substantiation of «*A New Kind of Science*». According to ***Wolfram***, «***traditional***» mathematics and science are doomed: mathematics because of its emphasis on rigorous proof, and science because of its preference for models that can make accurate *predictions*. He says that the most interesting problems presented by nature are likely to be formally undecidable or computationally irreducible, rendering proofs and predictions impossible. Mathematicians and scientists have managed to keep busy only by carefully choosing to work on the relatively small set of problems that have simple solutions. Similar ***Wolfram*** passages and inferences similar to them cause entirely certain doubts in the scientific decency and judiciousness of their author. At last, we absolutely do not agree that ***Wolfram's*** book represents a new kind of science, nevertheless his book would be more pleasant to read if he were more modest. In our opinion, the book represents a speculative sight both on ***CA,*** and on science as a whole. It can present a certain interest for laymans in the ***CA*** field and for undemanding amateurs of science fiction. A large collection of critical reviews of the ***Wolfram's*** book of various level of competence can be found in ([536], *A Collection of Reviews of ANKOS*). Our point of view upon the ***Wolfram's*** book and its not quite positive role in affair of popularizetion of the ***CA-***problematics among serious scientific community is presented in the ***Preface.*** In the same place it is possible to find our point of view upon a place of the ***CA-***problematics in system of natural sciences. In a few words, our experience on the ***CA-***problematics both on theoretical, and especially applied level speaks completely other, namely: ***(1) CA*** represent one of types of *infinite* abstract automata with a *specific* internal organization admitting rather *high* level of parallel information processing and computations; they form a specific class of the discrete dynamic systems, functioning in especially parallel manner on the basis of a principle of local interacttion, and ***(2) CA*** can be considered as formal mathematical objects presenting the undoubted self-dependent interest. Our detailed enough point of view on the above question can be found in ***Preface.*** Surprisingly, so far as the people are susceptible to pseudo-scientific speculative theories. Probably, because serious theories are beyond their power whereas it is much simple to deal with various kinds of their artificial primitive alternatives. «*A New Kind of Science*» we see as a similar alternative at the most.

The modern standpoint on the ***HS (CA)*** theory has been formed under the influence of works of such researchers as ***Adamatzky A., Aladjev V.Z., Amoroso S., Arbib M., Bagnoli F., Bandini S., Bandman O., Banks E.R., Barca D., Barzdin J., Bays C., Binder P., Boghosian B., Burks A., Butler J., Cattaneo G., Chate H., Chowdhury D., Church A., Codd E.F., Cole S., Crutchfield J., Culik K., Das R., Durand B., Durret R., Fokas A., Fredkin E., Gács P., Gardner M., Gerhardt M., Golze U., Grassberger P., Green D., Griffeath D., Gutowitz G., Hedlund G., Hemmerling A., Holland J., Honda N., Ibarra O., Ikaunieks E., Ilachinski A., Jen E., Kaneko K., Kari J., Kimura M., Kobuchi Y., Langton C., Legendi T., Li W., Lieblein E., Lindenmayer A., Maneville P., Margolus N., Martin O., Maruoka A., Mazoyer J., Mitchell M., Moore E., Morita K., Myhill J., Nasu M., von Neumann John, Nishio H., Ostrand T., Pedersen J., Podkolzin A., Richardson D., Sarkar P., Sato T., Shereshevsky M., Sipper M., Smith A., Sutner K., Takahashi H., Thatcher J., Toffoli T., Toom A., Tseitlin G., Ulam S., Varshavsky V., Vichniac G., Vollmar R., Voorhees B., Waksman A., Weimar J., Willson S., Wolfram S., Wuensche A., Yaku T., Yamada H., Zuse K.,***

and other numerous researchers from many countries. On initial stage the applied aspects of ***HS (CA)*** theory with respect to perspective parallel computers enough intensively were deloloping by scientific schools of ***T. Toffoli*** in ***USA***, ***R. Vollmar*** in Germany, and with respect to biological modelling by ***V. Aladjev*** in ***Estonia***.

Along with our works in the ***HS*** theory, it is necessary to note a whole series of other Soviet researchers who have received in the given field both fundamental and considerable enough results during $60^{th} - 80^{th}$. They are ***Adamatzky A.*** (*identification of* ***HS***), ***Bandman O.L.*** (*asynchronous* ***HS***), ***Blishun A.F.*** (*growth of patterns*), ***Bliumin S.L.*** (*growth of the patterns*), ***Bolotov A.A.*** (*simulation among classes of* ***HS***), ***Varshavsky V.*** (*synchronization of* ***HS***, *simulation of anysotropic* ***HS*** *on the isotropic ones*), ***Georgadze A.K.***, ***Mandzhgaladze P.V.***, ***Matevosian A.A.*** (*growth of the configurations, universal stochastic and deterministic* ***HS***, ***HS*** *and parallel grammars*), ***Dobrushin R. L.***, ***Toom A.L.***, ***Vasil'ev N.B.***, ***Stavskaya O.N.***, ***Mitiushin L.G.***, ***Leontovich A.*** (*probabilistic* ***HS***), ***Ikaunieks E.A.*** (*nonconstructible configurations*), ***Koganov A.V.*** (*universal* ***HS***, *stationary configurations, simulation of* ***HS***), ***Kolotov A.T.*** (***HS*** *models of excitable media*), ***Levenshtein V.I.*** (*synchronization in* ***HS***), ***Levin L.A.*** and ***Kurdiumov G.L.*** (*stochastic* ***HS***), ***Makarevskii A.Y.*** (*implementation of boolean functions in* ***HS***), ***Petrov E.I.*** (*synchronization of* ***2D HS***), ***Podkolzin A.S.*** (*simulation of* ***HS***, *asymptotic of the global dynamic, universal* ***HS***), ***Pospelov D.A.*** (*homogeneous structures and distributed* ***AI*** *in* ***HS***), ***Prangishvili I.V.*** (***HS*** *architectures of parallel processors*), ***Revin O.M.*** (*simulation of anysotropic* ***HS*** *on the isotropic* ***HS***), ***Reshod'ko L.*** (***HS*** *models of the excitable media*), ***Solntzev S.V.*** (*growth of the patterns*), ***Tzeitin G.E.*** (*algebras of shift registers*), ***Tzetlin M.L.*** (*collectives of automata, games of* ***HS***), ***Scherbakov E.*** (*universal algebras of parallel substitutions*). In our numerous previous works were being investigated different aspects of the ***HS*** theory and its applications in computer science and mathematical modelling. Our results obtained in these directions constituted substantially new contributeon into the ***HS*** theory and its applications. The present monograph is intended for discussion of the most general directions in theory of classical ***d-***dimensional ***HS***, and our results obtained therein. Unfortunately, there is not sufficient space here to discuss in detail the wealth of problems in this field. Meanwhile, we hope that the offered monograph will acquaint the reader with the general aspects and tendencies in classical ***HS*** as a formal model of parallel processing and perspective environment for physical and mathematical modelling.

Classical ***d-***dimensional ***HS (d-HS)*** is defined as the ordered set of four components, namely:

$$d\text{-}HS \Leftrightarrow <Z^d, A, \tau^{(n)}, X>$$

where ***A*** is a finite, nonempty set called the *state alphabet*, and it is the set of states which each of the individual finite-state automata in the structure can assume. The state *alphabet* contains a *distinguished* element called the *quiescent* state, which is denoted by ***0***. Let the state alphabet $A=\{0, 1, 2, ..., a-1\}$ contains ***a*** elements. Z^d is the set of all ***d-***tuples of integers which is used to name the cells, where ***Z*** is the set of integers, and is called the *array*, i.e. *array* in which all processing elements are identical. We think that other types of regular arrays for ***HS*** achieve nothing mathematically new for its behavioral properties – an integer lattice is entirely sufficient. Each automaton in Z^d can be thought of as the *name* or *address* of a particular finite-state machine which occupies that position in the array. It will frequently be convenient to identity the automaton located at cell ***j*** with ***j-***cell itself.

X, called the ***neighborhood index*** of ***d-HS***, is ***n-****tuple* of distinct ***d-****tuples* of integers and is used to define the neighbors of any cell, i.e., those cells from which the cell will directly receive information. The ***n*** neighbours of cell ***Z*** are cells $z+\alpha_1, z+\alpha_2, ..., z+\alpha_n$, where $X=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. The neighborhood index ***X*** describes the uniform interconnection pattern among the elementary automata in ***d-HS***. It represents positions relative to a given cell ***k*** of all cells whose automata are directly connected to cell ***k***. If ***X*** contains the point $0^n=\{0,0, ..., 0\}$, every cell is contained in its own neighborhood, where neighborhood consists of all neighbours of cell. Without loss of

generality we may assume that X *contains* the point 0^n. The first three above-mentioned components of any ***d-HS***, namely, the *state alphabet* A, the array Z^d and the neighbourhood index X, form a ***homogeneous space***. The homogeneous space is the static part of ***d-HS***. It describes the physical structure of ***d-HS***, but does not specify interactions which will take place among the elementary automata in Z^d, i.e. dynamics of ***d-HS***.

In order to study the operation ***(dynamics)*** of the ***d-HS***, it is necessary to have have facilities for describing of the current state of the entire homogeneous space, at any given time. A state of the entire space is called a *configuration* of the space and it is simply the complete set of current states of each of individual automata. A ***configuration*** is any mapping $CF: Z^d \to A$; $C(A,d)$ denotes the set of all configurations with respect to Z^d and A – $C(A,d) = \{CF \mid Z^d\} \to A$. Let $c(k)$ be the current state of an automaton located at k-cell. The *support* of a configuration $\mathbf{c}$ (*denoted by* $[c]$) is the set of all cells k such that $c(k) \neq 0$; i.e., the ***support*** is a nonquiescent part of configuration c. Configurations with ***finite support*** are of considerable interest; the set of all such configurations is denoted by $C(A,\phi,d)$; $C(A,\infty,d)$ denotes the set of all configurations with ***infinite*** support and $C(A,d) = C(A,\phi,d) \cup C(A,\infty,d)$; in addition $C(A,\phi,d) \cap C(A,\infty,d) = \varnothing$.

A special notation is used to represent sets of 1-dimensional configurations with *finite* and *infinite* support, accordingly $C(A,\phi)$ and $C(A,\infty)$; $C(A) = C(A,\phi) \cup C(A,\infty)$. A finite configuration $c \in C(A,\phi)$ is represented by $\square x_1 x_2 x_3 \ldots x_m \square$, where $\square$ indicates a string of unbounded length from elementary automata in 0-state, i.e., $\square x_1 x_2 \ldots x_m \square \equiv \ldots 000 x_1 x_2 \ldots x_m 000 \ldots$. Let, the null-configuration $\square$ belongs $C(A,d,\phi)$ at its absence in $C(A,d,\infty)$. This agreement is done in view of a whole series of the important enough reasons. The length of a finite configuration c is defined as the distance between two extreme automata in states of $A \setminus \{0\}$, and will be also denoted by $|c|$.

The operation of ***d-HS*** is specified by a ***local transformation (function)*** $\sigma^{(n)}$ which produces the ***next*** state of an individual automaton k in terms of states of automata, which are directly connected to k. We shall deal with the ***local transition functions*** $\sigma^{(n)}$ which are defined by the mappings $A^n \to A$ such that $(\exists x \in A)(\sigma^{(n)}(x^n) = x)$. For the rest, ***local transition function (LTF)*** is any mapping $\sigma^{(n)}: A^n \to A$. The simultaneous applying of the local transformation $\sigma^{(n)}$ to neighbourhood of every automaton of homogeneous space defines a ***global transition function*** $\tau^{(n)}$ ***(GTF)*** of the current configuration c into the next configuration $c\tau^{(n)}$. The formal definition of configuration $c\tau^{(n)}$ can be presented as follows.

Let $C(A,d)$ denotes the set of all configurations with respect to Z^d and A. The image of $z \in Z^d$ under $c \in C(A,d)$ is written as $c(z)$. A neighbourhood index X and local mapping $\sigma^{(n)}: A^n \to A$ define the ***global*** mapping $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ as follows: $c\tau^{(n)} = c^*$ if and only if for any $z \in Z^d$, $c^*(z) = \sigma^{(n)}(c(z+\alpha_1), c(z+\alpha_2), c(z+\alpha_3), \ldots, c(z+\alpha_n))$. From this definition immediately follows, that every $\sigma^{(n)}$ defines the ***unique global function*** $\tau^{(n)}$, and that cannot be defined $\tau^{(n)}$ by two different ***local transformations***. There is, in other words, a ***1-1*** correspondence between set of all ***global transition functions*** $\tau^{(n)}$ and a set of all ***local transition functions*** $\sigma^{(n)}$ for the given state alphabet A, d-dimensionality of space Z^d and neighbourhood X-index. It is therefore possible to speak about the $\tau^{(n)}$ defined by $\sigma^{(n)}$, and vice versa. It is proved [5], that any ***GTF*** in a classical ***d-HS*** is primitive recursive function. The given result defines not only place of ***GTF*** in hierarchy of all recursive functions, but also together with other components determines simplicity of such mathematical objects as ***d-HS (HS-models)***.

The ***fourth*** component of the ***d-HS*** can now be defined. For the given A, Z^d and X a set of ***admissible*** transformations T is any nonempty subset of the complete set of all *global transitions* determinate by parameters A, Z^d and X. If the set T contains a single *global transition function* $\tau^{(n)}$, the such object ***d-HS*** $= \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X \rangle$ is being said to be *monogenic* (*or classical*) ***d-HS***. The

operation of a ***classical d-HS*** is particularly simple, namely: if $c=c_o$ is an initial configuration of homogeneous space Z^d at time $t=0$, then configuration at time $t=m$ is $c^*=c_o\tau^{(n)m}$, the result of applying of a *global transition function* $\tau^{(n)}$ to the homogeneous space m times. In case of so-called *polygenic* ***d-HS*** an explicitly written-out sequence of global transition functions is required for specifying a particular computation of the ***d-HS*** $=<Z^d,A,T,\omega>$, where ω is a function which describes the order of application of global transition functions of T to any *initial* configuration of homogeneous space Z^d. Thus, if c_o is a configuration and $\omega=\tau_{jo}\tau_{j1}\ldots\tau_{jk}\ldots$ is a sequence of global transformations of T, then the sequence of configurations $c_o, c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ is called the *configuration sequence generated by* ω-*rule* from an initial configuration c_o, if for each $k\geq 0$, $c_k\tau_{jk}=c_{k+1}$. Let $<c_o>[\omega]$ and $<c_o>[\tau^{(n)}]$ denote the sequences of configurations generated by ω-rule of ***polygenic d-HS*** and by *GTF* $\tau^{(n)}$ of a ***classical d-HS***, accordingly.

In the present monograph we shall consider the *classical* ***d-HS***, in general. Furthermore, unless was not pointed the contrary, by denotation «***HS***» we shall mean *classical* ***1-HS***$=<Z,A,\tau^{(n)},X>$, where $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ and $X=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$; in addition, in general, we shall deal with the local transition functions $\sigma^{(n)}$ which are defined by the mappings $A^n \to A$ such that $\sigma^{(n)}(0^n)$ always equals 0. Thus, the concept of ***classical d-HS*** is intuitively extremely simple. In this connexion the questions about the extent of community of such concept arise, i.e. how much this concept admit broadenings which do not bring out of scope of certain possibilities of the classical concept of ***d-HS***. We have considered only the *generative* power of the classical ***d-HS*** and have proved that a series of widenings of classical concept of ***d-HS*** reveal, that even with respect to narrow enough concept of equivalence of two ***d-HS***, the concept of classical ***d-HS*** possesses the sufficient degree of community [1,3,5]. In the above works we defined and investigated the so-called ***non-deterministic***, ***stochastic d-HS*** and ***d-HS*** with ***refracterity***. In the present work are discussed ***HS*** with ***refracterity*** and ***HS****, which are very suitable for describing of many parallel discrete processes in ***HS***-models.

HS*, by definition, is a four-element tuple ***HS****$=<Z,A,I,\varphi>$, where Z and A are defined similarly classical ***1-HS***, I is a set of impulses and φ is a *functional* ***algorithm*** (***FA***) of ***HS****. We shall associate an automaton with each point k of Z, and we shall identify it with k. ***FA*** φ is being defined by the following discrete equations, namely:

$$\begin{cases} a^1(i)_{t+1} = S[i_r, a(i), i_l]_t \\ (j^1_r)_{t+1} = R[i_r, a(i), i_l]_t \\ (j^1_l)_{t+1} = L[i_r, a(i), i_l]_t \end{cases} \qquad a^1(i), a(i)\in A;\quad j^1_r, j^1_l, i_r, i_l \in I;\ t=0,1,2,\ldots$$

where $a^1(i)$, $a(i)$ are states of i-automaton; i_r, i_l are ***right*** and ***left incoming*** impulses of i-automaton; j^1_r, j^1_l are right and left ***output*** impulses of i-automaton. As stated, every ***HS**** can be constructively embedded in the classical ***HS***. Furthermore, under certain conditions ***HS**** can be embedded in the classical ***HS***$=<Z,A^*,\tau^{(3)},X>$, where $A^*=A\cup I$ [1,3,5]. The above concept of ***HS****-structure can be generalized upon the general case of d-dimensionality $(d>1)$.

$$\begin{cases} \sigma^{(n)}(\varpi_k, x_2, \ldots, x_n) = \varpi_{k+1} \\ \sigma^{(n)}(\varpi_r, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \sigma^{(n)}(1, x_2, \ldots, x_n) = \varpi_1 \\ \sigma^{(n)}(0,0,\ldots,0) = 0 \\ \sigma^{(n)}(0, x_2, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow \left(\sum_{x_j=1} x_j \geq P\right) \end{cases} \quad ; \quad x_j\in A,\ k=1..(r-1);\ j=2..n$$

The ***d-HS*** with *refracterity* can be defined as follows**.** Let ***d-HS***=<Z^d,***A***,$\tau^{(n)}$,***X***>**,** where ***A***={***0,1***}∪ {$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_r$}**,** is called ***d-HS with refractority*** {***HSR(d,r,P)***}**,** if its global transition function $\tau^{(n)}$**,** is defined by the local transition function $\sigma^{(n)}$ described by the above relations.

As regards the states of an automaton in ***HSR(d,r,P)***, the most general states are being chosen, namely**:** ***rest (0)***, excitation ***(1)*** and ***refracterity of r-depth*** {$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_r$}**.** According to index ***X*** of neighbourhood, there is the possibility of various structural interrelations between automata in such ***HSR***. The general object in such structure is investigation of the dynamical distribution of automata in ***excitation*** states ***(1)*** in conformity with an initial configuration**,** index ***X*** of neighbourhood, ***threshold (P)*** of ***excitation*** and the ***r-depth of refracterity***.

At present**,** the ***HS*** theory is an enough highly developed independent field of the modern cybernetics**,** which has a considerable sphere of applications in different branches of science and engineering**.** In our monographs [3,5,8,9] the architecture of the ***HS*** theory and its applications from our point of view has been presented. The *architecture* takes a discussion of our previous attempts in this direction into account along with the most basic recent applied and theoretical results in the ***HS*** theory. We hope that the architecture will be described in detail and will be verified in the relevant scope, since its analysis can be useful enough in choice of subsequent directions for investigations in this topic.

The following material is devoted to the ***HS*** theory and contains the most essential results in this direction, which were obtained by the ***TRG*** during ***1968-2007***, excepting the decennial recess ***(1997-2006)*** conditioned by work on computer algebra systems ***(CAS)***. The present problems are being discussed on the basis of ***1-***dimensional ***HS***, but practically all general results can be generalized on the general case of ***d-***dimensionality ***(d > 1)***.

Questions of ***nonconstructibility*** (*impossibility to construct*) are fundamental problems in the study of *dynamical* properties of ***HS-***models and their applications. A problem of central importance is the characterization of the global behaviour (*dynamics*) of ***HS*** as a function of the *local transition function* ***(LTF)***. Since the study of histories of configurations in ***HS*** plays a basic part in investigation of ***HS*** dynamics**,** it is interesting to find conditions of the existence of nonconstructible configurations ***(NCF)***, i.e. constructive limitations of ***HS-***models. Furthermore, *nonconstructibility* problem in ***HS-***models presents a considerable gnoseological question. Below we present the most important results and modern state of the nonconstructibility problem in the classical ***1-***dimensional ***HS***, however these results**,** practically all, can be generalized upon the case of ***d-***dimensionality ***(d>1)***. Above all, for the purpose of exhaustive investigation of the problem we will introduce four classes of the ***NCF*** and will establish general interconnections between these concepts of *nonconstructibility*. The ***nonconstructibility problem*** is discussed in the second chapter of the present monograph.

Definition 1*. Configuration $c_b \in C(A,d,B)$ of a finite d-dimensional B-hypercube (block) of automata in d-HS is nonconstructible CF (NCF) if and only if does not exist CF $c \in C(A,d)$ such that $c_b \subset c\tau^{(n)}$ $(d \geq 1)$.*

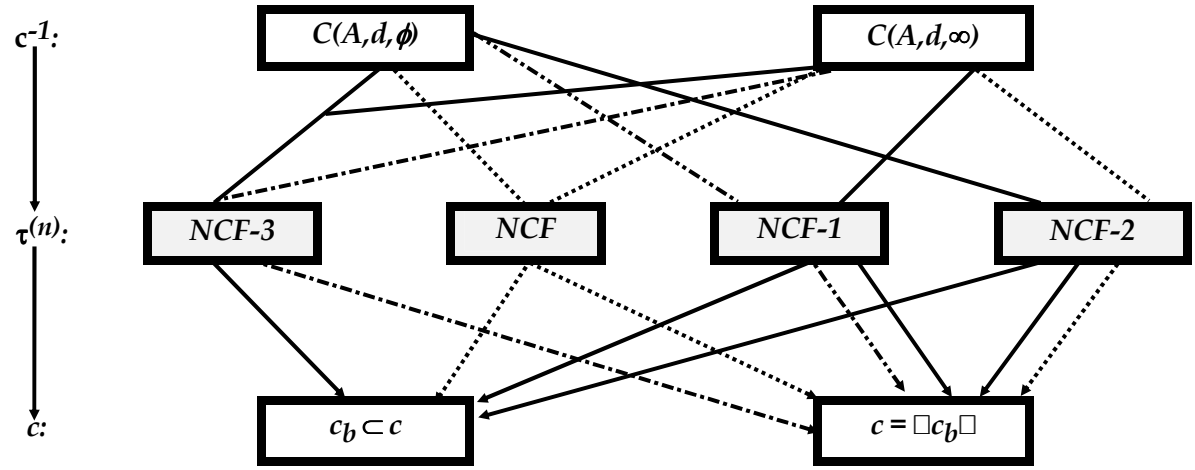
Definition 2*. Configuration B_s of finite d-dimensional hypercube of automata in d-HS is nonconstructible with respect to some S-set (NCF_s) if and only if does not exist CF $c^* \in S \subseteq C(A,d)$ such that $B_s \subset c^*\tau^{(n)}$ $(d \geq 1)$.*

Definition 3*. A finite CF $c=\square c_b \square \in C(A,d,\phi)$ is nonconstructible of the type NCF-3 if and only if the block CF c_b of d-dimensional hypercube of automata in d-HS is constructible but CF c is nonconstructible; where □ – edging of block c_b-configuration by finite number of 0-states.*

Definition 4*. Configuration $c \in C(A,d,\phi)$ is nonconstructible of the type NCF-1 for classical d-HS if and only if $(\exists c` \in C(A,d,\infty))(c`\tau^{(n)}=c)$ and $(\forall c^* \in C(A,d,\phi))(c^*\tau^{(n)} \neq c)$. CF $c \in C(A,d,\phi)$ is non-*

constructible of the type NCF-2 for a d-HS if and only if $(\exists c` \in C(A,d,\phi))\ (c`\tau^{(n)} = c)$ *and* $(\forall c^* \in C(A,d,\infty))(c^*\tau^{(n)} \neq c)$.

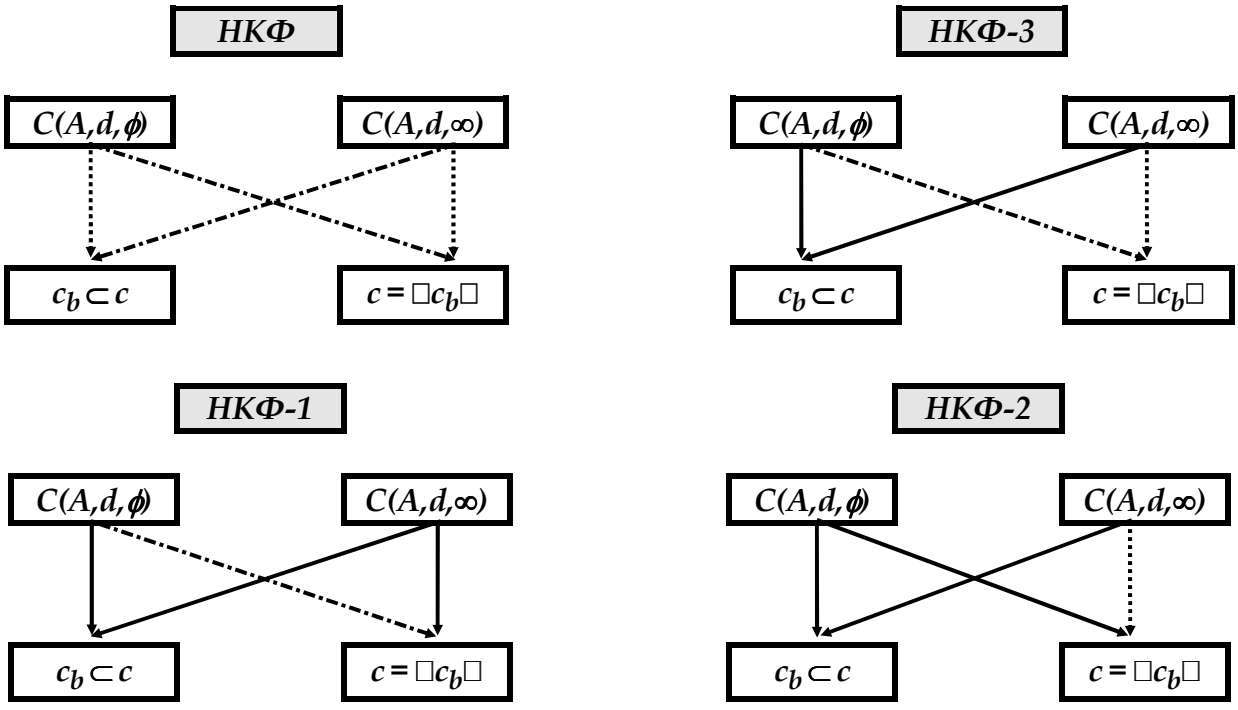
Obviously, if structure ***d-HS*** possesses ***NCF-1*** then relation $(\exists c \in C(A,d,\infty))(c\tau^{(n)} = \square)$ takes place. The following diagram illustrates interconnections of the above nonconstructibility types.



where $c^{-1}\tau^{(n)} = c$; c^{-1} *– predecessor for the finite c-CF*

Theorem 1. Any classical 1-HS has at least one type of nonconstructibility NCF (and possibly, NCF-3), NCF-1 and NCF-2. Nonempty sets of NCF, NCF-1, NCF-2 and NCF-3 for classical HS-models are infinite. Each GTF $\tau^{(n)}$ *of classical 1-HS can possess the types of nonconstructability according to the table 1. If for a classical d-HS the set C(A,d,∞) is non-closed relative to global map induced by GTF* $\tau^{(n)}$*, the homogeneous structure possesses the types NCF, NCF-1 or both types of nonconstructibility simultaneously. A classical d-HS without NCF (NCF-3) and NCF-1 has NCF-2; classical d-HS without NCF-2 has NCF and/or NCF-1 (d ≥ 1).*

The diagrams representing the opportunities of existence of predecessors in sets C(A,d,ϕ) and C(A,d,∞) for configurations $\{c_b \mid c=\square c_b\square\}$ *concerning four types of nonconstuctability; in addition, the continuous (dotted) marking of lines designates accordingly the admissibility (inadmissibility) of existence of configurations-predecessors for c-KΦ in classical HS-models.*



In table *1* mark «**+** (**-**)» identifies the *existence* (*absence*) of the corresponding type of nonconstructability in the classical ***1-HS,*** defining the allowable combinations of types.

Table 1

Admitted typies of nonconstructibility in 1-HS				*Possibility of combination*
NCF	*NCF-1*	*NCF-2*	*NCF-3*	
+	+	+	+	*Yes*
+	+	+	-	*Yes*
+	+	-	+	*Yes*
+	+	-	-	*Yes*
+	-	+	+	*Yes*
+	-	+	-	*Yes*
+	-	-	+	*Yes*
+	-	-	-	*Yes*
-	+	-	+	*No*
-	+	-	-	*Yes*
-	-	+	+	*No*
-	-	+	-	*Yes*
-	+	+	+	*No*
-	+	+	-	*No*
-	-	-	+	*No*
-	-	-	-	*No*

Theorem 2. For any GTF $\tau^{(n)}$ for a classical 1-HS take place the following correlations NCF⊂ C(A,d,ϕ), NCF-1⊂C(A,d,ϕ) and NCF∪NCF-1∪NCF-2∪NCF-3⊂C(A,d,ϕ). Let G=C(A,d,ϕ)\{□}; there are d-HS (d≥1) for which takes place relation G=NCF or G=NCF-2, but not G=NCF-1.

Relative to the problem of ***nonconstructibility,*** the question about quotas of the classical ***HS,*** possessing by ***NCF*** of the different types presents undoubted interest. With the aid of the specific approaches we deduced a series of useful enough correlations.

Theorem 3. Let N(a,n) – quantity of all classical 1-HS; N1(a,n), N2(a,n), N3(a,n) and N4(a,n) – quantity of the such structures, which accordingly not possess NCF, possess NCF-1 without NCF, possess NCF-2 without NCF-3. Then the following correlations take place, namely:

$$\frac{N1(a,n)}{N(a,n)} \approx \frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{2*\pi*a^{n-1}}\right)^{a-1}} \qquad \frac{N2(a,n)}{N(a,n)} \approx 0.6*\left(\frac{\sqrt{2*\pi*a}}{e^{a}}\right)^{a}$$

$$N3(a,n) > (a-1)^{a^{n}} \qquad N4(a,n) > (a-2)^{a^{n}}$$

A number of interesting results concerning existence of ***NCF-1*** in ***d-HS*** with alphabet ***A*** = {***0,1, 2, ..., a-1***} whose ***LTF*** are defined as follows, namely**:**

$$\sigma^{(n)}(x_o, x_1, ..., x_{n-1}) = x^*_o = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \pmod a$$

have been received. In particular, the following results can be mentioned [5,54-56,88]**:**

– quota of all configurations NCF-1 for 1-HS with binary alphabet B and the simplest neighbourhood index X={0,1} equals 1/2 relatively a set of all finite binary configurations from set

$$C(B,1,\phi) = \{1,11,1x_1x_2 \ldots x_n1 \mid x_j \in B;\ j = 1..n;\ n = 1..\infty\};$$

– any finite configuration containing odd number of states «1» in such structure is NCF-1;

– the set $C(B,1,\phi)$ of all finite configurations is being generated from set of NCF-1, i.e.

$$\bigcup_j \{c_j\tau^{(n)k} \mid k = 0,1,2,\ldots\} = C(A,1,\phi); \qquad c_j\tau^{(n)0} \equiv c_j, \quad ;$$

where $\{c_j\}$ – the set of all finite configurations NCF-1

– any finite configuration of size less than template of d-HS of such type is NCF-1.

In our opinion, much attention should be paid to the concept of ***nonconstructibility*** with respect to certain sets of configurations in the classical ***HS*** in view of a whole series of interesting interpretations in both theoretical and applied aspects.

Definition 5. Configuration $c \in C(A,d)$ is nonconstructible with respect to a set of configurations $B \subset C(A,d)$ and GTF $\tau^{(n)}$ of the classical d-HS if and only if $(\forall c^* \in B)(c^*\tau^{(n)} \neq c)$.

Theorem 4. If GTF in the classical 1-HS not possesses NCF, then it not possesses and NCF-3; with respect to the set $B=C(A)\setminus C$ such GTF possesses NCF-1 or/and NCF-3, and can possess NCF-2 or/and NCF-3 and NCF-3, if C-set will be as strong subset accordingly of sets $C(A,\phi)$, $C(A,\infty)$ and $C \cap C(A,\phi) \neq \varnothing$, $C \cap C(A,\infty) \neq \varnothing$. If GTF in the classical 1-HS not possesses NCF, then with respect to sets $B=C(A)\setminus C(A,\infty)$ and $B=C(A)\setminus C(A,\phi)$ such GTF has accordingly each configuration $c \in C(A,\phi)$ as NCF-2 along with nonconstructibility of types NCF-1 and/or NCF-3.

A series of similar results in this direction can be found in our monographs [5,9]. In item **2.2** a number of criteria of the existence in the classical ***HS***-models of the above types of nonconstructability are presented. The first criterion is ascended to ***Moore*** and ***Myhill*** and is based on the concept of the ***mutually erasable configurations (MEC).***

Definition 6. Two configurations $c_1, c_2 \in C(A,\phi)$ $(c_1 \neq c_2)$ generate a pair of MEC for GTF $\tau^{(n)}$ in the classical d-HS if and only if $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)}$.

Definition of the ***MEC*** formulated by ***E. Moore*** is equivalent to the above-mentioned, and can be formulated as follows.

Definition 7. Let W will be some block of m adjacent individual automata of the classical 1-HS and B will be a set of all neighbouring automata for B-block according to the index neighbourhood $X=\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$. Let CF(P) will be arbitrary configuration of the finite P-block of the individual automata of the structure. Two block configurations $CF_1(W) \cup CF(B)$, $CF_2(W) \cup CF(B)$ are called a pair of MEC for GTF $\tau^{(n)}$ in the classical 1-HS if and only if the following correlations $[CF_1(W) \cup CF(B)]\tau^{(n)} = [CF_2(W) \cup CF(B)]\tau^{(n)}$ and $CF_1(W) \neq CF_2(W)$ take place; W-block is called the internal block (IB) of the pair MEC (IB MEC).

This definition is ascended to ***Moore,*** and is very useful for receiving of a series of numerical characteristics of ***HS;*** on the basis of this definition ***E.F. Moore*** and ***J. Myhill*** have proved the following criterion of the existence of the nonconstructible configurations for classical ***d-HS.***

Theorem 5. The existence of a MEC is necessary and sufficient for the existence of NCF in the classical d-HS. Arbitrary classical d-HS ($d \geq 1$) has at least one of three base types of nonconstructability NCF, NCF-1, NCF-2 or their allowable combinations.

In connexion with the study of the ***nonconstructibility*** in the classical ***d-HS,*** we considered a series of problems of existence of ***MEC*** in ***HS,*** detailly enough. The obtained results have both qualitative and numerical character, as well [5,19,20,22].

Theorem 6. There is a classical binary structure 1-HS with Moore's neighbourhood index that has pairs of the MEC with simple IB of size L of one of the following types only, namely:

1) $L=\{p+ \mid p \geq 1\}$; ***2) $L=\{1+, 2+, 3+, p- \mid p \geq 4\}$;*** ***3) $L=\{1-, p+ \mid p \geq 2\}$***

4) $L=\{1+, 2p-, (2p+1)+ \mid p \geq 1\}$; 5) $L=\{1-, 2+, p- \mid p \geq 3\}$; 6) $L=\{1+, p- \mid p \geq 2\}$

where mark** {+ | -} **reveals that 1-HS has {has not} pairs of MEC with simple IB of size L (simple IB contain no others MEC).

***Theorem 7**. For any integers $a \geq 3$ and $n \geq 2$ exists a classical 1-HS with alphabet $A=\{0,1,..,a-1\}$ and neighbourhood index $X=\{0,1,2,...,n-1\}$ which has pairs of the MEC with simple IB of minimal size $L = n$.*

The results of theorems ***6 - 7*** were obtained using methods of computer modelling.

***Theorem 8**. If a classical 1-HS has pairs of MEC with simple IB of minimal size L, then takes place the following correlation $n \leq L < a^{n-1}(a^{n-1} - 1) + n - 2$.*

***Theorem 9**. Minimal size (L) of the NCF in a classical 1-HS is being defined by the following correlation, namely: $(n+1) \leq L < 2^{a(n-1)}$.*

Problem of existence for classical ***d-HS*** so-called ***vanishing*** configurations is highly interesting with point of view of ***HS-***dynamics**,** including nonconstructibility problem.

***Definition 8**. A finite configuration $c \in C(A,\phi)$ is the vanishing configuration (VCF) for a classical d-HS if and only if $(\exists m>0)(c\tau^{(n)m}=\square)$, where $\square$ and $\tau^{(n)}$ – are null configuration and GTF of the structure accordingly.*

***Theorem 10**. If for classical 1-HS exists VCF, then the structure possesses the nonconstructibility of NCF-type. The minimal length $L(a,n)$ of the VCF in a classical 1-HS is being determined by the following correlation: $n-1 \leq L(a,n) < a^n + n - 1$. Exists a classical 1-HS with the simplest neighbourhood index $X = \{0, 1\}$, which possesses the VCF of the minimal size $L(a,2) = a-1$. If the set $C(A,d,\infty)$ is non-closed relative to global map $\tau^{(n)}$ then for d-HS ($d \geq 1$) without NCF (NCF-1) the nonconstructibility of type NCF-1 (NCF) exists.*

Now, we will state a new ***criterion*** of the ***NCF*** existence in the classical ***1-HS,*** which is known to be generalized for higher dimensionality and which not depends on the concept of ***erasability*** in ***HS-***models. The criterion is based on the concept of **γ-**configurations ***(γ-CF).***

***Definition 9**. In addition to suppositions and designations of the definition 7, let P(W) will be number of individual automata in arbitrary W-block of a classical 1-HS. For classical 1-HS exists γ-CF of W-block if and only if at least for one CF(W) exist $G(\gamma) \neq a^{n-1}$ configurations-predecessors such that $[CF(W) \cup (B)]\tau^{(n)} = CF(W)$, where B – block of automata in the structure which are adjacent to all automata of W-block according to neighbourhood index and GTF.*

Our definition of ***γ-CF*** is slightly different from ***Maruora-Kimura*** definition of so-called ***k-balanced GTF,*** but it is easy to see that they are equivalent. In view of definition ***9*** the following theorem can be proved.

***Theorem 11**. A classical d-HS possesses the nonconstructibility of NCF-type if and only if for the structure exist γ-CF.*

Theorem ***11*** gives another *criterion* of the existence of ***NCF*** in the classical ***HS-***models, and it is more convenient for theoretical investigations of ***HS-***models**.** The criterion allows us to receive more acceptable estimations for some numerical characteristics of ***HS-***models.

***Theorem 12**. If for a classical 1-HS exist γ-CF of the length B, then for the structure exist NCF of the length L, expressed by the following formula, namely:*

$$L = \left\lceil \frac{(n-1) * \ln a}{(n-1) * \ln a - \ln G(\gamma)} \right\rceil * (B + n - 1) - n + 1$$

where n – size of neighbourhood template of the structure, G(γ) corresponds to the definition 9, a – cardinality of alphabet A of internal states of 1-HS and]Z[denotes integer ≥ Z.

In a whole series of cases instead of optimum estimation of ***NCF*** size it is desirable to have a simple formula as a function of the general parameters of ***HS-***models**.** In this direction the following theorem takes place.

<u>Theorem 13</u>. If for a classical 1-HS with Moore neighbourhood index X={-1,0,1} exist γ-CF of length B, then for the structure exist NCF of minimal L-length according to the following correlation: $B \le L \le 2*(B+n-1)*(n-1)*a^{n-1}*]ln\ a[$.

The theorem gives estimations for minimal size of ***NCF*** in the classical ***1-HS*** as function of the main parameters: sizes of ***γ-CF*** and template**,** and cardinality of alphabet ***A*** of internal states of ***1-HS,*** only**.** These results can be useful enough for the theoretical and for numerical investigations in ***HS-***problems**,** as well**.** Furthermore**,** the results can be easily enlarged upon ***HS-***models of higher dimensionality with arbitrary neighbourhood index.

As an example of ***distribution*** of classical ***HS-***models concerning nonconstructibility types, presented above, we shall consider group of binary ***1-HS*** with neighbourhood index ***X = {0,1, 2}. LTF*** of such structures are defined by parallel substitutions of the following kind, namely**:**

$000 \to x_0=0$	$010 \to x_2$	$100 \to x_4$	$110 \to x_6$
$001 \to x_1$	$011 \to x_3$	$101 \to x_5$	$111 \to x_7$

Obviously, quantity of all such structures is equal $2^7=128$**.** For simplicity we shall number the given structures by integers corresponding to their binary representatives $<x_1 \dots x_7>$**,** i.e. from ***0*** up to ***127.*** For example, the structure determined by ***LTF*** of the following kind, namely**:**

$$\sigma^{(3)}(x_0, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{2} x_j \pmod 2; \quad x_j \in A = \{0,1\}$$

at the made assumption will have number ***105.***

According to неконструируемости criterion on the basis of ***γ-CF (theorem 11)*** we can simply make sure, that every ***1-HS*** from the considered group possesses ***NCF*** and, possibly, ***NCF-1 (****determination of it we relinquish to the reader****)*****.*** Amount of such structures is ***93,*** their numbers**:**

0..14, 16..29, 31..39, 40..42, 44, 46..50, 52, 54..56, 59, 61..74, 76, 77, 79..84, 87, 88, 91, 93..98, 100, 103, 104, 107, 109..112, 115, 117..119, 121..127

A number of structures of the given subgroup can support complex enough dynamics on features of which we here not accentuate the attention. The following subgroup is made by the structures, possessing by pairs ***MEC,*** and consequently ***NCF.*** Amount of such structures is ***11,*** their numbers are: ***43, 53, 57, 58, 68, 92, 99, 108, 113, 114*** and ***116.*** In particular, structures with numbers ***53, 99*** and ***113*** do not possess ***NCF-1,*** whereas structures with numbers ***92, 108*** and ***114*** possess ***NCF-1*** in addition.

Three structures with numbers ***15, 51*** and ***85*** do not possess ***NCF*** and ***NCF-1,*** generating identical sequences of configurations ***(****within shift****)*** and from the point of view of dynamics of special interest do not represent. At last, the structures which are not possessing ***NCF*** owing to absence for them ***MEC*** belong to the last subgroup. Numbers of such structures with certain comments are represented below, namely**:**

30 – configurations of the kind $\{\square(1110)^k 11\square \mid k=0,1, \dots\}$ are ***NCF-1*** in the structure
45, 101 – do not possess ***NCF-1***
60 – configurations of the kind $\{\square 1^{2k+1}\square \mid k=0,1, \dots\}$ are ***NCF-1*** in the structure
75, 102, 105, 106, 120 – possess ***NCF-1*** of the simplest kind $c=\square 1\square$
86, 90 – possess ***NCF-1*** of the simple kind $c=\square 11\square$
89 – configurations of the kind $<1x_1x_2 \dots x_n111>$ are ***NCF-1*** in the structure**;** $x_j \in A=\{0,1\}$, $j=1..n$

Thus, from total amount ***128*** binary structures of the considered group**:**

– *113* possess ***NCF*** and, possibly, ***NCF-1;***

– *3* with numbers ***15,51*** and ***85*** do not possess ***NCF*** and ***NCF-1;*** however**,** they from standpoint of dynamics are not of particular interest;

– *12* do not possess ***NCF;*** in addition, only two of them with numbers ***45*** and ***101*** do not possess ***NCF-1*** in addition.

Hence, the quota of structures possessing ***NCF*** and, probably, ***NCF-1*** is **≈ *0.88*,** whereas only **2** structures with numbers ***45*** and ***101*** do not possess basic types of nonconstructibility ***NCF*** and ***NCF-1*.** In addition, any sequence generated from initial finite configuration in structures ***45*** and ***101*** is periodical**;** length of period depends on length of initial configuration and its kind. For example, for configurations ***c(k)*** length of period is defined by the following formula**:**

$$c(k) = 1^k \equiv \underset{\leftarrow k \rightarrow}{11\ldots11} \quad (k \geq 1); \qquad p = 2^{[\log_2 (k+1)]}; \quad \textit{decimal representation } 1^k \equiv 2^{\kappa} - 1$$

$$\textit{where } [x] \ - \ \textit{an integer is no more than } x$$

Thus, only ***5*** structures from ***128*** with numbers ***15, 41, 45, 85*** and ***101*** possess full *convertibility* of final configurations generated by them**;** where by this concept is understood an opportunity of calculation of all chain of final predecessors for each configuration $c \in C(A,1,\phi)$**,** i.e. completely to determine its ***prehistory*** in structure. Taking into account their generative possibilities, from the point of view of modeling applications they do not represent particular interest. Hence, from this point of view the binary ***1-HS*** with neighbourhood index of $X = \{0,1,2\}$, possessing nonconstructibility of types ***NCF*** and/or ***NCF-1*** can present the greatest interest only. Said substantially is being generalized and onto more general cases of classical ***HS-***models. Thus, for obtaining of complex enough dynamics we should pay the attention to ***HS-***models possessing types of nonconstructibility ***NCF*** and/or ***NCF-1*.**

In particular, it is possible to show [54], that for a providing of self-reproducibility according to the Moore of all configurations $c \in C(A,d,\phi)$**,** so-called «*universal reproducibility*»**,** presence in a ***d-HS NCF-1*** at absence of ***NCF*** in it is necessary condition, whereas the converse proposition is generally incorrect. Thus, we receive certain kind of «***filter***» for selection of structures **–** candidates for possession of property of universal reproducibility according to Moore**.** Namely among such structures there are structures both with property of universal reproducibility, and with property of a high degree of nonconstructibility of the finite configurations.

In particular**,** among binary ***1-HS*** considered above only structures with numbers ***30, 60, 75, 86, 89, 90, 102, 105, 106*** and ***120*** possess ***NCF-1*** without ***NCF,*** and to already well-known additive structure ***105*** possessing property of universal reproducibility, in full measure it is possible to attribute and structures with numbers ***90*** and ***102*.** In addition, for these structures interesting regularity had been found**,** namely: ***for «almost all» configurations $c_0 \in C(A,1,\phi)$, if n copies of c_0 are generated by structure 90 for t steps, the same quantity of this configuration c_0 is generated by structure 102 for 2*t-1 steps; exception is configurations from set $\{1^{2k-1} \mid k=1,2,3, \ldots\}$.***

The concept of *nonconstructibility* of types ***NCF*** and ***NCF-1*** is enough closely connected to types of dynamics ***(graphs of states)*** of classical ***d-HS.*** In particular, the following result takes place [54], namely**:** ***If classical d-HS ($d \geq 1$) not possess the nonconstructibility of types NCF and NCF-1, then for each configuration $c_j \in C(A,d,\phi)$ the structure generates configurations sequences (graphs of states) of only one of following three kinds, namely:***

(a) ***all configurations sequences $\{c_j\tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ in the structure are periodical***

(b) $\ldots \rightarrow c_{j-k} \rightarrow \ldots \rightarrow c_{j-2} \rightarrow c_{j-1} \rightarrow c_j \rightarrow c_{j+1} \rightarrow c_{j+2} \rightarrow \ldots \rightarrow c_{j+k} \rightarrow \ldots$

(c) ***has configurations sequences $\{c_j\tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ of types (a) and (b)***

Absence for classical HS-models of nonconstructibility of NCF-type is necessary, but not sufficiently for guarantee of reversibility of their dynamics relative to finite configurations. If

classical d-HS ($d \geq 1$) possesses the nonconstructibility of type NCF-1 without NCF, then for each configuration $c_j \in C(A,d,\phi)$ the structure generates configurations sequences (transitions graphs) of only one of the following two kinds, namely:

(a) $c_j \to c_{j+1} \to \ldots \to c_{j+p} \to \ldots \qquad \bigcup_j \{c_j \tau^{(n)k} \mid k \geq 0\} = C(A,d,\phi);$ *c_j – NCF-1 ($j=1..\infty$)*

(b) has configurations sequences $\{c_j \tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ of type (a) along with periodical

We can easily be made sure in correctness of the following result [54]**:** ***For existence in a d-HS ($d \geq 1$) without NCF of nonconstructibility of type NCF-1 is enough that for each configuration $c \in C(A,d,\phi)$ the d-HS generates as a whole the ascending configurations sequence relative to the size of configurations, i.e.***

$$(\forall c \in C(A,d,\phi))(\exists \{j_1 > j_2 > \ldots > j_q > \ldots\}) \left(k < p \to \left| c\tau^{(n)j_p} \right| > \left| c\tau^{(n)j_k} \right| \right) \& (\neg \exists (k<p)) \left(\left| c\tau^{(n)k} \right| > \left| c\tau^{(n)p} \right| \right)$$

j_q – ascending sequence of integers; $|h|$ – size of a configuration h $(q = 1, 2, \ldots \infty)$

Obviously, for existence in a d-HS ($d \geq 1$) of nonconstructibility of type NCF-1 it is necessary (but not enough) presence for the structure of configurations $c \in C(A,d,\infty)$ such, that $c\tau^{(n)} = \square$.

On the basis of analysis of the basic types of nonconstructibility and computer simulation, it is possible to establish a fact, dynamics of configurations $c_o \in C(A,d,\phi)$ in classical ***HS-***models is characterized by transition graphs of the following type, namely**:**

1. ***<u>Infinite nonperiodical sequence</u>*** *of configurations from $C(A,d,\phi)$*

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \ldots . c_j \to \ldots .$$

for which there are two possibilities, namely**:**

(a) to define algorithm of the structural organization of components of configurations depending on initial ***CF*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ and the moment of time ***t;*** as examples the binary ***1-HS*** considered above with numbers ***105*** and ***111*** can serve**.**

(b) such algorithm is absent or is complex enough for determination**.**

2. ***<u>Sequence of a pure cycle;</u>*** in addition**,** under the given definition fall the passive configurations $c_o \in C(A,d,\phi)$ determined by relations $c_o \tau^{(n)} = c_o$ *(accurate to shift)* also**.**

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \ldots . c_j \to c_o$$

There are ***HS-***models, in which everyone ***CF*** c_o generates a pure cycle whose period **≥ 2** and depends as on kind of ***CF*** $c_o \in C(A,d,\phi)$**,** and its size. As examples the binary ***1-HS*** considered above with numbers ***45*** and ***101*** can serve.

3. ***<u>Sequence of the mixed cycle;</u>*** it is being characterized by presence in it of certain ***CF*** c_j**,** generating a pure cycle, namely**:**

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \ldots . c_j \to \ldots . \to c_{j+p} \to c_j$$

As examples the binary ***1-HS*** considered above with numbers ***44 (CF 101 & 10101)*** and ***66 (CF 1011)*** can serve**.** In addition**,** it is simple to be convinced**,** ***HS-***models whose dynamics includes transition graphs such as ***(3)***, possesses the неконструируемостью of ***НКФ-***type.

Dynamics of classical ***HS-***models does not possess the transition graphs of other type**;** in addition, dynamics can correspond both to sets of the specified graphs**,** and exceptionally to one of them**.** For example**,** dynamics of ***1-HS*** with number ***105*** is being described by transition graphs exceptionally only such as ***(1.a)***, whereas ***1-HS*** with numbers ***45*** and ***101*** by transition graphs only such as ***(2).***

The above-mentioned considerations have been considered by us [29,30] as one of approaches to classification of dynamics of classical ***HS-***models in connection with discussion of a rather interesting work of ***A.W. Burks*** [314]. Afterwards, by systematizing ***HS-***models with respect to their behavior, ***S. Wolfram*** has allocated them into four classes similarly to our approach. The mentioned two classifications carry clearly «***phenomenological***» character and not give any recommendations for designing required rules of behavior of ***HS-***models; they only characterize the possible types of dynamics as a whole. There are also other «***phenomenological***» criteria of classification of rules of behavior of epy classical ***HS-***models on which we will stop a shade lower. Whereas the transition graphs of prehistories ***(predecessors)*** of ***CF*** c_o from the set $C(A,d,\phi)$ belong to the following types, namely**:**

1. ***Infinite nonperiodic*** sequence of configurations from the set $C(A,d,\phi)$**,** namely**:**

$$.... \leftarrow c_{-j} \leftarrow .... \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

As examples the binary ***1-HS*** considered above with number ***39*** $(CF \square 1^k \square \mid k=1..n)$ can serve.

2. ***Finite sequence*** of configurations from the set $C(A,d,\phi)$**:**

$$c_{-j} \leftarrow .... \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

Takes place, if ***CF*** c_{-j} is nonconstructible ***CF*** of ***NCF-***type. For example, for above-mentioned ***1-HS*** with number ***39,*** one of possible sequences of predecessors for the ***CF*** $c_o=1$ has the following kind, namely**:** $c_{-3}=101 \rightarrow 111 \rightarrow 11 \rightarrow 1=c_o$**,** where ***CF 101*** is ***NCF.***

3. ***Sequence of a pure cycle;*** in addition**,** under the given definition fall also the passive ***CF*** $c \in C(A,d,\phi)$ **(***accurate to shift)* also**,** namely**:**

$$c_{-j} \leftarrow .... \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

As examples the binary ***1-HS*** considered above with numbers ***45*** and ***101*** can serve.

4. ***Sequence of the mixed type;*** it is characterized by presence in it of certain ***CF*** c_{-j} for which predecessors can be from the set $C(A,d,\phi)$**,** from the $C(A,d,\infty)$ or from both sets simultaneously, namely**:**

$$\leftarrow .... c_{-j-p} \leftarrow .... \leftarrow c_{-j-1} \qquad c_r \in C(A,d,\phi);\ r=0..-j-p$$

$$c_{-j} \leftarrow .... \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

$$\leftarrow .... b_{-j-k} \leftarrow .... \leftarrow b_{-j-1} \qquad b_q \in C(A,d,\infty);\ q=-j-1..-j-k$$

As examples the binary ***1-HS*** considered above along with other types of ***HS-***models [54] can serve. In addition, it is possible to be convinced, transition graphs of predecessors such as ***(4),*** starting with ***CF*** c_{-j} admit the subgraphs of kinds ***(1) - (3).*** In the light of our results on the nonconstructability problem the following suggestion can be formulated**:** ***In general, the problem of classification of d-HS*** $(d \geq 2)$ ***according to types of their states graphs is unsolvable.***

Our classification and similar to it classification of ***S. Wolfram*** of dynamics of *classical* ***HS-***models have especially «***phenomenological***» character and an appreciable classifying part do not play. They both have been obtained on a basis of experimentation with rather simple types of classical ***HS-***models and on especially speculative experiments**.** Meanwhile**,** each classification claiming to name itself like this**,** should provide direct or indirect algorithm allowing any classical ***HS-***model to ascribe to one or another type. However both above-mentioned classifications do not allow to do it **–** for example, in view of unsolvability of the problem of existence of ***NCF*** in ***HS-***models of dimensionality $d \geq 1$ we cannot already differentiate an arbitrary ***HS-***model concerning the above type ***4.*** Impossibility of similar classification has been proved also by ***Culik K.*** and ***Yu S.*** [555] being based on one unsoluble problem, namely: it cannot be decided whether all finite configurations of a given ***HS*** become quiescent and therefore to which class

it belongs. Some other rather interesting classifications have been proposed also. In particular, ***Langton C.*** has suggested that ***LTF*** of ***HS***-models can be parameterized by their λ-parameter, which measures the fraction of non-quiescence ***LTF. Dubacq J. et al.*** as well as ***Goldenfeld H.*** and ***Israeli N.*** have also proposed the parameterization of ***LTF*** of ***HS***-models as measured by their ***Kolmogorov*** complexity [536].

The method of ***NCF*** and ***NCF-1*** is a very powerful tool in analysis of ***HS***-models. The effectiveness of this approach depends very much upon the quantitative knowledge of main correlations between ***MEC, NCF, NCF-1*** and ***γ-CF*** on the level of local functions and global functions as well. At present, full knowledge of this topic does not exist. We present some individual results in this direction.

Theorem 14. Let $\tau^{(n)}=\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ will be decomposition of GTF $\tau^{(n)}$ onto two functions $\tau^{(m)}$, $\tau^{(p)}$ of the same 1-dimensionality and defined in the same A-alphabet. If a GTF $\tau^{(m)}$ has not MEC and $\tau^{(p)}$ has D-set of γ-CF, then GTF $\tau^{(n)}$ has the same D-set of γ-CF. If GTF $\tau^{(m)}$ has not MEC and $\tau^{(p)}$ has MEC, then GTF $\tau^{(n)}$ has the same set of NCF that GTF $\tau^{(n)}$. There is a GTF which has MEC with limited size of minimal simple IB and NCF of any earlier given minimal size. There is GTF for which any pair of MEC contains NCF. Let GTF $\tau^{(n)}$ has a set M of pairs MEC; then GTF $\tau^{(n)m}$ (m>1) has identical with function $\tau^{(n)}$ set M of MEC if and only if at least one configuration of each pair MEC of M is NCF for GTF $\tau^{(n)}$. Otherwise, $(\forall k\geq 1)(M_k\subset M_{k+1})$ where M_k – set of all pairs of MEC for GTF $\tau^{(n)k}$ $(k\geq 1)$. Let $\tau^{(n)}=\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ will be decomposition of GTF $\tau^{(n)}$ onto two functions $\tau^{(m)}$, $\tau^{(p)}$ of the same d-dimensionality and defined in the same A-alphabet. Then GTF $\tau^{(n)}$ will have NCF if and only if at least one global transition function $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ will possess NCF. If at least one GTF of a pair $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ possesses NCF-1 then GTF $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(p)}$ will possess NCF-1 and/or NCF.

Theorem ***14*** takes place for basic ***HS***-models, and in view of it, it can be easily seen that there is a function $\tau^{(n)}$ with the different sets of ***MEC*** and with the same sets of ***NCF***. In connection with this result we have the following interesting theorem.

Theorem 15. For each integer n≥2 there is classical 1-HS for which minimal block sizes (B) of MEC and NCF are linked by the following correlations B(MEC)/B(NCF)=n or B(MEC)/B(NCF)= 1/(n+1) for minimal B(γ-CF)=1, accordingly. For each integer n≥2 there is GTF $\tau^{(n)}$ of classical 1-HS, which possesses no NCF and NCF-3, but which has NCF-1 of minimal size L ≥ n-1. For each integer n≥3 there is GTF $\tau^{(n)}$ of a classical binary 1-HS which possesses γ-CF of minimal size L = n and IB MEC of minimal size L = 1.

Now we shall consider similar questions for other concepts of nonconstructibility in the classical ***HS***-models ***(NCF-1, NCF-2*** *and* ***NCF-3),*** which according to theorem ***1*** can combine in very wide limits. Of definitions ***1-4*** and theorem ***1*** easily follows, that configurations $c\in C(A,d,\phi)$ cannot be ***NCF, NCF-1, NCF-2*** and ***NCF-3*** simultaneously. Consequently, the intersections of any pairs of nonconstructible configurations of above types for any ***GTF*** are ***empty*** sets. The following theorem gives a criterion of the existence of ***NCF-1 (NCF-2)*** for classical ***HS***-models without ***NCF*** and ***NCF-3.***

Theorem 16. Set C(A,d,∞) is closed with respect to GTF $\tau^{(n)}$ of classical d-HS if $(\forall c`\in C(A,d,\infty))$ $(c`\tau^{(n)}\in C(A,d,\infty))$; in the opposite case the set C(A,d,∞) is not closed. A classical d-HS, which has not NCF-3 and/or NCF, possesses NCF-1 (NCF-2) if and only if set C(A,d,∞) is not closed (is closed) with respect to the global transition function.

In view of our supposition that *null*-configuration $\square\in C(A,d,\infty)$, the result of theorem ***16*** can be formulated in other terms. In a series of cases the result presents the more comfortable criteri-

on of existence of nonconstructibility of types ***NCF-1*** and ***NCF-2*** for the classical ***d-HS*** which not possess ***NCF*** and ***NCF-3*.**

Theorem 17*. *In classical d-HS ($d \geq 1$) without NCF and NCF-3 exist NCF-1 (NCF-2) if and only if for their GTF $\tau^{(n)}$ exist (are absent) configurations $c \in C(A,d,\infty)$ such, that $c\tau^{(n)}=\square$. In classical d-HS ($d \geq 1$) which not possess NCF exists nonconstructibility of type NCF-1 if and only if for their GTF $\tau^{(n)}$ exist configurations $c \in C(A,d,\infty)$ such, that $c\tau^{(n)} = \square$.

The theorem gives the more convenient criterion of the existence of ***NCF-1*** and ***NCF-2*** for the classical ***HS-***models, which not possess ***NCF*** and ***NCF-3*.** The concept of erasability is directly linked with the nonconstructibility problem in the classical ***HS-***models. For purposes of next generalization we have introduced a new more common concept of erasability in ***HS-***models, and on the basis of such generalization a whole series of interesting *dynamic* properties of ***HS-***models was discovered.

Definition 10*. *Two configurations $c_1, c_2 \in C(A)$ ($c_1 \neq c_2$) form for GTF $\tau^{(n)}$ of a classical d-HS a pair of MEC-1 if and only if for these configurations takes place the following correlation, namely: $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,\phi)$.

On the basis of the above concept an *essential* generalization of the well-known ***Moore-Myhill*** criterion of the existence of ***NCF*** for the classical ***HS-***models was been given.

Theorem 18*. *A classical d-HS possesses types of nonconstructibility NCF (possibly, NCF-3) and/or NCF-1 if and only if for the structure there are pairs of MEC-1. If such structure not possess MEC-1 then the structure possesses NCF-1; inverse affirmation is wrong in general case.

The concept of nonconstructibility of type ***NCF-3*** is the consequence of a difference between ***configuration*** nonconstructibility and ***block*** nonconstructibility. The following theorem presents a criterion of the existence of nonconstructibility of type ***NCF-3*.**

Theorem 19*. *A configuration $c=\square c_b \square$ for classical 1-HS is nonconstructible of type NCF-3 if and only if a block configuration c_b for the structure is constructible whereas the block configuration $c^*_b=0^m c_b 0^m$ ($m \geq a^n+n-1$) is NCF.

Particular interest is due to the algorithmic aspect of the nonconstructibility problem, which is presented in item ***2.3*.** The basic results in this direction can be formulated as follows.

Theorem 20*. *With respect to an arbitrary block configuration or finite configuration the problem of determination of its type (constructible, NCF, NCF-1, NCF-2, NCF-3) for arbitrary classical 1-HS is algorithmically solvable.

Theorem 21*. *The problem of existence for a classical 1-HS nonconstructibility of types NCF, NCF-1, NCF-2 and NCF-3 is algorithmically solvable. The problem of existence for a classical 1-HS combinations of nonconstructibility types accordingly to table 1 is algorithmically solvable. The problem of existence for a classical d-HS ($d \geq 2$) nonconstructibility of types NCF is algorithmically unsolvable.

According to theorems *5* and *8* the problem of existence of pairs of ***MEC*** (*and* ***NCF*)** for classical ***1-HS*** is algorithmically solvable**.** The following theorem gives similar result for the general case of the ***MEC-1*.**

Theorem 22*. *The problem of existence of pairs of MEC-1 for classical 1-HS is algorithmically solvable. The problem of existence of pairs of MEC-1 for classical d-HS ($d \geq 2$) is algorithmically unsolvable. Problem of existence of NCF-1 in classical d-HS ($d \geq 1$) without NCF (NCF-3) is algorithmically solvable for $d = 1$ and is unsolvable for $d \geq 2$.

The properties of parallel maps defined by ***GTF*** of the classical ***HS-***models play fundamental part in the study of theoretical properties of ***HS-***models. Many scientists have worked in this

direction and their results are well known. Our basic results in this direction can be presented as follows.

Theorem 23. Problems of determination of the mutual 1-1-correspondence of parallel global maps $\tau^{(n)} : C(A,\phi) \to C(A,\phi)$, $\tau^{(n)} : C(A,\infty) \to C(A,\infty)$ ***and*** $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ ***for classical 1-HS are algorithmically solvable. Problem of existence for parallel global map*** $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ ***the inverse parallel map*** τ_n^{-1} ***for case of a classical 1-HS is algorithmically solvable.***

In this connexion the ***T. Yaku*** proved the following interesting result: ***the problem of existence of the predecessors for arbitrary configuration*** $c \in C(A,d)$ ***in the classical d-HS*** $(d \geq 2)$ ***is algorithmically unsolvable.*** In the ***1-***dimensional case we have the opposite result which is based on the following theorem.

Theorem 24. Problem of determination of predecessors c* and their types for an arbitrary configuration $c \in C(A,\phi)$ ***in the classical 1-HS is algorithmically solvable.***

In particular, on the basis of the above ***1-HS*** with number ***102*** the following result can be proved: ***absence for classical HS-models of nonconstructibility of NCF-type is necessary, but not sufficiently for guarantee of reversibility of their dynamics relative to finite configurations.***

Results presented in the chapter **2** solve the nonconstructibility problem in the classical ***d-HS*** as a whole. The more special results in this direction are numerous and allow us to investigate the nonconstructibility problem in detail. Along with that, the results in this direction allow to form rather effective methods for investigation of ***HS-***models dynamics. A whole series of the similar results are discussed below; many interesting results in this direction can be found in our monographs and papers presented in references to the present monograph.

The special questions linked with the nonconstructibility problem are considered in item **2.4.** Closely connected to the ***Yamada-Amoroso completeness problem*** is the problem of existence of universal configurations ***(UCF)*** for the classical ***d-HS*** which was formulated by ***S. Ulam*** for the case of *regular lattice*. It can be formulated as follows: ***whether exists a finite configuration (a finite set of configurations) for a given monogenic d-HS from which the set*** $C(A,d,\phi)$ ***can be produced by means of GTF of a HS?***

Definition 11. The set of configurations $c_k \in C(A,\phi)$ ***forms for GTF*** $\tau^{(n)}$ ***of a classical d-HS the set of universal configurations (UCF), if*** $\cup_k \langle c_k \rangle [\tau^{(n)}] = C(A,\phi)$ $(k=1 .. p)$.

In some sources the question relative to so-called «*minimal*» ***HS-***models which ***S. Wolfram*** defines as follows: ***Starting with a finite configuration, a minimal CA is one in which subsequent generations contain all finite configurations*** was being enough actively discussed; i.e. in our terminology for such ***HS-***models the following relation should be carried out, namely:

$$(\exists c_o \in C(A,d,\phi)) \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \left\{ c_j \tau^{(k)j} \right\} = C(A,d,\phi) \right) \qquad (\lambda)$$

First of all, in our opinion, the term «***minimal***» insufficiently correctly reflects essence of the question as it concerns, first of all, complexity of the ***HS-***models which as the rule, is defined by dimensionality, the neighbourhood index *(size of the neighbourhood pattern)* and cardinality of alphabet of internal states of an individual automaton of structure $d\text{-}HS = \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X \rangle$, i.e. by value $SL = dxnx\#(A)$, where $\#(A)$ – cardinality of the ***A-***set. Many considerations about a possibility of existence of such structures have been adduced; in reality, concrete examples of such type of ***HS-***models were based only on empirical considerations. Our results [54] prove impossibility of existence of classical ***HS-***models satisfying the relation **(λ)**. Using the above results on the nonconstructibility problem, we have shown that the given problem has negative solution for any classical ***d-HS.***

Theorem 25. For any classical d-HS $(d \geq 1)$ ***there is not a finite set of universal configurations.***

Theorem **25,** to some degree, has something in common with the concept of complexity of the finite configurations in the classical ***d-HS,*** introduced below. Furthermore, under certain conditions the following stronger result takes place. The result allows to clarify certain precise properties of the nonconstructibility problem in the ***HS-***models.

Theorem 26. If for a classical d-HS (d≥1) without NCF exists a set G of NCF-1 then not exist a finite set of configurations $c_j \in C(A,\phi)$ ***such, that***

$$\boxed{\bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n)} \right] = C(A,\phi) \setminus G \qquad (j = 1..p)}$$

On the basis of an algebraical approach and the results in the nonconstructibility problem we proved the more strong result, which essentially generalizes the above theorem.

Theorem 27. Let $\tau^{(n)}$ ***will be an arbitrary GTF of classical d-HS with alphabet A (a – prime), which possesses a set GSA of NCF and, possibly, NCF-3 and/or NCF-1. Then, there is not the d-dimensional finite sets of configurations*** $c_j \in C(A,d,\phi)$ ***and GTF*** $\tau^{(n_j)}$ ***in alphabet*** $A=\{0,1,2, ..., a-1\}$ ***such, that the following two correlations take place, namely:***

$$\boxed{1)\ \bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n_j)} \right] = C(A,\phi) \setminus GSA \quad or \quad 2)\ \bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n_j)} \right] = GSA \qquad (d \geq 1;\ j = 1..p)}$$

On condition that A-alphabet (a – composite number) is used, takes place the above formulation of the result with the second correlation, only; analogous result takes place for case of A (a – prime) and nonconstructibility of type NCF-2, i.e. GTF $\tau^{(n)}$ ***possesses a set GSA of NCF-2.***

Structures with refracterity ***d-HSR(r,P)*** represent the undoubted interest from many points of points. The general object in such ***HS-***models is investigation of the dynamical distribution of individual automata in the excited states «***1***» in conformity with an initial configuration c_o, a neighbourhood index ***X*** and depth ***r*** of refracterity**.** We have studied the most general properties of ***d-HSR(r, P)*** by means of theoretical approaches and computer modelling.

Formal grammar theory ***(FGT)*** is a part of the automata theory**.** Therefore**,** the study of ***HS*** dynamics from the point of view of the ***FGT*** is undoubtedly deserve attention, and a series of our works are devoted to these problems. The parallel $L(\tau_n)$***-***languages introduced by us in ***1974*** can be defined as a set of all finite configurations generated by ***GTF*** of the classical ***1-HS*** from certain initial configuration ***(****axiom****)*****.*** In this case the ***HS-***models can be considered as the *formal parallel grammars* **(**τ_n***-grammars),*** which do not use nonterminal symbols, whereas processing in which is being done by absolutely parallel manner**.** Questions of parallel grammars of such type are considered in the ***fifth*** chapter of the present monograph.

Thus, τ_n***-***grammars are similar to the well-known ***Lindenmayer*** systems and can be used for linguistic description of many parallel discrete systems and processes. We have investigated τ_n***-grammars*** in conformity with traditions of the ***FGT*** with respect to a series of important characteristics of such class of parallel grammars. The results in this direction are presented in our monograph [5], which contains the systematic exposition of the τ_n***-***grammars theory.

Furthermore, many results in the τ_n***-***grammars were applied to the case of nondeterministic T_n***-***grammars**.** Thus**,** we proved that the families of languages $L(\tau_n)$ and $L(T_n)$ reveal an extraordinary resistance to traditional *closure* operations**.** It is shown that τ_n***-***grammars are equivalent to parallel programmed array grammars, and that there is a constructive *unilateral* bridge from parallel array grammars to τ_n***-***grammars.

A series of received results on grammars τ_n and T_n had shown that the traditional approach to implementation of programming languages for homogeneous computer systems will not

allow to create actually effective parallel software which might use maximal degree of paralleling admitted by such structures of the finite automata. In our opinion, grammars τ_n and T_n are powerful means of mathematical semantics both for microprogramming languages of parallel microprogrammed computational structures and for description of many kinds of cellular systems of the different purposes.

Extremal constructive opportunities of the classical ***HS-***models are considered in the third chapter of the present monograph. In contrast to *nonconstructibility*, the study of general properties which reflect maximal constructive possibilities of the classical ***HS-***models, represent great interest and a series of the results in this direction are presented in item **2.4.** One of them can be the so-called ***universal reproducibility***, i.e. each finite configuration in a classical ***d-HS*** is self-reproducing in the Moore sense. The ***Moore*** definition captures the essence of ***reproducibility*** and allows us to concentrate only on it.

Definition 12*. We will say, that a configuration $c \in C(A,\phi,d)$ contains m copies (with an accuracy to rotation and shift of homogeneous space Z^d) of the block c_b-configuration if there are m disjoint subsets of the Z^d, and each of these subsets contains at least one copy of the block configuration c_b. The finite configuration $c_o \in C(A,\phi,d)$ is self-reproducing in the Moore sense for a classical d-HS, if for any in advance given integer m>0 there is integer t>0 such that configuration $c\tau^{(n)t}$ contains at least m copies of the initial configuration c_o.*

A series of scientists investigated this question and with the help of their efforts a class of linear classical ***d-HS*** was discovered. The local transition function of such structures can be characterized by the following algebraical function, namely:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k * x_k \pmod a$$
$$x_n, b_k \in A = \{0, 1, \dots, a-1\};\ k = 1..n$$

This class of linear classical ***d-HS*** possesses the universal reproducibility of finite configurations in the Moore sense. The following theorem summarizes results of such scientists as ***Amoroso, Waksman, Winograd, Ostrand, Cooper, Fredkin, Smith,*** and others [54-56,88,90,536].

Theorem 28*. In a linear d-dimensional classical HS-model with arbitrary alphabet A={0,1,2, ..., a-1} any finite configuration C is being self-reproduced in the Moore sense.*

Using the result of theorem ***150*** [5], we essentially have generalized the above result, namely: *any classical d-HS ($d \geq 1$) with the local transition function of the following type*

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k * x_k \right)^{a^m} \pmod a$$

where $a = p^k$ (p – prime number; m, k – positive integers; $b_j, x_j \in A$; j=1 .. n)

has all finite configurations as self-reproducing in the Moore sense; in addition, d-HS admits both connected neighborhood template, and disconnected at least with two elementary automata in each dimension. Specifically, ***LTF*** for such ***generalized*** linear ***1-HS*** with alphabet ***A=*** {***0,1, ...,a-1***} and neighborhood index ***X=***{$j_1, j_2, \dots, j_p$} ***($0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n-1$)*** has the following kind, namely [54-56,88,90,536]:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=j_1}^{j=j_p} j \pmod a; \quad (0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n-1; \quad 2 \leq p \leq n)$$

As a result of both analytical research, and computer simulation of structures from the class of ***generalized*** linear ***1-HS*** we have obtained a whole series of rather interesting results relati-

ve to self-reproducing finite configurations in Moore sense [54-56]. It is necessary to note that ***d-HS*** of such type is only one out of several known ones at the present time**.** In this connexion it is very interesting to receive a ***criterion*** of the existence of self-reproducing finite configurations in classical ***d-HS. Are there other classes of such classical HS-models, and how they can be characterized?*** With this purpose, a series of attempts has been undertaken to characterize such type of classical ***d-HS.*** In this direction the following partial result can be presented.

Theorem 29. Set P of all linear classical d-HS with the alphabet A = {0,1, ..., a-1} and GTF $\tau^{(n)}$ $(n \geq d+1)$ together with set of all structures whose LTF are formed by a composition of global functions of structures from P, form a semigroup concerning property of universal self-reproducibility of finite configurations in the Moore's sense.

A number of special results in this directions can be found in our books [1,3,5,9]. The class of the classical ***HS-***models with universal reproducibility is attractive in many respects. The results in this direction allow to discover a series of useful correlations between the *nonconstructibility* and the universal *reproducibility* in the classical ***HS-***models, and to solve a number of mathematical problems as shown, for example, in item ***2.4.***

Theorem 30. The existence of nonconstructibility of type NCF-1 without NCF and NCF-3 for a classical HS-model is necessary condition (but not sufficient), in order that the model possesses the universal reproducibility in the Moore sense.

From the point of view of the above results the following *extremely* interesting problem can be solved**,** namely: ***can a classical d-HS double any finite configuration?*** This problem has negative solution.

Theorem 31. There are not classical d-HS which can double any finite configuration.

On the basis of theoretical and computer analysis of the classical ***1-HS*** with symmetrical ***LTF (GTF)*** we can formulate the following extremely interesting hypothesis, namely**:** ***Each classical 1-HS with the symmetrical GTF $\tau^{(n)}$ $(n \geq 3)$, which has NCF-1 without NCF (NCF-3), possesses the possibility of universal or essential nonconstructibility of finite configurations.***

A new class of the classical ***HS-***models possessed by a considerable extent the reprductability of the finite configurations, can be defined on the basis of a special algebraical system [5] ***AS=*** $\langle A_a; +; \# \rangle$**,** where alphabet A_a**=**{***0,1, ..., a-1***} ***(a –*** *composite number)***, (+) –** operation of addition ***(mod a)*** and ***(#) –*** operation of multiplication, which is defined by table ***2*** presented below.

multiplication-table 2

#	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	a-6	a-5	a-4	a-3	a-2	a-1
0	0	0	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	a-4	a-3	a-2	a-1	0	a-1
2	0	2	3	4	5	6	.	.	.	.	.	a-3	a-2	a-1	0	a-1	1
3	0	3	4	5	6	7	.	.	.	.	.	a-2	a-1	0	a-1	1	2
4	0	4	5	5	7	8	.	.	.	.	.	a-1	0	a-1	1	2	3
5	0	5	6	7	8	9	.	.	.	.	.	0	a-1	1	2	3	4
6	0	6	7	8	9	10	.	.	.	.	.	a-1	1	2	3	4	5
.....	...	....	.....	.....	...	...	.	.	.	.	.	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	...	....	.....	.....	...	...	.	.	.	.	.	.....	.....	.....	.....	.....	.....
a-3	0	a-3	a-2	a-1	1	2	.	.	.	.	.	a-9	a-8	a-7	a-6	a-5	a-4
a-2	0	a-2	a-1	1	2	3	.	.	.	.	.	a-8	a-7	a-6	a-5	a-4	a-3
a-1	0	a-1	1	2	3	4	.	.	.	.	.	a-7	a-6	a-5	a-4	a-3	a-2

On the basis of this algebraic system ***(AS)*** a series of interesting enough results on dynamics of the classical ***HS-***models with arbitrary alphabet ***A=*****{*****0,1,2,3, ..., a-1*****}*** ***(a –*** *arbitrary integer)* had been obtained**.** In particular**,** on the basis of the above ***AS*** can be defined an interesting enough

class of classical ***1-HS,*** whose local transition function is defined by the parallel transition rules of the following kind, namely**:**

$$\begin{cases} x_1x_2x_3\cdots x_n \to x_1^1 = 0, \ \textit{if } (\forall k)(x_k = 0) \\ x_1x_2x_3\cdots x_n \to x_1^1 = \prod\limits_{k=1}^{n}{}^{\#}\,\delta(x_k), \ \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$x_k, x_1^1 \in A; \quad k = 1..n$$

$$\delta(x) = \begin{cases} x, \textit{ if } \ x \neq 0 \\ 1, \textit{ otherwise} \end{cases}$$

where **#-**multiplication is defined by table **2.** Let ***S(a,m)*** be the set of all finite configurations of type $c=\square x_1x_2x_3 \ldots x_m\square$ for $x_k \in A\setminus\{0\}$ ***(j=1 .. m),*** and ***Σ(a,m)*** be the set of all finite configurations of length ***m.*** Consequently, the density ***Ξ(a,m) = S(a,m)/Σ(a,m)*** has asymptotic behaviour defined by the following correlations, namely**:**

$$\lim_{m\to\infty} \Xi(a,m) = 0 \qquad \lim_{m\to\infty} \Xi(a,m) = 1$$

$$\lim_{m\to\infty} \Xi(a,m) = \lim_{a\to\infty} \Xi(a,m) = e^{-1/p}, \quad \textit{if } \lim a/m = p = const$$

$$m,a \to \infty$$

In such a manner**,** under certain circumstances the set ***S(a,m)*** of finite configurations, self-reproducing in the Moore sense**,** can serve as a characteristic of the so-called ***considerable self-reproductability*** in the *classical* ***HS-***models [88]. In ***2.4, 3.3*** some interesting discussions about the problems is presented. Similar questions can be found in our books presented in ***References.***

In the ***fourth*** chapter of the book the problem of *complexity* of finite configurations for ***HS-***models is discussed. The ***complexity*** is one of the most intriguing and vague concepts of the modern science**.** We assume that the *intuitive* essence forms the basis for such situation**.** The well-developed theory of computational complexity within computer science and modern approaches to estimation of the complexity of growing self-organizing cellular systems corroborate the above-said**.** At present, we know *three* approaches to the definition of complexity of the finite objects: ***combinatorial, probabilistic*** and ***algorithmical.*** For the last case ***A. Kolmogorov*** has defined the relative complexity of certain finite object ***G*** ***(****comparative to an object* ***S)*** by the minimum length of Turing machine program of deriving ***G*** from ***S.*** Our approach can also be called ***algorithmical*** but it essentially differs from the ***A. Kolmogorov*** approach. The essence of our concept of complexity consists in estimation of complexity of generating arbitrary finite configuration from some *primitive* configuration by means of the finite number of global transition functions of some finite basic set T_f**.**

Our concept of complexity is based on two fundamental results**.** The first result ascends to ***Kimura*** and ***Maruoka (1974).*** This result characterizes the constructive possibilities of the ***polygenic HS-***models and can be formulated as follows.

Theorem 32*. Any non-zero d-dimensional configuration* $c \in C(A,d,\phi)$ *can be generated from primitive configuration* $c_p \in C(A,d,\phi)$ *by means of certain finite sequence of global transition functions of a polygenic d-HS* $(d \geq 1)$**.**

On the other hand, we have received the second fundamental result at ***1985*** [5,55]. This result characterizes the dynamic properties of the classical ***monogenic HS-***models and can be formulated as follows.

Theorem 33*. For any finite A-alphabet there are not the finite sets of d-dimensional configurations* $c_k \in C(A,d,\phi)$ *and GTF* $\tau_k^{(n_k)}$ *which are defined in the same A-alphabet for which takes place the following correlation, namely:*

$$\bigcup_k < c_k > \left[\tau_k^{(n_k)} \right] = C(A,d,\phi) \qquad (k = 1..p)$$

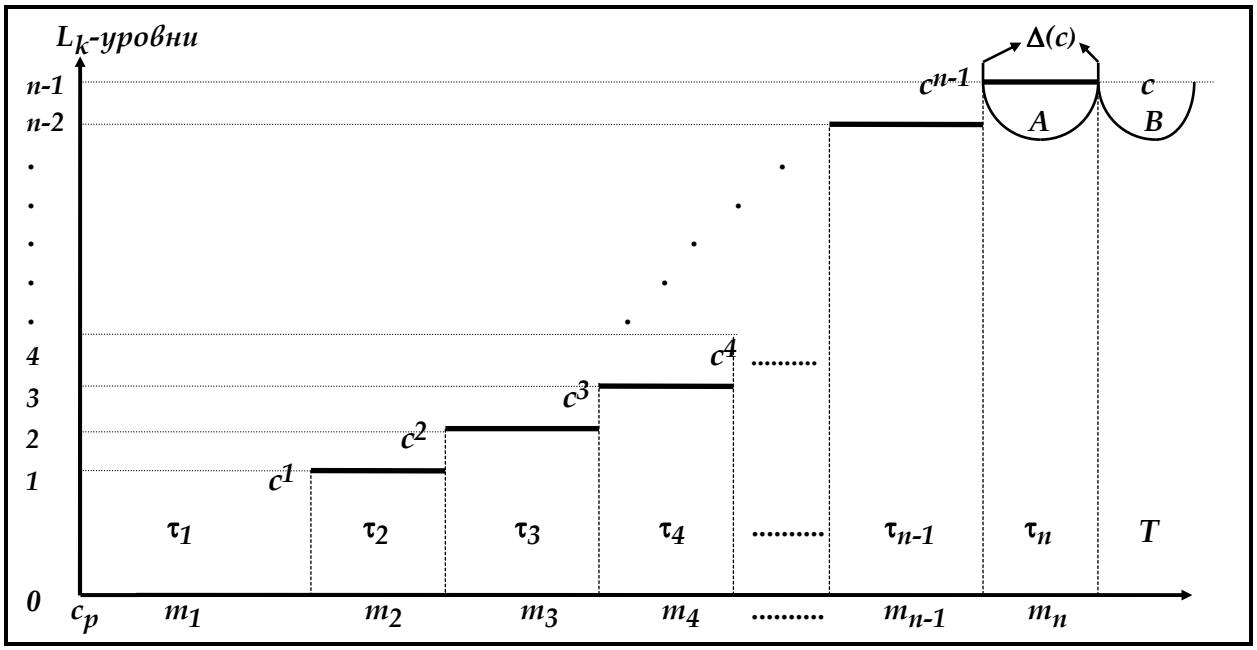
Let G_f be the finite set of ***d*-**dimensional ***GTF*,** defined in ***A*-**alphabet, on the basis of which we can generate any finite configuration **c** from a certain primitive configuration $c_p \in C(A,d,\phi)$ for the finite number of steps of polygenic ***d-HS*,** i.e. the following derivative rules exist, namely**:**

$$c = c_p \tau_1^{m1} \tau_2^{m2} \tau_3^{m3} ..... \tau_n^{mn} \qquad (\tau_k \in G_f ; \tau_j \neq \tau_{j+1}; k = 1..n; j = 1..n-1) \qquad (1)$$

where m_k denotes m_k***-tuple*** application of ***GTF*** $\tau_k \in G_f$ ***(k=1 .. n).*** In this case, it is said, a configuration $c \in C(A,d,\phi)$ is generated from *primitive* configuration $c_p \in C(A,d,\phi)$ at least for $p = \Sigma_k m_k$ steps of ***GTF*** $\tau_k \in G_f$ ***(k=1 .. n).*** We shall say that two global transition functions $\tau_i, \tau_j \in G_f$ are ***different*** $(\tau_i \neq \tau_j)$ if and only if $(\exists c \in C(A,d))(c\tau_i \neq c\tau_j)$**.** If in derivative sequence (**1**) there are ***(n-1)*** pairs $<\tau_i,\tau_j>$ ***(j=1 .. n-1)*** of the different ***GTF*,** then we shall say that in generation of a configuration **c** from primitive configuration c_p there are ***(n-1)*** levels L_k, which are defined by the following function, namely**:**

$$L_k = \begin{cases} 1, \text{ if } \quad \tau_k \neq \tau_{k+1} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases} \qquad (k = 1..n-1)$$

The following picture splendidly illustrates the process of generation of a configuration ***c*** from the primitive configuration c_p***:***



This picture can serve as a good illustration for many considerations linked with our concept of ***complexity.*** Then, the ***complexity*** of an arbitrary configuration $c \in C(A,d,\phi)$ can be defined as follows.

<u>Definition 13</u>. The complexity (SL) of an arbitrary configuration $c \in C(A,d,\phi)$ ***of HS-model*** $(d \geq 1)$ ***is being calculated according to the following formula, namely:***

$$SL(c) = \min_{\tau_k \in G_k} \prod_{k=1}^{n-1} P_k^{m_k} \qquad (2)$$

where P_k ***is the k-th prime number and*** m_k ***are defined from the sequence*** (**2**)**.**

On the basis of the definition a number of important properties of the finite configurations in the classical and polygenic ***HS***-models were received. These properties are characterized with respect to the introduced concept (**2**) of complexity [3,5,9]. The following theorem presents a series of the results in this direction.

Theorem 34. For any integer $d \geq 1$ the set of all d-dimensional finite configurations contains configurations of any earlier given complexity with respect to arbitrary finite basic set G_f of d-dimensional GTF, defined in certain finite A-alphabet of the classical HS-model.

A series of more special results in this direction and the interesting consequences can be found in our works presented in References. On the basis of theorem ***34*** and a series of other our results in this direction the result which plays an extremely important part both for investigation of the dynamic properties of classical ***HS***-models and for further development of the ***complexity*** concept of the finite configurations, can be expressed by the following theorem.

Theorem 35. For any dimensionality $d \geq 1$ there is GTF $\tau \notin G_f$, which generates finite configurations of any earlier given complexity in the sense of definition 13 from a certain configuration $c \in C(A,d,\phi)$ of the limited complexity.

This result generates a series of interesting questions, one of which is question about number of configurations of the same ***complexity*** with respect to the given ***basic*** set G_f. The following important result allows to make clear this question.

Theorem 36. There is infinite quantity of the basic sets G_f of d-dimensional GTF, which are defined in A-alphabet, relative to each of which the infinite sets of finite configurations of the same complexity exist.

In connexion with the above defined concept of complexity an interesting question about the ***minimal*** basic set G_f of the global transition functions arises. In the general case this question is open, however in case of class of the binary ***GTF*** a series of interesting results in this direction have been received.

Theorem 37. There is a minimal basic set G_f, which contains four 1-dimensional binary GTF, only; at least one GTF of this set possesses the nonconstructibility of type NCF-1. With respect to the minimal basic set G_f of 1-dimensional binary GTF there are infinite sets of the finite configurations of the same complexity in the sense of definition 13.

Theorem 38. The minimal basic set G_f contains four 1-dimensional binary GTF, whose corresponding local transition functions are defined by the parallel substitutions (3.a .. d); global transition functions of such set G_f possess the types of nonconstructibility according to the table 3. The minimal basic set G_f for 1-dimensional non-binary case consists of GTF, which possess NCF and/or NCF-1, NCF-2 and, possibly, NCF-3.

$$
\begin{array}{lcccc}
000 & \Rightarrow & 0 & 0 & 0 \\
001 & \Rightarrow & 1 & 1 & 1 \\
010 & \Rightarrow & 0 & 1 & 0 \\
011 & \Rightarrow & 1 & 0 & 0 \\
100 & \Rightarrow & 0 & 1 & 1 \\
101 & \Rightarrow & 1 & 0 & 1 \\
110 & \Rightarrow & 1 & 1 & 0 \\
111 & \Rightarrow & 0 & 0 & 0 \\
 & & (a) & (b) & (c)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcc}
00 & \Rightarrow & 0 \\
01 & \Rightarrow & 1 \\
10 & \Rightarrow & 1 \\
11 & \Rightarrow & 1 \\
 & & (d)
\end{array}
\qquad (3)
$$

Table 3

LTF\NCF	*NCF*	*NCF-1*	*NCF-2*	*NCF-3*
(21.a)	*no*	*yes*	*no*	*no*
(21.b)	*no*	*yes*	*no*	*no*
(21.c)	*yes*	*yes*	*no*	*no*
(21.d)	*yes*	*no*	*yes*	*yes*

The result of the above theorem characterizes the constructive possibilities of ***1-dimensional binary GTF,*** which compose the ***minimal basic*** set G_f**.** Furthermore, the result has allowed to solve a series of problems from our monographs [3,5] and can be used for investigation of the ***complexity*** problem in ***1-***dimensional case with an arbitrary ***A-***alphabet. On the basis of the theorem the more simple substantiation for the introduced concept of complexity in ***1-***dimensional binary case can be presented**.** The result of such substantiation can be easily formulated in the form of the following theorem.

Theorem 39. Any 1-dimensional binary configuration $c \in C(B,\phi)$ ***is monotonously generated from the primitive configuration*** c_p=□1□ ***by means of a GTF of some fixed finite set GSV. At the same time, there is not a finite system of pairs*** $\{c_k, \tau_{jk}^{(n_k)}\}$ ***such that the following correlation takes place, namely:***

$$\bigcup_k < c_k > \left[\tau_{k_j}^{(n_k)} \right] = C(B,\phi); \qquad c_k \in C(B,\phi);\ n_k \in \{2,3\};\ j_k \in \{0,1,2,3\} \qquad (k = 1..p)$$

The set GSV of the binary global transition functions (GTF) can be chosen as a set G_f***, relative to which the concept of complexity of 1-dimensional binary finite configurations is defined.***

The above theorem ***39*** allows the generalization upon the case of an arbitrary ***A-***alphabet and more general types of the finite systems of pairs $\{c_k, \tau_{jk}^{(n_k)}\}$**.**

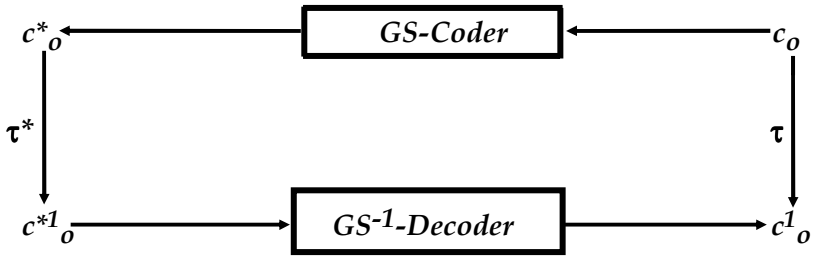
On the basis of the introduced concept of ***complexity A(X)*** of the finite configurations we have presented solutions of a series of problems in the ***HS*** theory**.** A relation between ***A(X)*** and other known measures of ***complexity*** is presented. Of our results in this direction, in particular, follows that the classical ***HS-***models are not the *finite axiomatized* formal systems, i.e. it is impossible to define a finite set of finite configurations ***(****axioms****)*** from which the set ***C(A,d,*** ϕ***)*** of all finite configurations in the classical ***HS-***model can be generated. In the set ***C(A,d,*** ϕ***)*** the ***infinite hierarchy*** of ***complexity*** can be established. A number of presented results on the complexity problem of the finite configurations in the classical ***HS-***models allow to identify the certain profound distinctions between *parallel* and *sequential* formal information processing models.

In the ***sixth*** chapter the problem of ***modelling*** which plays a very important part in the theory of ***HS*** itself and in its numerous applications is discussed**.** General aspects of the problems are linked with modelling of one ***HS*** by another: real-time modelling, modelling with suppression of certain properties of the modelled ***HS,*** simplification of characteristics of the modelled ***HS,*** and optimal modelling**.** We have made an attempt to obtain the optimal modelling technique. In connexion with that, the concept of ***T-***modelling was introduced which turned out is very suitable also for many applications of the ***HS*** theory. On the basis of the introduced concept we carried out a detailed study of the multifold problem of modelling for the classical ***d-HS.*** In the chapter a number of algorithms and principles of self-recovering in real ***HS-***models is presented, which can be useful for a practical constructing in the homogeneous computation structures on the basis of ***HS-***models. Along with applied aspects on the basis of ***T-***modelling a sufficiently wide class of theoretical problems was investigated such as: universal computability and parallel algorithms, classes of paralleling**,** reversibility of modelling and so on. These theoretical results have allowed to make clear a number of *underlying* properties of ***HS-***mo-

dels as both a formal model of parallel computations and as a new environment for modeling of various kinds of parallel discrete processes, algorithms and phenomena.

A number of scientists has dealt with the problem of modelling of one classical ***d-HS*** by another, from which works of ***H. Yamada, S. Amoroso, E. Codd, H. Nishio, A.R. Smith, T. Toffoli, N. Margolus, E. Banks, J. Batler, B. Chopard, A.S. Podkolzin, A. Ilachinsk, A. Adamatzky, V. B. Kudrjvcev, M. Sipper, V.Z. Aladjev*** along with some others can be recommended. Enough detailed discussion of the underlying results on the problems can be found in books [1,4,5]. In the item ***6.1*** of the ***sixth*** chapter our concepts of modelling in the classical ***d-HS*** are introduced and certain related results are presented.

In the end, we introduce the concept of ***1-modelling*** of one ***d-HS*** by another ***d-HS,*** whose definition can be illustrated by the following diagram. The diagram enough lucidly illustrates the principle of modelling of an arbitrary classical ***d-HS*** by other one of the same type.



In the modelled ***d-HS*** any configuration $c_o \in C(a,d,\phi)$ defined in the ***A***-alphabet is transferred into next configuration $c_o\tau=c^*_o$ by means of ***GTF*** τ**.** Let $GS(\alpha)$ be a certain *recursive* method of encoding of symbols $\alpha \in A$**,** and $GS^{-1}(\beta)$ be a recursive decoding method of a set of β-symbols from ***A******-alphabet**;** let $GS[x]$ and $GS^{-1}[y]$ be the *recursive coding* and *decoding* of configurations x and y**,** respectively**.** Then for the second ***d-HS*** any configuration $c^*_o=GS[c_o]$ is transferred by ***GTF*** τ^* into the next configuration $c^{*1}{}_o$ for which $GS^{-1}[c^{*1}{}_o]=c^*_o$**.** They say, that one classical ***d-HS 1-models*** another ***d-HS*** if their *dynamics* satisfies the above-mentioned *requirements***.** Let T_x be the length of edge of ***d***-dimensional cube which contains template of the modelled classical $HS=<Z^d, A, X, \tau>$**.** On the basis of the above suggestions we can formulate the following interesting enough result.

<u>Theorem 40</u>. For an arbitrary classical d-HS=<Z^d, A, $\tau^{(n)}$, X> there is a certain structure <Z^d, A*,$\tau^{(m)}$,X*>, which 1-models the first structure; T_x,T_{x^*} – templates and A, A* – alphabets of both structures are linked by the following correlations, namely:

$$\begin{cases} T_{X^*} \le (T_X+1)*([\log_2 a]+1)-1; \quad for \quad A^*=\{0,1,2\} \\ T_{X^*} \le (T_X+1)*(L+5)-1; \quad for \quad A^*=\{0,1\} \end{cases}$$

$$where \quad L=\left[\frac{\log_2 a-1}{\log_2 7-1}\right]+2$$

To our knowledge, this result is the best of its kind. In works [3,5] we have considered certain most special cases of modelling of one classical ***d-HS*** by another**.** Now we shall consider algorithmical properties of the classical ***d-HS*.** It is well known that the classical ***d-HS*** are ***parallel algorithms*** for processing of ***d***-dimensional words defined in a finite ***A***-alphabet. Because the study of ***d-HS*** in this regard is of great significance for treating of the ***behavioural*** properties of such structures and their numerous applications**,** we begin with a discussion of the concept «***one algorithm T-models (slightly T-models) another algorithm***»**.**

Let M_1 be an algorithm whose alphabet is ***A***, and M_2 be an algorithm whose alphabet is A^* ($A \subseteq A^*$)**.** Let $M^k{}_1s=s^k$ ($M^o{}_1s=s$) be the result of the ***k***-fold rewriting of words defined in the ***A***-al-

phabet by means of M_1-algorithm. Then for an arbitrary word s defined in the A-alphabet the M_1-algorithm generates the following sequence of the finite words, namely:

$$M^0{}_1s, M^1{}_1s, M^2{}_1s, M^3{}_1s, ..., M^k{}_1s, ... \quad (4)$$

Let s^* be an arbitrary finite word defined in the alphabet A^* (*which in* A*-alphabet equals to word* s) and M_2-algorithm generates a sequence of the words from the initial word $s^*$of the type:

$$M^0{}_2s^*, M^1{}_2s^*, M^2{}_2s^*, M^3{}_2s^*, ..., M^k{}_2s^*, ... \quad (5)$$

***Definition 14**. We say, that algorithm M_2 T-models algorithm M_1, if there is a certain recursive procedure GS, which allows to evolve for any word s defined in the A-alphabet from the word sequence (5) the subsequence of the following type:*

$$M^o{}_os^*, M^j{}_{1_2}s^*, M^j{}_{2_2}s^*, M^j{}_{3_2}s^*,..., M^j{}_{k_2}s^*, ...$$

such that in the A-alphabet the correlation $(\forall k\in N)(M^j{}_{k_2}s^* \equiv M^k{}_1s)$ takes place and $j_k=T+k$. If value j_k depends on the length of the rewritten words s in the modelled algorithm M_2, then we say that algorithm M_2 slightly T-models the initial algorithm M_1 $\{j_k=F(|S|)\}$.

In item **6.2** of the chapter **6** we present some of our results on the ***T-modelling*** by the classical ***1-HS*** of the well-known ***successive*** algorithms for the rewriting of finite words in the finite alphabets. Let a Turing machine $(MT^s{}_q)$ has s symbols on the tape and q internal states.

***Theorem 41**. For an arbitrary $MT^s{}_q$ there is classical 1-HS with A-alphabet of cardinality $a=s+q+9$ and the Moore neighborhood index $X=\{-1,0,1\}$ which 8-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ there is classical 1-HS with A-alphabet of cardinality $a=s+q$ and neighboorhood index $X=\{-2,-1,0,1,2\}$ which 1-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ there is classical 1-HS with A-alphabet of cardinality $a = q(s+1)+1$ and the Moore neighborhood index $X = \{-1,0,1\}$ which 1-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ there is classical 1-HS with A-alphabet of cardinality $a=s(s+1)(q+1)+1$ and the simplest neighborhood index $X = \{1,0\}$ which 2-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ with 2D tape there is classical 2-HS with A-alphabet of cardinality $a = q(s+1)+1$ and Neumann neighborhood index X which 1-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ with k tapes there is a classical 1-HS with A-alphabet of cardinality $a = s^k(q+1)^k$ and Neumann-Moore neighborhood index X which 1-models it.*

As consequences of the above theorem, we have a series of interesting enough results on the ***algorithmic unsolvability*** of certain problems concerning ***dynamics*** of the finite configurations in the classical ***d-HS***.

***Definition 15**. A finite configuration $c_o\in C(A,\phi)$ for global transition function $\tau^{(n)}$ of a classical d-HS is said to be accordingly:*

limited, if $(\exists p)(\forall k)(c_k\in<c_o>[\tau^{(n)}] \rightarrow D(c_k)\le p)$, where D – minimal diameter of block of homogeneous space of the structure, which contains configuration c_k;

(k-m)-periodical, if $(\exists m)(\exists k)(c_o\tau^{(n)m}=c_o\tau^{(n)k})$ $(m>0; k-m>1)$; periodical, if $(\exists k>1)(c_o\tau^{(n)k}=c_o)$, and passive for k=1;

vanishing, if $(\exists m)(c_o\tau^{(n)m}=\square)$, where $\square$ – null configuration of the structure.

On the basis of the above definition we can formulate the following important result.

***Theorem 42**. In general, the following problems concerning the dynamics of the finite and infinite configurations in classical d-HS $(d\ge 2)$ are algorithmically unsolvable, namely:*

– *the problem of recursiveness of the set of configurations* $<c_0>[\tau^{(n)}]$;

– *the problem of limitation of an arbitrary configuration* $c_0 \in C(A,d,\phi)$;

– *the problem of (k-m)-periodicity or periodicity of an arbitrary configuration* c_0;

– *the problem of the existence of passive and/or vanishing configurations for an arbitrary set* $<c_0>[\tau^{(n)}]$;

– *for an arbitrary classical d-HS* ($d \geq 2$) *with alphabet* $A=\{0,1,2,...,a-1\}$ *and GTF* $\tau^{(n)}$ *the problem of existence of configurations C such, that* $C\tau^{(n)} = C^{\infty}_{r}$ *(where* C^{∞}_{r} *– infinite CF of the structure consisting only from r-states;* $r \in A$*), is algorithmically unsolvable.*

Above, we used a special simulation technique called ***T-modelling (slightly T-modelling)*** for modelling a series of well-known algorithms for a rewriting of finite words defined in the finite alphabets *(algorithms such as* ***TAG-systems and LAG-systems, Markov normal algorithms, Post production systems, SS-machines, Buchi regular systems,*** *and so on)* by means of the classical ***1-HS,*** and vice versa. In particular, on the basis of ***T-modelling*** of ***SS-***machine by means of the classical ***1-HS*** the following important result can be received**:** ***There is a classical 1-HS with the Moore neighbourhood index, which has the creative set of all vanishing finite configurations.*** At last, a series of interesting results linked with ***T-modelling*** of ***Turing*** machines with ***k-***heads and of heterogeneous periodically defined transformations by means of the classical ***1-HS*** are discussed.

In item ***6.3*** of chapter ***6*** a number of general results linked with the ***T-modelling*** of the classical ***d-HS*** by means of ***HS*** of the same class are presented**.** A series of scientists have dealt with the problem, but it is necessary to note that neither the ***neighbourhood*** nor the ***state-set reduction*** techniques were necessarily optimal**,** and here we have made an attempt to obtain the ***optimal*** technique along these lines. On the basis of our approaches we can formulate a number of the following interesting enough results.

Theorem 43*. An arbitrary classical d-HS* ($d>1$) *is 1-modelled by a binary structure of the same dimensionality with template of the following size, namely:*

$$L = (L_1+1)^{d-1} * (L_d+1) * \prod_{k=1}^{d} (p_k+1); \quad L_1 = \left[V = \sqrt[d]{\log_2 (a-1)+2} \right]; \quad L_d = L_1 + [2*(V - L_1)]$$

where $p_1 * p_2 * ... * p_d$ *– size of the minimal d-dimensional parallelepiped, which contains template of the modelled d-HS under conditions that the following correlation* $\log_2 \log_2 4(a-1) \geq d$ *is being executed.*

Theorem 44*. Any classical 1-HS with alphabet* $A=\{0,1,...,a-1\}$ *and template of size n is 1-modelled by a binary classical 1-HS with template of size* $L=(n+1)[\log_2 a + n + \beta]$*, where* $\beta=4$ *for* $a \leq 2^{19}$ *and* $\beta=5$*, otherwise.*

Theorem 45*. An arbitrary classical 1-HS with A-alphabet* ($a \geq 6$) *and template of size n 1-modelled by a binary classical 1-HS with template of size* $L=n*[2\log_2 (a+2) + 1] - 2$*. An arbitrary classical 1-HS with A-alphabet for* $4 \leq a \leq 21$ *and template of size n is 1-modelled by means of a classical 1-HS with alphabet* $A^*=\{0,1,2\}$ *and template of size* $L=6n-1$*. An arbitrary classical 1-HS with A-alphabet* ($5 \leq a \leq 14$) *and template of size n is 1-modelled by a classical 1-HS with alphabet* $A^*=\{0,1,2,3\}$ *and template of size* $L = 5n - 2$**.**

In connexion with definition of ***universal computability*** of the classical ***HS*** by means of ***T-modelling*** of the ***universal*** Turing machine ***(UMT)*** a question about minimum complexity of ***HS*** which can ***T-model*** the ***UMT*** arises**.** For estimation of the complexity of a ***HS,*** the product ***axn*** can be introduced, where ***a*** is cardinality of ***A-***alphabet and ***n*** is size of ***HS*** template. Establishing the ***minimum*** product ***axn*** is the problem which, in our opinion, is as difficult as finding

the ***minimum*** product ***sxq*** for the universal MT^s_q. The smallest result for product ***axn*** is a ***1-***dimensional universal ***HS (1-UHS)*** has given by ***A. Smith,*** who has found the following ***1-UHS: axn = 2x40, 3x18, 6x7, 8x5, 9x4, 12x3,*** and ***14x2.*** Notice the existence of the classical ***1-UHS*** with template of minimal size ***n=2.*** On the basis of the above-mentioned ***Smith's*** results and our result ***(theorem 45)*** for the *minimal* product ***axn*** for the classical ***1-UHS*** the following estimations were established ***axn=2x16,3x11*** and ***4x8.*** The result of theorem ***45*** can be generalized upon the higher dimensionality.

Theorem 46. Any classical d-HS (d ≥ 1) with A-alphabet and template, contained in the minimal d-dimensional parallelepiped $p_1xp_2x \dots xp_d$, is 1-modelled by means of a binary classical d-HS with template of size $L=p_1x\{[2log_2(a+2)+1]-2\}xp_2xp_3x \dots xp_d$. An arbitrary d-HS with template of size $n_1xn_2x \dots xn_d$ and alphabet $A=\{0,1,2, \dots, a-1\}$ is being simulated by d-HS with simplest neighborhood index in $1/(\sum_{j=1}^{d} n_j - d)$-real time; in addition, cardinality of A*-alphabet of the simulating d-HS is defined by the following relations, namely:

$$\#A^* = a + \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{a^{\prod_{k=1}^{j} n_k + \varphi(j)} - a^{2\prod_{k=0}^{j-1} n_k}}{a^{\prod_{k=0}^{j-1} n_k} - 1} \right), \quad where \quad \varphi(j) = \begin{cases} 1, & if\ j < d \\ 0, & otherwise \end{cases}; \quad n_o = 1$$

Any classical d-OC with template in the form of parallelepiped of size $n_1xn_2x \dots xn_d$ and alphabet $A=\{0,1,2, \dots, a-1\}$ is simulated in 1/n–real time by structure of the same dimension with template in the form of hypercube with length of edge 2 and A*-alphabet under the following conditions, namely:

$$n = \max_{k=1..d} \{n_k\} - 1 \qquad \#A^* = \sum_{k=1}^{n} a^{k^d}$$

In addition, in general case for ***d-***dimensional classical ***HS-***model the *simplest* neighbourhood index ***X*** has the following kind, namely**:**

$$X=\{\underbrace{\underbrace{(0,0, \dots\dots\dots, 0)}_{d}, \underbrace{(1,0,0, \dots\dots, 0)}_{d}}_{d+1}, \underbrace{\underbrace{(0,1,0, \dots\dots, 0)}_{d}, \dots\dots\dots, \underbrace{(0,0, \dots\dots, 0,1)}_{d}}_{}\}$$

i.e. one automaton of the elementary template is *central* one having strictly one individual automaton of structure along each axis**.**

Considerable theoretical and applied interest represents a question of modeling of classical ***d-HS*** by structures of the same class but with reducing of dimensionality. In work [532] an interesting approach to realization of modeling classical ***3-HS*** by means of ***2-HS*** is presented. For ***1-***dimensional case, however, the given approach does not work, not allowing to model ***2-HS*** by means of ***1-HS.*** Theorem mentioned below represents other approach providing modeling of an arbitrary classical ***2-HS*** by means of ***1-HS.***

Theorem 47. An arbitrary classical 2-HS is modeled by the appropriate classical 1-HS with Moore neighbourhood index.

Thus, reduction of the presented results allows to formulate the following interesting enough affirmation, namely**:** ***Any classical d-HS (d ≥ 1) is modeled by means of appropriate classical 1-HS with Moore neighbourhood index.***

Intractable problem – a problem for decision of which a multinomial algorithm does not exist. In this sense the modeling of ***2-HS*** by means of ***1-HS*** can be ascribed to the class of *intractable* problems because of time demanded for their decision with growth of size of configurations of modeled dynamics of an initial structure. However, it in the event that will not be discove-

red much faster modeling algorithm what seem to us as uneasy enough problem. In item ***6.4*** of the chapter ***6*** a number of special questions of modelling in the classical ***d-HS*** is presented. Above all, the following result characterizes the possibilities of modelling of an arbitrary ***non-deterministic 1-HS*** by means of the classical ***1-HS*.**

Theorem 48*. *Any non-deterministic structure SH(1,a,n,N) is modelled by the appropriate classical 1-HS with the Moore's neighbourhood index and A*-alphabet of cardinality $N*(a^{n+1}-1)/(a-1)+a+n$.

In our monograph [3] we quite justly noted constructive defects of the classical ***d-HS*** with *symmetrical* local transition functions**.** On the other hand**,** from our results of modelling in the classical ***d-HS*** it may be drawn that ***HS*** with ***symmetrical*** and ***asymmetrical*** local transition functions are equivalent with respect to constructability. In addition, ***d-HS*** models with Margolus neighborhood **(***in our terminology* «***on splitting***»**)** are modelled by classical ***HS*-**models of the same dimensionality, namely**: *Arbitrary structure d-HS on splitting, defined in alphabet A, is modeled in real time by a classical d-HS with alphabet A, where* $A^*=A\cup\{\#\}$ $(\#\notin A)$ [53,54,88]**.**

Theorem 49*. *If any MT^s_q ***fulfills a certain S-algorithm in time T, then there is a classical 1-HS with A-alphabet of cardinality*** $2*(s+2*q+1)$***, the Moore neighbourhood index and symmetrical GTF, which models the same S-algorithm in the time*** $\le 4*T$**.**

On the basis of this result the following interesting theorem can be formulated [5,53,54,88].

Theorem 50*. *For an arbitrary classical 1-HS with the Moore neighbourhood index there is a structure S of the same dimensionality and neighbourhood index, A*-alphabet of cardinality $2*(4*a^2+5*a+12)$ ***and the symmetrical GTF, which models the first one in the time 4*L, where L is length of the processed finite configuration in the modelled structure.***

In connexion with a number of problems the classical ***d-HS*** with ***symmetrical LTF (GTF)*** present definite interest. The ***symmetrical LTF*** is defined by parallel transition rules of the type**:** $x_1x_2\ldots x_n \to x^*_1$ and $(x_1x_2\ldots x_n)^R \to x^*_1$**,** where X^R is symmetrical inversion of ***X*-**string. Using the above theorem**,** we can easily verify that by means of the symmetrical ***GTF*** it is possible to compute any partially recursive function, but from the point of view of constructive possibilityes the *symmetrical* ***HS*-**models are less powerful**,** far and away**,** than *asymmetrical* ones. Thus, if for modelling of a number of processes in the classical ***HS*** **(***especially* ***asymmetrical*** *ones***)** the asymmetrical ***LTF*** are most suitable, then for concrete realizations of ***HS*-**models, for instance, by means of microelectronics or for more peculiar interpretations of ***HS*** the symmetrical ***LTF*** are more suitable. The class of symmetrical ***GTF*** presents special interest with many points of view. The following result can be useful for many interesting considerations.

Theorem 51*. *Any classical 1-HS with symmetrical GTF and neighbourhood index $X=\{0,1\}$ ***possesses the nonconstructibility of types NCF and/or NCF-1*.**

In connexion with problems of ***universality*** and ***modeling*** in the classical ***HS*** the ***reversibility*** problem presents the undoubted interest. You can find sufficiently detailed discussion of this problem in item ***6.4*** and in the monograph [5]**.** A classical ***d-HS*** is ***reversible*** if and only if it not possesses the nonconstructibility of types ***NCF*, *NCF-1*** and ***NCF-3*.** In item ***6.4*** a discussion of such definition of ***reversibility*** for the classical ***d-HS*** is presented**.** The ***reversibility*** problem generates a number of the interesting attendant questions. In the general case, this problem is characterized by the question about possibility to model an arbitrary classical ***HS*** by means of a structure of the same class, but without the given properties of the modelled structure**.** With respect to the nonconstructibility of types ***NCF-1*** and ***NCF-2*** we have the following general result [5].

Theorem 52*. *An arbitrary classical d-HS is T-modeled by a certain d-HS $(d \ge 1)$ ***of the same class, which not possesses NCF-1 and/or NCF-2*.**

For case of the nonconstructibility of ***NCF-***type the question is more difficult. To this effect, we have introduced two concepts of modelling**:** ***WM-*** and **W-*modeling*** in the classical ***d-HS*****,** which embrace a wide enough class of methods of modeling**.** On the basis of investigations of the above concepts of modeling we can formulate the following results, namely.

Theorem 53*. An arbitrary classical d-HS (d ≥ 1) cannot be WM-modeled by a reversible structure of the same class and dimensionality.*

Theorem 54*. An arbitrary classical d-HS (d ≥ 1) cannot be W-modeled by a reversible structure of the same class and dimensionality.*

On the other hand, at the certain assumptions such modelling is possible, what the following result testifies [54,88].

Theorem 55*. Under the condition of use of infinite alphabet of internal states of elementary automaton or a set of infinite configurations, there are d-HS not possessing NCF, which can model an arbitrary structure of the same dimensionality d ≥ 1 in strictly real time.*

The ***reliability*** problem, linked with modeling in the ***HS,*** plays a very important part in practical realizations of computational ***HS-***models. We have presented [5] a number of algorithms and principles of ***self-recovering*** in real ***HS,*** which can be useful enough for practical constructing in the homogeneous computational structures based on the ***HS-***models.

In item ***6.5*** of chapter ***6*** the ***parallel algorithms*** defined by the classical ***d-HS (***abbreviation ***d-PADHS)*** are discussed. The ***d-PADHS*** play considerable part in describing certain biological processes and programming systems based on computational homogeneous structures, as well as for the theory of algorithms, as such. Here we will consider parallel algorithms defined by the classical ***HS-***models with point of view of their certain possibilities.

We present certain results on the complexity of ***1-PADHS:*** complexity in ***Markov-Nagornyi's*** meaning and computational complexity. The ***1-PADHS*** are defined as follows.

By definition**,** ***1-PADHS(a,n)*** operates with strings of symbols **(***configurations of the set* $C(A,\phi)$ *or words***)** which are defined in ***A-***alphabet. The mode of operation is being described by the ***GTF*** $\tau^{(n)}$ of certain classical ***1-HS,*** which are defined by ***LTF*** with parallel transition rule of the following type, namely**:**

$$\underbrace{000\ldots.0}_{n} \rightarrow 0 \qquad x^{j}_{1}x^{j}_{2}x^{j}_{3}\ldots x^{j}_{n} \rightarrow x^{*j}_{1}; \qquad x^{*j}_{1},\ x^{j}_{k}\in A\ (k=1\,..\,n;\ j=1\,..\,a^{n}\text{-}1) \qquad \textbf{(4)}$$

For every word $c\in C(A,\phi)$ the parallel algorithm ***1-PADHS(a,n)*** defines the sequence of words $<c>[\tau^{(n)}]$, in which word c_k is called ***final,*** if takes place the following correlation**:** $c_{k-1} = c_{k-1}$ $\tau^{(n)} = c_k$**.** Let $C(A,\phi)$ be a words set which are processed by the algorithm ***1-PADHS(a,n)*****,** and ***F*** be a partial word function in ***A-***alphabet, if for certain finite word $c_j\in C(A,\phi)$ takes place the correlation $F(c_j)=c^*_j\in C(A,\phi)$**.** Let then ***F*** be a word function whose domains of the existence and value are E_F and V_F**,** respectively**.** We will say that the word function ***F,*** defined in ***A*-***alphabet**,** is ***PADHS-computable,*** if there is a *parallel* algorithm ***1-PADHS(a,n)*** in the alphabet $A=\{b\}\cup A^*$ $(b\notin A^*)$ such, that for any $c^*_o \in C(A^*,\phi)$**,** if c_o is a representation of word c^*_o of the form**:** $c^*_o =$ $\square b^{p+2}0^1b^20^{p+1}c^*_o b^{p+2}\square$**,** then the following two general conditions execute, namely**:**

1) if word c^*_o belongs to the existence domain E_F of ***F-***function, then the sequence $<c_o>[\tau^{(n)}]$ contains a passive configuration **–** the ***final*** word c_f of the following kind**:**

$$c_f = \square b^{p+2}0^1b^10^{p+2}F(c^*_o)b^{p+2}\square, \quad F(c^*_o)\in V_F; \qquad \textbf{(5)}$$

2) if word c^*_o not belong to the *existence* domain E_F of ***F-***function**,** then the sequence $<c_o>[\tau^{(n)}]$ does not contain a passive ***final*** word c_f of the above kind (**5**)**.**

It then can be proved that a word ***F*-function** is ***PADHS-computable*** if and only if it is Turing-computable. The *equivalence* of such precise formalizations of the intuitive notion of a computable function ***F*** is one of the strongest arguments in favour of the ***Church*** thesis**.** The problem of estimation of complexity of parallel algorithm ***1-PADHS*** is extremely important and in this direction we have the following interesting result [5,53-56,88,90].

Theorem 56. Any partial recursive word F-function, defined in a certain finite alphabet A*, is PADHS-computable in the extended alphabet $A = \{b\} \cup A^*$ $(b \notin A^*)$**.**

Consequently, the parallel algorithms ***1-PADHS*** are equivalent to ***Markov*** normal algorithms in ***Markov-Nagornyi*** sense**.** At the same place**,** we have discussed the concept of complexity of the ***1-PADHS*****,** in detail**,** and the concept of parallelism of such class of algorithms**.** We have defined a class of algorithms which were called ***locally realizable algorithms (LRA).*** The essence of ***LRA*** consists in the possibility to present an algorithm by means of *local identical algorithms* with separate subwords of any processed word**.** A typical example of similar algorithms is the ***symbolic sorting.*** In our opinion, ***LRA*** can be realized by means of the parallel ***d-PADHS.*** For such algorithms the *linear time* realization in ***HS*-**models is allowed**.** For instance**,** the problems of ***symbolic sorting*** and ***reverse map of words*** are realized by the ***1-PADHS*** in the *linear* time. At present**,** the question of the advantage of parallel algorithms is often discussed**.** To this question the following theorem refers [5,53,88].

Theorem 57. If a parallel algorithm 1-PADHS(a,n) computes certain partial recursive word F-function in T steps, then suitable Turing machine can compute the same F-function in $T^* \leq \{(n+1)*T^2+(n-1)*T\}/2$ ***steps.***

The paralleling possibility permitted by ***1-PADHS*** can be tracked up on the following example. It is well known that ***two-way pushdown machine (TWPM)*** is equivalent to one-head Turing machine with time of work no more than $X^{k|X|}$**,** where ***k –*** constant and ***X -*** the length of input word ***X*****.** Characterization of the ***TWPM*** in terms of the parallel algorithms gives much better result as regards time [5,53,88].

Theorem 58. If a TWPM admits some set of finite words in T steps, then the corresponding parallel algorithm 1-PADHS can admit the same word set in no more than $2T^2$ ***steps.***

Thus**,** by means of parallel algorithms ***1-PADHS*** for a number of sequential algorithms we can obtain much better results as regards time than by MT^s_q**.** It is necessary to note that the parallelism intrinsic in the ***1-PADHS*** was used only for modeling of one algorithm by another and it did not use the parallelism intrinsic in the essence of the modelled algorithms itself. The so-called ***bc*-**automata present indubitable interest for the theory of structural programming. In connexion with the sequential ***bc*-**model the following interesting result can be presented [53].

Theorem 59. If certain bc-automat demands t steps for processing of some input finite word, then the corresponding parallel algorithm 1-PADHS can carry out the same work in no more than $2(t+1)^2$ ***steps.***

It will be noted, that the estimation appearing in this theorem is overstated, in general. Thus, usage of the effective essence of paralleling of computations allows us to considerably save a time, generally speaking. Such saving of a time we can obtain only by the price of increase of some computational resources of the classical ***HS*-**models.

In the ***seventh*** chapter our results on the ***global decomposition problem (GDP)*** of ***GTF*** in ***HS*-**models are presented. The ***GDP*** in ***HS*-**models immediately adjoins the above problem of the ***complexity A(X).*** Furthermore**,** the problem directly concerns the question of *constructive complexity* of ***HS*-**models, which plays the important part both in concrete realizations of parallel computational systems on the basis of ***HS*-**models and for modeling in ***HS*****.**

The ***GDP*** can be formulated as follows**:** ***can any GTF of the classical d-HS be presented in the form of a composition of finite number of more simple global transition functions?*** It is said, that global transition function $\tau^{(n)}$ in an ***A-***alphabet is more simple than global transition function $\tau^{(m)}$ defined in the same ***A-***alphabet if ***n<m.*** The above problem is called the ***decomposition problem;*** it is of great enough importance both in theory of homogeneous structures itself, and in its numerous applications. Above all, the problem touches the *complexity* of ***GTF*** of the classical ***d-HS.*** The more formal definition of the ***GDP*** can be presented as follows.

Definition 16. The global decomposition problem of GTF (d-GDP) is formulated as follows: can arbitrary GTF $\tau^{(n)}$ be presented in the form of a composition of the finite number of more simple global functions of the same class, i.e.

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)}\,\tau^{(n_4)}\,.....\,\tau^{(n_k)} \qquad (n \geq 3;\ n_j < n) \qquad (6)$$

where GTF $\tau^{(n)}$, $\tau^{(n_j)}$ (j=1..k) are defined in the same A-alphabet and have the same dimensionality that the initial global transition function $\tau^{(n)}$; in addition, for functions $\tau^{(n_j)}$ multiple enterings in the representation (6) are admitted.

Along with the well-known ***GDP*** we present a number of results on the so-called ***general global decomposition problem (GLDP).*** The ***GLDP*** is the question whether or not arbitrary ***GTF*** can be presented in the form of the composition of the type (**6**) in which arbitrary global functions $\tau^{(n_j)}$ ***(j=1..k)*** can be used**,** admitting the sign of equality and excepting trivial cases of representation. Thus, in case ***d-GLDP*** in representation (**6**) use of arbitrary ***GTF*** $\tau^{(n_j)}$ $(n_j \leq n)$ is admitted, which have identical with initial function $\tau^{(n)}$ both dimension, and the alphabet. It is proved the ***GDP*** and the ***GLDP*** are, in general, not equivalent. In the item ***7.1*** of chapter ***7*** the ***GDP*** for certain special global transition functions is discussed.

First of all, us will interest the question of interrelationship of nonconstructibility properties of ***GTF*** $\tau^{(n)}$ and global transition functions $\tau^{(n_j)}$ entering in the composition (**6**). In this sense ***(****using result of theorem* ***14)*** it is simple enough to convince oneself in validity of the following statement, namely**:** ***GTF $\tau^{(n)}$ possesses NCF if and only if at least one GTF $\tau^{(n_j)}$ $(n_j < n)$ possesses NCF; if at least one GTF from pair $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ possesses NCF-1, then their composition $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\,\tau^{(p)}$ (n=m+p-1) will possess NCF-1 and/or NCF.***

On the basis of ***Yamada-Amoroso*** results on completeness problem for polygenic ***HS-***models and our results on the nonconstructibility problem for classical ***HS-***models the negative solution of the ***GDP*** is presented. Namely, the following theorem takes place.

Theorem 60. For an arbitrary finite A-alphabet there is an infinite set of 1-dimensional GTF, for which the 1-GDP has negative solution.

Relative to the class of ***1-***dimensional ***binary injective GTF*** we have the following result.

Theorem 61. In the class of all binary injective 1-dimensional GTF the 1-GDP has the negative solution, in general.

The ***GDP*** with respect to a class of linear ***GTF*** has been. Such functions possess the ***G-***property of the ***universal reproducibility.*** The ***GDP*** is considered with respect to a ***subclass,*** whose functions are defined by the ***LTF*** of the following kind, namely**:**

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \left(x_1 + x_n + \sum_{k=2}^{n-1} b_k * x_k \right) \pmod a; \quad b_k \in \{0,1\}; \quad x_k \in A \quad (k = 1..n-1)$$

Such set of ***GTF*** is denoted as ***M*(A,1,G)*** which can be presented as unification of two subsets ***M*$_1$(A,1,G)*** and ***M*$_2$(A,1,G)*** **(**for brevity ***M*$_1$*** and ***M*$_2$)*** of ***GTF*** $\tau^{(n)}$ ***(n ≥ 2)*** with ***connected*** and

unconnected templates of size ***n***, accordingly; i.e. $M^*(A,1,G) \equiv M^*_1 \cup M^*_2$ and $M^*_1 \cap M^*_2 = Ø$, where **Ø –** the empty set. The global transition functions of these subsets are denoted as $\tau_1^{(n)}$ and $\tau_2^{(n)}$, accordingly. Under the above suppositions the following general result takes place.

Theorem 62. The set $M^*(A,1,G)$ and its subset M^*_1 are not closed with respect to composition operation. Any GTF $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ cannot be presented in the form of composition of two more simple functions of the same subset M^*_1.

Widening of the set ***GTF***, which admits an arbitrary function of set M^*_1 as elements of representation (**6**), upon set M^*_2 of functions allows to receive the positive solution of the ***1-GDP*** for ***GTF*** of the set M^*_1.

Theorem 63. Any global transition function $\tau_1^{(2k)} \in M^*_1$ can be presented in the form of composition $\tau_1^{(2k)} = \tau_1^{(k)}\,\tau_2^{(k+1)} = \tau_2^{(k+1)}\,\tau_1^{(k)}$, where $\tau_1^{(k)} \in M^*_1$ and $\tau_2^{(k+1)} \in M^*_2$ with template $X_2=\{0,k\}$ (k=2,3,4, ...). Any global transition function $\tau_1^{[p(2k+1)]} \in M^*_1$ can be presented in the form $\tau_1^{[p(2k+1)]} = \tau_1^{(p)}\,\tau_2^{[p(2k+1)-2]} = \tau_2^{[p(2k+1)-2]}\,\tau_1^{(p)}$ (p=3,5,7,9, ...; k=1, 2,3,4, ...). Any global transition function $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ (under the condition $n=p^*q$) can be presented in the form $\tau_1^{(n)} = \tau_2^{(n-p+1)}\,\tau_1^{(p)} = \tau_2^{(n-q+1)}\,\tau_1^{(q)}$, where GTF $\tau_1^{(n)}$ of set M^*_2 has the symmetrical template.

The following result reflects the situation for case of global transition function $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ (***n*** – *prime number*).

Theorem 64. A global transition function $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ can be presented as a composition of the finite number of more simple global transition functions from set $M^*(A,1,G)$ if and only if n is a composite number.

For case of global transition function $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$ takes place the quite different situation [53].

Theorem 65. For an arbitrary integer $n \geq 5$ and A-alphabet there are at least $n - 4$ global transition functions $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$, which can be presented as a composition $\tau_2^{(n)} = \tau_2^{(n-1)}\,\tau_1^{(2)}$.

Whereas relative to the above-mentioned class of ***HS***-structures with refracterity {***d-HSR(r,P)***} we have the following results [5,54-56,88,90].

Theorem 66. The global decomposition problem in the class of all structures d-HSR(r,P) ($d \geq 1$) with refracterity has the negative solution.

Theorem 67. In the class B(r) of all 1-dimensional refractery GTF with depth of refracterity $r \geq 1$ any global transition function cannot be presented in the form of a composition of the finite number of functions from the same set B(r); B(r) is a set of the isolated refractery global transition functions with respect to composition operation.

In item **7.2** of chapter **7** certain interesting approaches to investigation of the global decomposition problem are presented**.** On the basis of ***Shannon*** function and certain results of the theory of boolean functions the following theorem can be presented [5,53-56,88,90].

Theorem 68. For any given finite basic set G_f of 1-dimensional binary global transition functions exists an integer $n_o > 0$ such that for any integer $n \geq n_o$ exists at least one binary global transition function $\tau^{(n_j)}$ for which the global decomposition problem has the negative solution.

On the basis of the theory of ***a***-valued logics the following results can be presented [53-56,88].

Theorem 69. The class L(a,0) of all local transition functions $\sigma^{(n)}$ ($n \geq 2$, $a > 2$) has not a finite basis.

On the basis of the result *(like the binary case)* the negative solution of the global decomposition problem for the general case can be received [5,54-56,88,90].

Theorem 70. Among all d-dimensional global transition functions, defined in an A-alphabet and with arbitrary template, there is an infinite set of functions for which d-GDP ($d \geq 1$) has the negative solution.

Using algebraic approaches, a series of interesting results on properties of semigroup $L(a,d)$ of all parallel global maps $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$ are presented. The set of all such maps can be presented as unification of ***seven*** nonintersecting subsets, which relative to the global transition functions *(GTF)* composing their have the following general characteristics, namely:

G_1 : ***GTF*** possess the all types of nonconstructibility ***(NCF, NCF-1, NCF-2, NCF-3);***

G_2 : ***GTF*** possess the nonconstructibility of types ***NCF (NCF-3)*** and ***NCF-1*** without ***NCF-2;***

G_3 : ***GTF*** possess the nonconstructibility of types ***NCF (NCF-3)*** and ***NCF-2*** without ***NCF-1;***

G_4 : ***GTF*** possess the nonconstructibility of type ***NCF-2;*** the parallel global maps defined by ***GTF*** are not mutually one-valued;

G_5 : ***GTF*** possess the nonconstructibility of type ***NCF-1***, only;

G_6 : ***GTF*** possess the nonconstructibility of type ***NCF (NCF-3)***, only;

$G_7 \subset G_6$: ***GTF*** possess the mutually one-valued parallel maps $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$.

The sets G_k ***(k=1..6)*** relative to composition operation form the *non-commutative* semigroups, whereas the set G_7 forms the group. Consequently, semigroup $L(a,d)$ of all parallel maps $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ in ***d-HS*** can be presented as ***unification*** of the finite number of non-intersecting subsemigroups and of the group, i.e. $L(a,d) = \cup_k G_k$ ***(k=1..7)***. Structural analysis of subsemigroups G_j ***(j=1..6)*** and the group G_7 allows to formulate the following general result about reprentation of the semigroup $L(a,d)$.

Theorem 71. Semigroup L(a,d) of all parallel global maps $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ defined by the classical HS-models can be presented as unification of six non-intersecting subsemigroups G_k (k=1..6), which have not the finite systems of generators, and a maximal group G(d). With respect to the semigroup $L(a,d) \setminus G(d)$ the sets G_h (h=4..6) are the isolated subsemigroups.

In item **7.2** the more detailed structure of semigroup $L(a,1)$ ***(a ≥ 3)*** is discussed. The global decomposition problem was investigated on the basis of so-called concept of the ***infinite mutually erasable configurations (∞-MEC)***. By definition, a pair of configurations $c_1, c_2 \in C(A,d,\infty)$ is pair of the ***∞-MEC*** if the following correlation $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c_3 \in C(A,d,\infty)$ takes place. On the basis of this concept and a special class of global transition functions defined by local transition functions of the following kind, namely:

$$E^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & if \;\; x_j = 0, \;\; x_{n-1} = x_n = 1 \qquad (j = 1..n-2) \\ 1, & if \;\; x_j = 0, \;\; x_{n-1} = 1 \qquad (j = 1..n-2; n) \\ x_n, & otherwise \end{cases}$$

a number of interesting partial results on the ***global decomposition problem*** are presented, in particular, as follows.

Theorem 72. Semigroup L(a,1) of all 1-dimensional parallel global maps $\tau^{(n)}$: C(A,1) → C(A,1) has not finite basis. For any integer n ≥ 3 there is a 1-dimensional global transition function $\tau^{(n)}$ defined in an arbitrary finite A-alphabet for which the global decomposition problem has the negative solution.

In item *7.3* the complexity of global transition functions with respect to the problems ***d-GDP*** and ***d-GLDP***, and certain linked solvability problems are discussed. Let ***GSA*** be the set of all ***d***-dimensional global transition functions, defined in an arbitrary finite ***A***-alphabet and such functions that for each function $\tau^{(n)} \in GSA$ and configuration $c \in C(A,d,\phi)$ the correlation $|c| \le |c\tau^{(n)}|$ takes place, where $|c|$ – minimal diameter of an arbitrary configuration $c \in C(A,d,\phi)$. Then, in the class ***GSA*** of global transition functions the ***d-GDP*** is solvable [5,53-56,88,90].

Theorem 73. In the class GSA of d-dimensional global transition functions the d-GDP is constructively solvable. For any d-dimensional GTF $\tau^{(n)}$ determined in the A-alphabet exists the constructive algorithm deciding for it both d-GDP, and d-GLDP.

The general problem of *solvability* of the ***d-GDP*** is generalization of very interesting more *particular* decomposition problem: ***can an arbitrary global transition function be presented in the form (6) under conditions that functions $\tau_j^{(n_j)}$ belong to a certain basic set G?*** In this direction the following basic result takes place [5,54-56,88,90].

Theorem 74. With respect to an arbitrary basic subset G of all d-dimensional global transition functions, defined in alphabet A={0,1, ..., a-1} (a – prime number), the d-GDP is algorithmmically solvable.

In item *7.3* a series of very interesting problems which are intermediate between common and particular ***d-GDP*** are discussed. Along with that, the question of unique representation of an arbitrary global transition function in the form (**6**) is considered. The utilization of possibility of representation of ***LTF*** $\sigma^{(n)}$ in the form of polynomials with respect to base ***a*** is based on the following result and allows to receive a number of interesting results on the ***d-GDP/d-GLDP***.

Theorem 75. Any local transition function $\sigma^{(n)}$ defined in A-alphabet is presented in the form of polinomial of maximal degree n(a-1) over M if and only if the algebraic system M=<A; +; x> is field.*

On the basis of such polynomial representation a very interesting class of local transition functions, which are presented by symmetrical polynomials, is investigated. Among all symmetrical polynomials a subclass of so-called ***elementary symmetrical*** polynomials is selected. Polynomials P_k which are given by the functions defined below are selected as ***elementary*** polynomials over field ***A***, namely:

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{r} R_j(k, x_1, x_2, \dots, x_n); \qquad r = C_n^k / k!$$

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j; \qquad P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j$$

where $R_j(k,x_1,x_2,...,x_n)$ – arbitrary possible arrangements of elements $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ on ***k***, which are different with accuracy to symmetry; the *elementary symmetrical polynomials* are denoted as ***ESP***. Let $\Psi(n,a)$ be a set of the classical ***1***-dimensional global transition functions, whose local transition functions are presented by ***ESP***. It can be shown, that any global transition function $\tau^{(n)}_j \in \Psi(n,a)$, excepting the first (P_1) and the last (P_n), has the following representation:

$$\tau_j^{(n)} = \tau_1^{(n-j+1)} \tau_j^{(j)}; \quad \tau_j^{(n)} \in \Psi(j,a); \quad \tau_1^{(n-j+1)} \in \Psi(n-j+1,a)$$

$$\sigma_1^{(n-j+1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-j+1}) = \sum_{k=1}^{n-j+1} x_k \pmod a; \quad \sigma_j^{(j)}(x_1, x_2, \dots, x_j) = \prod_{k=1}^{j} x_k \pmod a \quad (1<j<n)$$

For any integer $n \geq 2$ the global transition functions $\tau_1^{(n)}$ and $\tau_n^{(n)}$ are called the ***basic*** functions of set $E(n,a)$ of all symmetrical global transition functions of $\leq n$ variables in A-alphabet. In this direction the following interesting result can be formulated [5,54-56,88,90].

Theorem 76. Any global transition function $\tau^{(n)} \in E(n,a)$, excepting basic ones, is presented in the form of composition $\tau_1^{(n-j+1)}\ \tau_j^{(j)}$ $(1<j<n)$ of two more simple basic functions. An arbitrary basic function of set $E(n,a)$ has not of the similar presentation, in general.

Approach on the basis of polynomial representation of local transition functions over A-field for *prime* number a can be spread upon the *binary* case $a=2$. In this case ***Zegalkin polynomials*** are very useful for representation of the *binary* local transition functions. Furthermore, investigations of the binary ***HS***-models are more comfortable within the framework of the so-called ***Zegalkin algebra***, which can be generalized on non-binary A-fields, where a is degree of a prime number. On the basis of possibility of polynomial representation of local transition functions, defined in alphabet $A=\{0,1,\dots,a-1\}$ (a – *prime number*), we can to receive the further development of the decomposition problems. On the basis of the ***GSAK***-class of the local transition functions presented by polynomials, namely:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g * \sum_{k=1}^{k=n} x_k \pmod a, \quad g \in A$$

over A-field, and the class of all binary local transition functions presented by ***Zegalkin*** polynomials the following general result can be formulated [5,54-56,88,90].

Theorem 77. For prime numbers a and n each local transition function $\sigma^{(n)} \in GSAK$ cannot be presented as a composition of the finite number of more simple functions defined in the same alphabet $A=\{0,1, \dots, a-1\}$. For each prime number $n \geq 2$ there is a binary local transition function $\sigma^{(n)}$, which cannot be presented as a composition of the finite number of more simple functions defined in the same binary B-alphabet.

On the basis of results on decomposition problem a constructive approach (*criterion*) to solution of the global decomposition problem for certain classes of global transition functions is presented. This ***criterion*** is based on the following result: ***An arbitrary global transition function $\tau^{(n)}$, defined in A-alphabet (a – prime), has the positive solution of the global decomposition problem if and only if the corresponding polynomial $P_n \pmod a$ can be presented in the form of superposition of polynomials, namely:***

$$P_{n_k}((P_{n_{k-1}}(P_{n_{k-2}} \dots (P_{n_1}) \dots))) \pmod a; \quad n_j < n; \quad j = 1..k$$

Now we shall present a number of results on ***common (d-GDP)*** and ***generalized (d-GLDP) decomposition*** problems, which were received on the basis of *polynomial* representation of local transition functions defined over A_p-field, where $A_p=\{0,1,2, \dots, a-1\}$ (a – *prime number*).

Theorem 78. In general case the d-GLDP for an arbitrary global transition function has the negative solution, excluding the trivial cases.

In general case the ***d-GDP*** and the ***d-GLDP*** are not equivalent, therefore the following result presents the special interest.

Theorem 79. If for a certain d-dimensional global transition function the problems d-GDP and d-GLDP are equivalent, then for such function both problems are algorithmically solvable.

The above results on the composition problem with respect to the A_p-alphabet allow to receive the following important result [5,53-56,88,90].

Theorem 80. For any d-dimensional global transition function, defined in A_p-alphabet, the d-GDP and the d-GLDP are equivalent and algorithmically solvable.

On the basis of theorems *78* and *80* the following important result can be presented [54-56].

Theorem 81. For an arbitrary d-dimensional global transition function $\tau^{(n)}$, defined in A_p-alphabet, the d-GDP and the d-GLDP have the positive solutions if and only if the initial function $\tau^{(n)}$ can be presented in the form $\tau^{(n)}= \tau^{(m)}\tau^{(q)}$ $(m,q < n; m+q-1=n)$ of two more simple d-dimensional functions, defined in the same A_p-alphabet.

With the general composition problem is linked a series of optimization problems, which are discussed in item ***7.4.*** The last theorem is linked with these problems, also. In addition, on the basis of theorem *81* the following interesting result can be received [5,54-56,88,90].

Theorem 82. For any integer $n \geq 3$ there is a d-dimensional global transition function $\tau^{(n)}$, defined in A_p-alphabet, relative to which the d-GDP and the d-GLDP are equivalent and have the negative solution.

On the basis of theorem *82* we can solve an interesting question about estimation of number of global transition functions defined in A_p-alphabet relative to which both problems ***d-GDP*** and ***d-GLDP*** have the positive solutions**.** The investigation of the question is being summarized by the following general result, which presents independent interest, also [5,54-56,88,90].

Theorem 83. For «almost all» d-dimensional global transition functions defined in A_p-alphabet both problems d-GDP and d-GLDP have the negative solution.

Thus, we have proved a slightly unexpected result, namely**:** ***the quota of all global transition functions, defined in A_p-alphabet, which have the positive solutions of d-GDP and d-GLDP, equals zero.*** From our results on the ***d-GDP*** and the ***d-GLDP*** among all ***d-***dimensional global transition functions $\tau^{(n)}$ $(n \geq 2)$**,** defined in A_p-alphabet**,** an infinite hierarchy of *complexity* with respect to the ***d-GDP/d-GLDP*** can be introduced**.** We shall say, that a global transition function $\tau^{(n)}$ ***belongs to the s-level of complexity*** [*designation* $\tau^{(n)} \in L(s)$] if and only if for the function takes place representation of the following kind, namely**:**

$$\tau^{(n)} = \tau_1^{(n_1)}\tau_2^{(n_2)}\tau_3^{(n_3)} \ldots\ldots \tau_k^{(n_k)} \qquad (n_j \leq s < n) \qquad (\exists j)(n_j = s)$$

and analogous representation under conditions $(\exists j)(n_j > s)$ $(j=1 .. k)$ is absent. Furthermore, if for certain global transition function $\tau^{(n)}$ the ***d-GDP (d-GLDP)*** has the negative solution, then such function should be ascribed to class of the ***L(n)-level of complexity.*** Under the condition of the above results**,** definitions and theorem *83* the following asymptotical correlations can be proved, namely**:**

$$(\forall s \geq 2)(\#L(s) > 0); \quad \lim_{s \to \infty} \frac{\#L(s)}{a^{a^s}} \geq 1 \qquad (a - prime)$$

$$\# - cardinality\ of\ an\ arbitrary\ set\ G$$

Furthermore, on the basis of theorem ***80*** and definition of the complexity concept of ***d-***dimensional global transition functions with respect to the problem ***d-GDP/d-GLDP*** the following important result on solvability of complexity levels of global transition functions takes place.

Theorem 84. The problem of belonging of an arbitrary d-dimensional global transition function, defined in A_p-alphabet, to s-level of complexity is algorithmically solvable.

The above results on composition problem essentially used the algebraic properties of A_p-alphabet, because arbitrary local transition function $\sigma^{(n)}$ can be exceptionally presented by a polynomial in ***(mod a) of*** maximal degree ***n(a-1)*** over A_p-field, and vice versa. Whereas for case of the A_c-alphabet ***(c –*** *composite number****)*** by far not each local transition function, defined in such A_c-alphabet, can be presented in *polynomial* form of the above type. Namely, the following general result takes place [5,54-56,88,90].

Theorem 85*. For any A_c-alphabet the quote (H) of local transition functions $\sigma^{(n)}$, defined in such alphabet, which have the polynomial representation in (mod a), satisfies the following correlation, namely:*

$$\boxed{\frac{1}{a^{a^n-4^n}} \le H \le \frac{1}{a^{a^n-(a-2)^n}}}$$

Thus, for case of ***a***-composite number «*almost all*» local transition functions, defined in A_c-alphabet, cannot be presented in polynomial form in ***(mod a)*** for large enough values ***n*** or/and ***a***. To this effect, we have introduced an ***algebraic system (AS)*** [84], in which «***almost all***» local transition functions, defined in A_c-alphabet, can be exceptionally presented by polynomials in ***(mod a)***. On the basis of theorems ***79***, ***80*** and ***33*** we have received the following interesting result with respect to problem ***d-GDP/d-GLDP*** for case of general A_c-alphabet of ***HS***-models.

Theorem 86*. With respect to «almost all» global transition functions, defined in A_c-alphabet whose local transition functions admit the polynomial representation of form (34), the problems d-GDP and d-GLDP are equivalent and algorithmically solvable.*

Thus, on the basis of theorems ***33*** and ***86*** the above results on problems ***d-GDP/d-GLDP*** can be spread on «*almost all*» global transition functions defined in A_c-alphabet. However, for general case of ***A***-alphabet the question is open and the detailed discussion of the question can be found in our monographs [5,9]. The general results presented in chapter ***7*** solve problems ***d-GDP*** and ***d-GLDP*** for classical ***HS***-models as a whole.

It is necessary to have in mind, that the results presented above are valid, basically, for classical ***HS***-models whose ***LTF*** $\sigma^{(n)}$ satisfy the following determinative relation, namely:

$$(\exists h \in A)\left(\sigma^{(n)}(h,h,h,...,h) = h\right)$$

i.e. the alphabet of internal states of the individual automaton of the model contains specially chosen, so-called state of «***rest***» ***h***, as a rule, «***0***» for alphabet ***A*** = {***0,1,2, ..., a-1***}. This state has numerous and natural enough interpretations, above all, with applied standpoint. It is necessary to have in mind, that all above-presented results formulated relative to state of ***rest*** «***0***», are valid and for the general case of the state of rest $h \in A$, i.e. for all classical ***d-HS*** $(d \ge 1)$.

At last, a whole series of other results received by us in process of researches on the ***HS*** problems, can be found as in the given monograph in the annotated form, and in our publications (*first of all, in* [1,3,5,8,9,5,54-57,82,88,90]) in the form of the thorough strict proofs and interpretations of numerous computer experiments with classical ***HS***-models. Particularly, in the item ***6.4*** an algorithm of modelling of an arbitrary classical ***d-HS*** $(d \ge 1)$ in real-time by means of ***d-HS*** of the same type without ***NCF*** has been presented. Practically exhaustive bibliography of our works on ***HS***-problems can be found in References to the monograph and in the internet-bibliography [536], namely: ***http://www.geocities.com/ca_hs_ref.***

The monograph is founded on the special lecture course «***Classical Homogeneous Structures (Classical Cellular Automata)***» that has been given by the first writer at the *Grodno State University* during ***April – May, 2008.***

Литература

1. ***Аладьев В.З.*** К теории однородных структур.- Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1972.

2. ***Аладьев В.З.*** Введение в архитектуру моделей ***ЕС ЭВМ.-*** Таллинн: Валгус, 1976.

3. ***Aladjev V.Z.*** Mathematical Theory of Homogeneous Structures and Their Applications.- Tallinn: Valgus Press, 1980, 267 p.

4. ***Аладьев В.З. и др.*** Математическая биология развития.- Москва, изд-во Наука, 1982.

5. ***Аладьев В.З.*** Однородные структуры**:** Теоретические и прикладные аспекты.- Киев: Республиканское изд-во Тэхника, 1990, 272 с.

6. ***Аладьев В.З., Тупало В.Г.*** Компьютерная хрестоматия.- Киев: Украинская Советская Энциклопедия, 1993, 480 с. [обзорная статья «***V.Z. Aladjev. Homogeneous Structures: Theoretical and Applied Aspects***»]

7. ***Аладьев В.З., Тупало В.Г.*** Научно-практическая деятельность Таллиннской исследовательской группы**:** Итоговые результаты за ***25-***летие ***(1969 – 1993).-*** Москва: Минтопэнерго, 1994, 80 с.

8. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Вопросы математической теории классических однородных структур.- Гомель: Изд-во БЕЛГУТ, 1996, ISBN 5-063-56078-5.

9. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Математическая теория классических однородных структур.- Таллинн-Гомель: Изд-во TRG **&** VASCO **&** Salcombe Eesti Ltd., 1998, 300 с., ISBN 9-063-56078-9.

10. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Научно-исследовательская активность Таллиннской исследовательской группы за период ***1995 – 1998.-*** Таллинн-Гомель-Москва: TRG **&** VASCO Ltd, 1998, 80 с., ISBN 14-064298-56.

11. ***Параллельная обработка информации и параллельные алгоритмы /*** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Таллинн: Республиканское изд-во Валгус, 1981, 296 с.

12. ***Параллельные системы обработки информации /*** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Таллин: Республиканское изд-во Валгус, 1983, 376 с.

13. ***Математическое обеспечение ЕС ЭВМ и АСУ /*** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Таллинн: Республиканское изд-во Валгус, 1978, 190 с.

14. ***Система управления базами данных на основе операционной системы МИНИОС и СУБД ОКА /*** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Таллинн: Изд-во Валгус, 1980, 150 с.

15. ***Структурно-аналитические модели и алгоритмы распознавания и идентификации объектов управления /*** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Киев: Изд-во Тэхника, 1993.

16. ***Аладьев В.З.*** Задача о матрицах, возникающая в теории самовоспроизводящихся автоматов **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***19, № 2,*** 1970, с. 159-165.

17. ***Аладьев В.З.*** Некоторые вопросы, возникающие в теории сотообразных структур **//** Изв. АН ЭССР. Биология, ***19, № 3,*** 1970, с. 266-277.

18. ***Аладьев В.З.*** Одна теорема теории сотообразных структур **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***19, № 3,*** 1970, с. 365-368.

19. ***Аладьев В.З.*** Вычислимость в однородных структурах.- Москва: ВИНИТИ, 1971.

20. ***Аладьев В.З.*** К теории однородных структурах.- Москва: ВИНИТИ, 1971.

21. ***Аладьев В.З.*** Об одном асимптотическом свойстве стохастических сотообразных структур **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 2,*** 1971, с. 205-208.

22. ***Аладьев В.З.*** Некоторые оценки для структур Неймана-Мура **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 3,*** 1971, с. 335-342.

23. ***Аладьев В.З.*** Две модели, решающие проблему Французского флага **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 3,*** 1971, с. 360-362.

24. ***Аладьев В.З.*** К устойчивости некоторых оптимальных дифференциальных систем **//** Автоматика и вычислительная техника.- Москва: АН СССР, ***14,*** 1971.
25. ***Аладьев В.З., Ефимов Н.И.*** О некоторых свойствах структур Мура **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 2,*** 1971, с. 208-210.
26. ***Аладьев В.З., Орав Т.А.*** Числовая модель регуляции осевой структуры **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 3,*** 1971, с. 276-278.
27. ***Аладьев В.З., Полуэктов Р.А.*** О моделях регуляции пространственной структуры **//** Изв. АН ЭССР. Биология, ***20, № 4,*** 1971, с. 360-363.
28. ***Аладьев В.З.*** К теории однородных структур **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***21, № 2,*** 1972, с. 224-228.
29. ***Aladjev V.Z.*** Computability in Homogeneous Structures **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***21, № 1,*** 1972, с. 79-83.
30. ***Aladjev V.Z.*** Some Questions Concerning Nonconstructibility and Computability in Homogeneous Structures **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***22, № 2,*** 1973, с. 210-214.
31. ***Аладьев В.З.*** Некоторые алгоритмические вопросы математической биологии развития **//** Изв. АН ЭССР. Биология, ***22, № 1,*** 1973, с. 68-76.
32. ***Аладьев В.З. Tau(n)-***грамматики и порождаемые ими языки **//** Изв. АН ЭССР. Биология, ***23, № 1,*** 1974, с. 67-87.
33. ***Аладьев В.З., Орав Т.А.*** Проблема кибернетического моделирования процессов развития **//** Изв. АН ЭССР. Биология, ***23, № 3,*** 1974, с. 197-200.
34. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б.*** Об одном методе моделирования в однородных структурах **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***23, № 4,*** 1974, с. 414-417.
35. ***Аладьев В.З.*** О сложности параллельных алгоритмов, определяемых однородными структурами **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., **24, *№ 2,*** 1975, с. 267-272.
36. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б.*** К вопросу реализации операционных систем в вычислительных структурах и средах **/** Труды ***4-***й Всес. конф. по однородным вычислительным системам и средам.- Киев, 1975, с. 256-260.
37. ***Аладьев В.З.*** Характеристика одномерных однородных структур в терминах стэковых автоматов, в книге [***2***], с. 244-276.
38. ***Аладьев В.З.*** К понятию однородных структур, в книге [***2***], с. 186-197.
39. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б., Ефимов Н.И.*** Содержание теории однородных структур, в книге [***2***], с. 198-213.
40. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б.*** Моделирование операционных систем на однородных структурах, в книге [***2***], с. 214-243.
41. ***Аладьев В.З., Клюшников В.Т.*** Некоторые свойства конфигураций, в книге [***13***].
42. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б.*** Параллельная система обработки информации, в [***14***].
43. ***Aladjev V.Z.*** To Nonconstructibility in Homogeneous Structures, в [***14***], с. 154-171.
44. ***Aladjev V., Vetyusme R.*** On Composition Problem in Homogeneous Structures, в [***14***].
45. ***Аладьев В.З.*** Некоторые перспективы развития теории однородных структур как формального аппарата исследования вычислительной техники параллельного действия, в сборнике [***14***], с. 177-210.
46. ***Аладьев В.З.*** Кибернетическое моделирование биологии развития, в сборнике [***11***].
47. ***Аладьев В.З.*** Перспективы развития теории однородных структур **/** Труды ***3-***й Венгерской конф. по вычислительной технике.- Будапешт: АН Венгрии, 1981, с. 17-34.
48. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А.*** Проблемы внедрения технологии параллельной обработки при решении задач бухучета **/** Труды **2-**й Всес. Конф. «Бухучет в условиях совершения хозяйственного механизма»**.-** Баку, 1981, с. 132-136.
49. ***Аладьев В.З., Блиндер Б.С.*** Об одном подходе к созданию высокоэффективных систем обработки информации на базе вычислительной техники ***ВЦКП*** **/** Труды Всес.

конф. «Основные направления развития программного обеспечения ЭВМ, комплексов и сетей ЭВМ»**.-** Севастополь, 1981, с. 25-35.

50. ***Аладьев В.З.*** Об одном подходе к созданию высокопроизводительных систем информационного поиска на основе информационного распараллеливания в однородных структурах **/** Труды Всес. Симпоз. «Высокопроизводительные системы информационного поиска и управления базами данных»**.-** Кишинев, 1982, с. 39-42.

51. ***Аладьев В.З.*** Описание параллельной системы обработки информации для ***ЕС ЭВМ*** в терминах систем алгоритмических алгебр **/** Мат-лы Всес. семин. «Параллельное программирование и высокопроизводительные вычисл. сист.»**.-** Киев, 1982.

52. ***Аладьев В.З., Бойко В.К.*** Параллельная управляющая система ***ОВС,*** в сборнике [***12***].

53. ***Аладьев В.З.*** Избранные вопросы теории однородных структур, в сб. [***12***], с. 141-341.

54. ***Aladjev V.Z.*** *Solutions of a Series of Problems in the Mathematical Theory of Homogeneous Structures* **/** ***TR-040684.-*** Tallinn**:** P/A Silikaat, 1985, 1566 p.

55. ***Aladjev V.Z., Zinkevich T.G.*** *The Classical Homogeneous Structures* **/** ***TR-041085.-*** Tallinn**:** P/A Silikaat, 1985, 845 p.

56. ***Aladjev V.Z.*** *Recent Results in the Theory of Homogeneous Structures* **/** ***TR-041285.-*** Tallinn: P/A Silikaat, 1985, 942 p.

57. ***Аладьев В.З.*** Однородные структуры**:** Модель перспективных параллельных вычислительных систем **/** Новые направления и средства аналого-цифрового преобразования и обработки информации.- Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1988, с. 76-90.

58. ***Aladjev V.Z. et al.*** Homogeneous Structures**:** Theoretical and Applied Aspects, in [***6***].

59. ***Aladjev V.Z.*** Operations Over Languages Generated by ***Tau(n)-Grammars //***Comment. Mathem., University Carolinae Praga, ***154,*** no. ***2,*** 1974, pp. 211-220.

60. ***Aladjev V.Z.*** About the Equivalence of ***Tau(n)-Grammars*** and ***Sb(m)-Grammars //*** Com. Mathem., University Carolinae Praga, ***157,*** no. ***4,*** 1974, pp. 717-726.

61. ***Aladjev V.Z.*** Survey of Research in the Theory of Homogeneous Structures and Their Applications **//** Mathematical Biosciences, ***22,*** 1974, pp. 121-154.

62. ***Aladjev V.Z.*** The Behavioural Properties of Homogeneous Structures **/** The First Intern. Symposium on ***USAL,*** Tokyo, Japan, 1975, pp. 28-49.

63. ***Aladjev V.Z.*** Some New Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** Proc. Intern. Symposium on Mathem. Topics in Biology, Kyoto, Japan, 1978, pp. 193-226.

64. ***Aladjev V.Z.*** Theory of Homogeneous Structures and Their Applications **/** Proc. Second Internat. Conf. on Mathem. Modelling, Sant-Louis, USA, 1979, pp. 121-142.

65. ***Aladjev V.Z.*** Homogeneous Structures in Engineering Sciences **/** Proc. 19^{th} Annual Meeting Society of Engineering Science.- University of Missouri-Rolla, USA, 1982.

66. ***Aladjev V.Z.*** The General Modern Problems in the Mathematical Theory of Homogeneous Structures **/** Abstracts of Intern. Workshop ***PARCELLA-82.-*** Berlin: Springer, 1982.

67. ***Aladjev V.Z.*** Homogeneous Structures in Mathematical Modelling **/** The Fourth Intern. Conf. on Mathem. Modelling.- Zurich, 1983, pp. 10-15.

68. ***Aladjev V.Z.*** New Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** Informatik-Skripten, no. ***3,*** Braunschweig, 1984, pp. 3-15.

69. ***Aladjev V.Z.*** New Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** ***MTA*** Szamitastechnikai es. Autom. Tanulmanuok, ***158,*** Budapest, 1984, pp. 3-14.

70. ***Aladjev V.Z.*** A Criterion of Nonconstructibility in the Classical Homogeneous Structures **/** Proc. Intern. Workshop ***PARCELLA-84.-*** Berlin**:** Akademie-Verlag, 1984, pp. 1-5.

71. ***Aladjev V.Z.*** A Few Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** Mathematical Research, Band ***25.-*** Berlin**:** Akademie-Verlag, 1985, pp. 168-175.

72. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** ***MTA*** Szamitastechnikai es. Automat. Tanulmanuok, ***185,*** Budapest, 1986, pp. 261-280.

73. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results in the Mathematical Theory of Homogeneous Structures **//** Trends, Techniques and Problems in Theoretical Comp. Science **/** Lecture Notes in Computer Science, Band ***281.-*** Heidelberg: Springer-Verlag, 1986, pp. 110-128.
74. ***Aladjev V.Z.*** Homogeneous Structures in Mathematical Modelling **/** Proc. Sixth Intern. Conf. on Mathem. Modelling.- Sant-Louis: Washington University, USA, 1987.
75. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays.- Amsterdam: North-Holland, 1987, pp. 31-48.
76. ***Aladjev V.Z.*** Unsolved Theoretical Problems in Homogeneous Structures **/** Mathematical Research, Band ***48.-*** Berlin**:** Akademie-Verlag, 1988, pp. 33-49.
77. ***Aladjev V.Z.*** The Complexity Problem in Homogeneous Structures **/** The Intern. Conf. on Comput. Sciences.- Praga, 1988, pp. 42-57.
78. ***Aladjev V.Z.*** Computer Investigation of Homogeneous Structures **/** The Intern. Conf. ***IMYCS-88.-*** Bratislava, 1988, pp. 31-41.
79. ***Aladjev V.Z.*** Survey on Homogeneous Structures **/** Tech. Rept., no. ***19-12/89.-*** PTIP, 1989.
80. ***Aladjev V.Z.*** Survey on Some Theoretical Results and Applicability Aspects in Parallel Computation Modelling **//** Journal New Gener. Comp. Systems, ***1,*** no. ***4,*** 1988, pp. 307-317.
81. ***Aladjev V.Z.*** A Solution of the ***Steinhays's*** Combinatorical Problem **//** Appl. Mathem. Letters, no. ***1,*** 1988, pp. 11-12.
82. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results in the Mathematical Theory of Homogeneous Structures **/** New Trends in Computer Sciences.- Amsterdam**:** North-Holland, 1988, pp. 3-54.
83. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results on the Theory of Homogeneous Structures **/** New Approaches to Parallel Processing.- Berlin**:** Akademie-Verlag, 1988, pp. 128-147.
84. ***Aladjev V.Z.*** An Algebraical System for Polinomial Representation of ***K-***Valued Logical Functions **//** Applied Mathem. Letters, no**. *3,*** 1988, pp. 207-209.
85. ***Aladjev V.Z.*** Interactive Program System for Modelling of Homogeneous Structures **/** Seventh Intern. Conf. on Mathem. and Comp. Modelling, Chicago, USA, 1989.
86. ***Aladjev V.Z. et al.*** Theoretical and Applied Aspects of Homogeneous Structures **/** Proc. Intern. Workshop ***PARCELLA-90.-*** Berlin: Akademie-Verlag, 1990, pp. 48-70.
87. ***Aladjev V.Z.*** Homogeneous Structures**:** Theoretical and Applied Aspects **/** The 8^{th} Intern. Conf. on Mathem. and Comput. Modelling, Washington University, USA, 1991.
88. ***Aladjev V.Z.*** *Survey on the Homogeneous Structures* **/** Tech. Rept., no. ***12-19/89 (revised and extended report),*** Project-Technological Institute of Industry.- Tallinn, 1989, 947 p.
89. ***Aladjev V., Hunt U., Shishakov M.*** Homogeneous Structures**:** Conception, Basics of Theory and Applied Aspects**.- *TRG: http://www.geocities.com/Pentagon/1397.***
90. ***Aladjev V., Hunt U.*** *Fundamental Problems in the Theory of the Classical Homogeneous Structures* **/** ***TRG*** Research Rept. ***TRG-55/97.-*** Tallinn**:** VASCO**,** 1997, 966 p.
91. ***Аладьев В.З. и др.*** Прикладные аспекты теории однородных структур **/** ***8-я*** Белорусская математическая конференция, ч. ***3,*** Минск, 19-24 июня 2000.
92. ***Аладьев В.З. и др.*** Моделирование в классических однородных структурах **/** Труды Межд. конф. по матем. моделированию ***(МКММ-2000).–*** Херсон, Украина, 2000.
93. ***Аладьев В.З., Шишаков М.Л.*** Введение в математический пакет ***Mathematica 2.2.-*** Москва: ИИД ФилинЪ, 1997, 363 с., ISBN 5-89568-004-6.
94. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Основы компьютерной информатики.- Таллинн-Гомель: Российская Академия Ноосферы **&** TRG, 1997, 396 с.
95. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Основы компьютерной информатики**.-** Москва: ИИД ФилинЪ, 1998, 496 с., ISBN 5-89568-068-2.
96. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Основы компьютерной информатики**.** **2-**е изд.- Москва: ИИД ФилинЪ**,** 1999, 545 с.

97. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Введение в среду математического пакета ***Maple V.-*** Минск: Международная Академия Ноосферы, 1998, 452 с.
98. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Программирование в среде математического пакета ***Maple V.-*** Минск-Москва: Российская Академия Экологии, 1999, 470 с., ISBN 4-10-121298-2.
99. ***Аладьев В.З., Богдявичюс М.А.*** Решение физико-технических и математических задач с ***Maple V.-*** Таллинн-Вильнюс: TRG, 1999, 686 с., ISBN 9986-05-398-6.
100. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Рабочее место математика Таллинн-Минск-Москва: Российская Академия Естественных Наук, 1999, 608 с.
101. ***Аладьев В.З., Шишаков М.Л.*** Рабочее место математика.- Москва: Лаборатория Базовых Знаний, 2000, 752 с. + ***CD,*** ISBN 5-93208-052-3.
102. ***Аладьев В.З., Богдявичюс М.А. Maple 6:*** Решение математических, статистических и инженерно-физических задач.- Москва: Лаборатория Базовых Знаний, 2001, 850 с.
103. ***Аладьев В.З., Богдявичюс М.А.*** Специальные вопросы работы в среде математического пакета ***Maple.-*** Вильнюс: Вильнюсский технический ун-т, 2001, 208 с. + ***CD.***
104. ***Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A. Interactive Maple:*** *Solution of Mathematical, Statistical, Engineering and Physical Problems*.**-** Tallinn: International Academy of Noosphere, Baltic Branch, 2001-2002, ***CD*** with Booklet, ISBN 9985-9277-1-0.
105. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А., Гришин Е.П.*** Дополнительные программные средства математического пакета ***Maple*** релизов ***6*** и ***7.-*** Таллинн: Международная Академия Ноосферы, Балтийское отделение, 2002, 314 с. + ***CD,*** ISBN 9985-9277-3-7.
106. ***Аладьев В.З.*** Эффективная работа в ***Maple 6/7.-*** Москва: Лаборатория Базовых Знаний, 2002, 334 с. + ***CD,*** ISBN 5-93208-118-X.
107. ***Аладьев В.З., Лиопо В.А., Никитин А.В.*** Математический пакет ***Maple*** в физическом моделировании.- Гродно: Гродненский госуниверситет, 2002, 416 с.
108. ***Aladjev V.Z., Vaganov V.A.*** *Computer Algebra System* ***Maple:*** *A new software library*.**-** Tallinn: International Academy of Noosphere, the Baltic Branch, 2002, ***CD*** with Booklet.
109. ***Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A., Prentkovskis O.V.*** *A New Software for Mathematical Package* ***Maple*** *of Releases* ***6, 7*** *and* ***8.-*** Vilnius: Vilnius Gediminas Technical University **&** International Academy of Noosphere, 2002, 404 p., ISBN 9985-9277-4-5, 9986-05-565-2.
110. ***Aladjev V.Z., Vaganov V.A.*** *Systems of Computer Algebra: A new software toolbox for* ***Maple.*** Tallinn: International Academy of Noosphere, 2003, 270 p. + CD.
111. ***Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A., Vaganov V.A.*** *Systems of Computer Algebra: A New Software Toolbox for* ***Maple.*** Second edition**.-** Tallinn: International Academy of Noosphere, the Baltic Branch, 2004, 462 p., ISBN 9985-9277-8-8.
112. ***Aladjev V.Z. Computer Algebra Systems:*** *A New Software Toolbox for* ***Maple.-*** Palo Alto: Fultus Corporation, 2004, 575 p., ISBN 1-59682-000-4.
113. ***Aladjev V.Z. Computer Algebra Systems:*** *A New Software Toolbox for* ***Maple.-*** Palo Alto: Fultus Corporation, 2004, Adobe Acrobat eBook, ISBN 1-59682-015-2.
114. ***Aladjev V.Z. et al.*** *Electronic Library of Books and Software for Scientists, Experts, Teachers and Students in Natural and Social Sciences*.**-** CA**:** Palo Alto**:** Fultus Corporation, 2005, ***CD.***
115. ***Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A. Maple:*** *Programming, Physical and Engineering Problems*. CA: Palo Alto, Fultus Corp., 2006, 404 p., ISBN 1-59682-080-2.
116. ***Аладьев В.З.*** Системы компьютерной алгебры. ***Maple:*** Искусство программирования.- Москва: Изд-во БИНОМ, 2006, 792 с., ISBN 5-93208-189-9.
117. ***Аладьев В.З.*** Основы программирования в ***Maple.-*** Таллинн: Международная Академия Ноосферы, 2006, ***(pdf),*** ISBN 9985-9508-1-X***, www.aladjev-maple.narod.ru.***
118. ***Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.*** Программирование и разработка приложений в ***Maple.-*** Гродно: ГрГУ, Таллинн: Международная Академия Ноосферы, 2007, 456 с.

119. ***Математическая энциклопедия*****.-** М.: Советская энциклопедия, т. ***1*****,** 1977, с. 50-52.
120. ***General Cellular Automata Subject Classification.- http://dynamics.bu.edu.***
121. ***Italian Cellular Automata Program.- inews-mailgate@bloom-beacon.mit.edu.***
122. ***www.sd-eudb.net*** **(***ввести* **«*International Academy of Noosphere*»** *in the full-search field***).**
123. ***Mathematical Problems in Biology*** **/** Ed. ***R. Bellman*****.-** N. Y.: Academic Press, 1962.
124. ***Von Neumann J.*** *Theory of Self-Reproducing Automata* **/** Ed. ***A.W. Burks*****.-** Urbana: University of Illinois Press, 1966, 324 p.
125. ***Codd E.F.*** *Cellular Automata***.-** New York**:** Academic Press, 1968, 120 p.
126. ***Zuse K.*** *Rechnender Raum***.-** Braunschweig: Friedrich Vieweg **&** Sohn, 1969, 115 p. [English translation**:** ***Calculating Space*****,** MIT Technical Translation ***AZT-70-164-GEMIT*****,** MIT ***(Proj. MAC)*****,** Cambridge, Mass. 02139, Feb. 1970].
127. ***Hedlund G.*** Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical Systems **//** Mathem. System Theory**,** ***3*****,** 1969, pp. 320-375.
128. ***Essays on Cellular Automata*** **/** Ed. ***A.W. Burks*****.-** Urbana: Univ. of Illinois Press, 1970.
129. ***Yamada H., Amoroso S.*** Tessellation Automata **//** Information and Control**,** ***14*****,** 1969.
130. ***Yamada H., Amoroso S.*** Structural and Behavioural Equivalence of Tessellation Automata **//** Information and Control**,** ***18*****,** 1971, pp. 1-31.
131. ***Smith A.R.*** *Cellular Automata Theory* **/** PhD Thesis.- Stanford: Stanford Univ., 1970.
132. ***Banks E.R.*** *Information Processing and Transmission in Cellular Automata* **/** PhD Thesis.- Massachusetts**:** MIT Press, 1971, 215 p.
133. ***Ostrand T.J.*** *Property Preservation by Tessellation Automata* **/** PhD Thesis.- New Jersey: The State University of New Jersey, 1972, 178 p.
134. ***Kitagawa T.*** Cell Space Approaches in Biomathematics **//** Math. Biosci., ***19*****,** 1974.
135. ***Studies on Cellular Automata*****.-** Tokyo: Research Institute of Electrical Comm., 1975.
136. ***Сметанич Я., Иваницкий Г.*** Модели развивающихся биологических объектов на основе ***L*****-**систем **//** Биофизика, ***XXII*****,** вып. ***5*****,** 1979, с. 55-97.
137. ***Wunsch G.*** *Zellulare Systeme***.-** Berlin**:** Akademie-Verlag, 1977, 317 p.
138. ***Vollmar R.*** *Algorithmen in Zellularautomaten***.-** Stuttgart: B.G. Teubner, 1979, 194 p.
139. ***Vollmar R.*** Some Remarks on Pipeline Processing by Cellular Automata **//** Comput. and Artificial Intelligence**,** ***6*****,** no. ***3*****,** 1987, pp. 263-278.
140. ***Блюмин С.Л.*** О проблеме конструирования линейными клеточными автоматами **//** Автоматика и телемеханика, ***№ 11*****,** 1981, с. 131-138.
141. ***Buttler J.*** Synthesis of One-Dimensional Binary Cellular Automata Systems from Composite Local Maps **//** Information and Control, ***43*****,** no. ***3*****,** 1979, pp. 42-54.
142. ***Buttler J.*** Decomposable Maps in General Tessellation Structures **//** Journal Comput. System Sciences**,** ***32*****,** 1979, pp. 120-137.
143. ***Wolfram S.*** Statistical Mechanics of Cellular Automata **//** Rev. Mod. Phys., ***55*****,** 1983.
144. ***Wolfram S.*** Universality and Complexity in Cellular Automata **//** Physica, ***100*****,** 1984.
145. ***Wolfram S.*** Computation Theory of Cellular Automata **//** Comm. Math. Phys., ***96*****,** 1984.
146. ***Preston K., Duff M.*** *Modern Cellular Automata***.-** London**:** Plenum Press, 1984.
147. ***Cellular Automata*** **/** Eds. ***T. Toffoli, S. Wolfram*****.-** Amsterdam**:** North-Holland, 1984.
148. ***Martin O.*** Algebraic Properties of Cellular Automata **//** Comm. Math. Phys., ***93*****,** 1984.
149. ***Theory and Applications of Cellular Automata*****.-** Singapure**:** Word Scientific, 1986.
150. ***Toffoli T., Margolus N.*** *Cellular Automata Machines***.-** Cambridge: MIT Press, 1987. [рус. пер.: Машины клеточных автоматов.- М.: Изд-во Мир, 1991, 278 с.].
151. ***Toffoli T.*** *Cellular Automata Machines as Physics Emulators***.-** Tricate: The International Center for Theoretical Physics, 1988, pp. 28-36.

152. ***Toffoli T.*** Cellular Automata and Mathematical Physics **/** Proc. 6^{th} Internat. Confer. on Mathem. and Comput. Modelling.- Sant-Louis, USA, 1987, pp. 163-167.
153. ***Gutowitz H.*** Local Structure Theory for Cellular Automata **//** Physica, ***280,*** 1987.
154. ***Willson S.*** Cellular Automata Can Generate Fractals **//** Discret. Appl. Math., ***8,*** 1984.
155. ***Haken H.*** *Synergetics: An Introduction***.-** Berlin-Heidelberg**:** Springer-Verlag, 1983.
156. ***Beitrage zur Theorie der Polyautomaten* /** Ed. ***R. Vollmar*.-** Braunschweig, 1982.
157. ***Cellular Automata and Modelling of Complex Physical Systems*.-** Les Houches, 1989.
158. ***Кудрявцев В. и др.*** Основы теории однородных структур.- М.: Наука, 1990, 290 с.
159. ***Garzon M.*** *Models of Massive Parallelism: Analysis of Cellular Automata and Neural Networks***.-** Berlin**:** Springer-Verlag, 1995, 272 p.
160. ***Cellular Automata* /** Eds. ***T. Toffoli, R. Vollmar*,** Report**, *108*,** Saarbrucken, 1995.
161. ***Adamatzky A.*** *Identification of Cellular Automata***.-** London**:** Taylor **&** Francis, 1994.
162. ***Automata, Languages and Development*.-** Amsterdam**:** North-Holland, 1976.
163. ***Rozenberg G.*** Bibliography of ***L***-Systems **//** Theoret. Comput. Sciences**, *5*,** no. ***1*,** 1977.
164. ***Bellman R.*** *Introduction to Artificial Intelligence***.-** San Francisco**:** Boyd**&**Fraser, 1978.
165. ***Margolus N. CAM-8:*** *A Computer Architecture Based on Cellular Automata***.-** Fields Institute Communications**, *6*,** 1996, pp. 167-187.
166. ***Информация в Internet*,** получаемая по ключевой фразе «***Cellular Automata***».**
167. ***Gaylord R., Nishidate K.*** *Modeling Nature: Cellular Automata Simulations with* ***Mathematica*.-** Berlin-Heidelberg-London**:** Springer, 1996, 234 p.
168. ***Reiter C.*** Life and Death on a Computer Screen.- Discover **(***August ***1984*),** pp. 81-83.
169. ***Legendi T.*** Cellprocessors in Computer Architecture **//** Comp. Linguist. and Comp. Languages**, *11*,** no. **2,** 1976, pp. 147-167.
170. ***Takacs D.*** A Maximum-Selector Design in ***CODD-ICRA*** Cellular Automata **//** Cybernetics, no. **7,** 1977, pp. 105-144.
171. ***Mathematical Research*.-** Band ***7 (1981), 25 (1985), 29 (1986), 48 (1988).-*** Berlin: Springer.
172. ***Gardner M.*** *Wheeles, Life and Other M athematical Amusements***.-** N.Y.: Freeman, 1983.
173. ***Achasova S., Bandman O., Markova V., Piskunov S.*** *Parallel Substitution Algorithms: Theory and Application***.-** Singapure**:** World Scientific, 1995, 190 p.
174. ***Brender R.*** *A Programming System for the Simulation of Cellular Spaces***.-** Ann Arbor: The University of Michigan, 1970, 180 p.
175. ***Cellprocessors and Cellalgorithms* /** Informatik-Skripten, **2.-** Braunschweig, 1981.
176. ***Каляев А.В.*** Однородные коммутационные регистровые структуры.- М.: Изд-во Советское Радио, 1978, 168 с.
177. ***Варшавский В.И. и др.*** Однородные структуры.- Москва: Изд-во Энергия, 1973.
178. ***Фрумкин М.А.*** Систолические вычисления.- Москва: Изд-во Наука, 1990.
179. ***Beitrage zur Theorie der Polyautomaten* /** Ed. ***R. Vollmar*,** Informatik-Skripten**, 2.-** Braunschweig, 1982, 324 p.
180. ***Мальцев А.И.*** Алгоритмы и рекурсивные функции.- Москва: Изд-во Наука, 1986.
181. ***Минский М.*** Вычисления и автоматы.- Москва: Изд-во Мир, 1971, 364 с.
182. ***Матевосян А.А.*** К вопросу об универсальном клеточном вероятностном автомате **//** Кибернетические системы, ***66.-*** Тбилиси, 1980, с. 14-24.
183. ***Адаматский А.*** Идентификация вероятностных клеточных автоматов **//** Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, ***3,*** 1991, с. 90-95.
184. ***Vollmar R.*** Cellular Spaces and Parallel Algorithms **//** Parallel Computers – Parallel Mathematics **/** Ed. ***M. Feilmeier.-*** Oxford**:** North-Holland Publ. Co., 1977.
185. ***Nishio H.*** A Classified Bibliography on Cellular Automata Theory **–** With Focus on Recent Japanese References **/** The 1^{st} Intern. Symp. on ***USAL*,** Tokyo, Japan, 1975.

186. ***Smith A.R.*** Introduction to and Survey of Polyautomata Theory **//**Automata, Languages, Development **/** Eds. ***A. Lindenmayer, G. Rozenberg.-*** Amsterdam, 1976.
187. ***Toffoli T.*** *Cellular Spaces* **–** *An Extensive Bibliography***.-** University of Michigan, 1976.
188. ***Zuse K.*** On Self-Reproducing Systems **//** Electron. Rechenanl**.,** ***9,*** 1967.
189. ***Адаматский А.*** Идентификация распределенного интеллекта **//** Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, ***5,*** 1993, с. 186-196.
190. ***Lieblein E.*** *A Theory of Patterns in Two-dimensional Tessellation Space* **/** PhD Thesis.- Pennsylvania**:** University of Pennsylvania, 1968, 218 p.
191. ***Gaiski D., Yamada H.*** A Busy Beaver Problem in Cellular Automata **/** Proc. of the ***1st*** Intern. Symp. on ***USAL.-*** Tokyo, 1975, pp. 171-184.
192. ***Rado T.*** On Non-computable Functions **//** Bell Systems Techn. J**.,** ***41,*** 1962, pp. 877-884.
193. ***Wegrzyn S., Gille J., Vidal P.*** A Model for Developmental Systems**:** Generating Word With an Operating System **//** Automatica**,** ***25,*** no. ***5,*** 1989, pp. 695-706.
194. ***Wegrzyn S., Gille J., Vidal P.*** A Model for Developmental Systems**:** Generating Word With an Operating System **//** Automatica**,** ***25,*** no. ***6,*** 1989, pp. 707-714.
195. ***Blishun A.*** The Generation of the Cellular Chain of Assigned Length **//** Technical Cybernetics**,** ***6,*** 1975, pp. 95-98.
196. ***Mazoyer J.*** An Overview of the Firing Squard Synchronization Problem **/** Lecture Notes in Computer Science, ***316.-*** Berlin**:** Springer-Verlag, 1988, pp. 82-94.
197. ***Барздинь Я.*** Проблема универсальности в теории растущих автоматов **/** Автореферат канд. дисс.- Москва: МГУ, 1965, 16 с.
198. ***Лукашевич И.*** Исследование ритмического поведения однородной ткани **/** Самообучающиеся автоматические системы.- Москва, 1966, с. 124-142.
199. ***Подколзин А.*** О сложности моделирования в однородных структурах **/** Проблемы кибернетики, вып. ***30.-*** Москва, 1975, с. 199-225.
200. ***Подколзин А.*** О поведениях однородных структурах **/** Проблемы кибернетики, вып. ***31.-*** Москва, 1976, с. 133-166.
201. ***Cellular Automata and Cooperative Phenomena*** **/** Eds. ***Goles E., Boccara N.-*** Kluwer**:** Academic Press, 1993, 348 p.
202. ***Parallel and Distributed Algorithms*** **/** Ed. ***Cosnard M.-*** Elsevier Science, 1989.
203. ***Gerhart M. et al.*** A Cellular Automata Model of Exitable Media **//** Physica, ***D46,*** 1990.
204. ***Hartman H., Tamayo P.*** Reversible Cellular Automata and Chemical Turbulence **//** Physica**,** ***D45,*** 1990, pp. 293-306.
205. ***Adamatzky A.*** Controllable Transmission of Information in Excitable Media **/** Advanced Materials for Optics and Electronics**,** ***5,*** 1995, pp. 1024-1048.
206. ***Batty M.*** Cities as Fractals**:** Simulating Growth and Form **//** Fractals and Chaos **/** Eds. ***A.J. Crilly et al.-*** Berlin-New York**:** Springer Verlag, 1991, pp. 43-69.
207. ***Batty M.*** Generating Urban Forms from Diffusive Growth **//** Environment and Planing, ***A, 23,*** 1991, pp. 511-544.
208. ***Bura S. et al.*** Multi-Agents Systems and the Dynamics of a Settlement System**.** Universite Paris IV, Equipe P.A.R.I.S., ***CNRS*** et Universite Paris ***I,*** 1994.
209. ***Coucelis H.*** Cellular Worlds**:** a Framework for Modelling Micro-Macro Dynamics **//** Environment and Planing**,** ***A, 17,*** 1985, pp. 585-596.
210. ***Deadman P. et al.*** Modeling Rural Residental Settlement with Cellular Automaton **//** Journal of Environmental Management**,** ***37,*** 1993, pp. 147-160.
211. ***Frankhauser P.*** Fractal Properties of Settlement Structures **/** Proc. of the ***1st*** Intern. Seminar of Structural Morphology.- Montpellier-La Grande Motte, September 1992.
212. ***Gutowitz H.*** Frequently Asked Questions About Cellular Automata.- Santa Fe Institute**:** MIT Press ALife, November 1994.

213. ***Itami R.*** Cellular World**:** Models for Dynamic Conception of Landscape **//** Landscape Architecture, July-August 1988, pp. 52-57.
214. ***Marcus M., Hess B.*** Isotropic Cellular Automaton for Modelling Excitable Media **//** Nature**, *347*,** September 1990, pp. 56-58.
215. ***Phipps M.*** Dynamical Behavior of Cellular Automata under the Constraint of Neighborhood Coherence **//** Geographical Analysis**, *21 (3)*,** 1989, pp. 187-215.
216. ***White R., Engelen G.*** Cellular Automata and Fractal Urban Form**:** A Cellular Modelling Approach to the Evolution of Urban Land Use Patterns **//** Environment and Planing, ***A*, *25*,** 1993, pp. 1175-1193.
217. ***White R., Engelen G.*** Urban Systems Dynamics and Cellular Automata**:** Fractal Structures Between Order and Chaos **/** Chaos, Solitons and Fractals, 1993.
218. ***Crutchfield J., Hanson J.*** Turbulent Pattern Bases for Cellular Automata.- Berkeley: Physics Department University of California, 1997, 34 p.
219. ***Guan P.*** Cellular Automaton Public-Key Cryptosystems **//** Complex Systems, ***1*,** 1987.
220. ***Ulam S.*** *A Collection of Mathematical Problems*.**-** N.Y.**:** Interscience Publisher, 1960.
221. ***Waksman A.*** A Model of Replication **//** JACM, ***16*,** no. ***1*,** 1969, pp. 122-134.
222. ***Winograd T.*** *A Simple Algorithm for Self-Replication* **/** MIT Project ***MAC*, *197*,** 1970.
223. ***Amoroso S., Cooper G.*** Tesselation Structures for Reproduction of Arbitrary Patterns **//** Journal of Comp. Sys. Sci., no. ***5*,** 1971, pp. 124-144.
224. ***Yaku T.*** The Constructability of a Configurations in a Cellular Automata **//** Journal of Comput. Systems Sciences, no. **7,** 1973, pp. 481-496.
225. ***Ulam S.*** On Some Mathematical Problems Connected with Patterns of Growth of Figures **//** Essays on Cellular Automata.- Urbana**:** Univ. of Illinois Press, 1970, pp. 219-231.
226. ***Энциклопедия кибернетики*.-** Киев: Украинская Советская Энциклопедия, 1975.
227. ***Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л.*** **А**лгебра, языки, программирование.- Киев: Изд-во Наукова Думка, 1978, 220 с.
228. ***Wagner E.G.*** Modular Computers**:** Graph Theory and Interconnection of Modules **/** ***IBM*** Research Report**, *RC 1414*,** 1966, 122 p.
229. ***Ferber R.G.-F.*** Raumliche und Zeitliche Regeimassigkeiten Zellularer Automaten.- Marburg**:** Philipps-Universitat Marburg, 1988, 114 p.
230. ***Studies on Polyautomata*.-** Tokyo**:** Research Institute of Electrical Commun., 1975.
231. ***Sears M.*** The Automorphisms of the Shift Dynamical Systems and Relatively Spaces **//** Mathemat. System Theory, no. ***5*,** 1971, pp. 228-231.
232. ***Golze U.*** *Endliche, Rationale und Recursive Zellulare Konfigurationen* **/** *Doctoral Dissertation*, Hannover**:** Technical University of Hannover, 1975, 247 p.
233. ***Dassow J.*** On Finite Properties of Biologically Motivated Languages **//** Rostocker Mathematical Kolloquium**, *4*,** 1977, pp. 69-84.
234. ***ACM Computing Survey:*** Parallel Processors and Processing**, *9*,** 1977.
235. ***Arbib M.*** Simple Self-reproducing Universal Automata **//** Information and Cont., ***9*,** 1966.
236. ***Baker R., Herman G. CELIA –*** A Cellular Linear Iterative Array Simulator **/** Proc. of the ***4th*** Conference on Applications of Simulation, New York, 1970, pp. 64-73.
237. ***Doman A.*** A Three-Dimensional Cellular Space **//** Acta Cybernetica**, *2*,** 1976.
238. ***New Concepts and Technologies in Parallel Information Processing*,** Leyden, 1975.
239. ***Gardner M.*** On Cellular Automata, Self-Reproduction, the Garden of Eden and the game ***«Life»*** **//** Scientific American, ***224*,** 1971, pp. 112-117.
240. ***Golze U.*** *Bibliographie uber Zellraume* **/** Unveroffentlichtes Manuskript, 1978, 48 p.
241. ***Golze U.*** *Schaltarten fur Parallele Programmschemata und Zellraume* **/** Habilitationsschrift, Technical University of Hannover, 1978, 146 p.

242. ***Laemmel A.*** General Purpose Cellular Computers **/** Computers and Automata, ed. ***J. Fox.*** Brooklyn, 1971, pp. 591-608.
243. ***Legendi T. INTERCELLAS –*** An Interactive Cellular Space Simulation Language **//** Acta Cybernetica**, *3*,** 1977, pp. 261-267.
244. ***Maruoka A., Kimura M.*** Completeness Problem of One-dimensional Binary Scope**-*3*** Tessellation Automata **//** J. of Comput. and Systems Sciences**, *9*,** 1974, pp. 31-47.
245. ***Maruoka A., Kimura M.*** Completeness Problem of Multidimensional Tessellation Automata **//** Information and Control**, *35*,** 1977, pp. 52-86.
246. ***Muller H.*** Selbsreproduktion in Zellularen Netzen **//** Jahrbuch Uberblicke Math., 1978.
247. ***Nakamura K.*** Asynchronous Cellular Automata and Their Computational Ability **//** Systems, Computers and Control**, *5*,** 1974, pp. 58-66.
248. ***Nasu M., Honda M.*** A Completeness Property of One-Dimensional Tessellation Automata **//** Journal of Computer and System Sciences**, *12*,** 1976, pp. 36-48.
249. ***Parkinson D.*** Technical Description of the Distributed Array Processor **/** ***ICL*** Document number ***AP*2,** London, 1976, 184 p.
250. ***Pecht J. SIBICA –*** Ein Interpreter zur Interaktiven Untersuchung Zellularen Automaten **/** Manuskript.- Braunschweig**:** TU Braunschweig, 1976, 86 p.
251. ***L-Systems* /** Eds. ***Rozenberg G. and Salomaa A.-*** Heidelberg-Berlin: Springer, 1974.
252. ***Seiferas J.*** Linear-Time Computation by Nondeterministic Multidimensional Iterative Arrays **//** ***SIAM*** Journal on Computing**, *6*,** 1977, pp. 487-504.
253. ***Vollmar R.*** On an Interpreter for the Simulation of Cellular Automata **/** ***IFAC*** Simposium on Discrete Systems**, *3*,** Riga, 1974, pp. 175-184.
254. ***Wang P., Grosky W.*** The Relation Between Uniformly Structured Tessellation Automata and Parallel Array Grammars **/** Proc. of Intern. Symp. on ***USAL*****,** Tokyo, 1975.
255. ***Wargalla L.*** A Very Extensive Bibliography on Cellular Automata and Random Fields **/** Manuskript.- Aachen**:** Aachen University, 1977, 124 p.
256. ***Yamada H., Amoroso S.*** A Completeness Problem for Pattern Generation in Tessellation Automata **//** Journal of Computer and System Sciences**, *4*,** 1970, pp. 137-176.
257. ***Колмогоров А.Н.*** Три подхода к понятию количества информации **//** Проблемы передачи информации**, *1*,** 1965, с. 3-11.
258. ***Щербаков Е.С.*** Обзор книги ***В.З. Аладьева*** «К теории однородных структур.- Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1972» **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., ***22, № 1,*** 1973.
259. ***Тиро А., Ревако В.*** Обзор книги ***В.З. Аладьева*** «К теории однородных структур.- Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1972» **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., **22, № 2,** 1973.
260. ***Машины Тьюринга и рекурсивные функции.-*** Москва: Изд-во Мир, 1972, 264 с.
261. ***Щербаков Е.С.*** О фигурных операциях параллельной подстановки и порождаемых ими унарных алгебрах **/** Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. ***10*****,** Ленинградский госуниверситет, 1974, с. 90-99.
262. ***Butler J., Ntafos S.*** The Vector String Descriptor as a Tool in the Analysis of Cellular Automata Systems **//** Mathemat. Biosciences**, *35*,** 1977, pp. 55-84.
263. ***Book of Abstracts* //** The ***6th*** Intern. Conf. on Mathem. Modelling, Sant-Louis, 1987.
264. ***Prusinkiewicz P., Hanan J.*** *Lindenmayer Systems*, *Fractals*, *and Plants*.**-** Berlin-London-Heidelberg**:** Springer-Verlag, 1992, 120 p.
265. ***Smith A.R.*** Cellular Automata and Formal Languages **/** Proceedings of the ***11th IEEE*** Conference on Switching and Automata Theory, 1972, pp. 86-92.
266. ***Brauer W.*** *Automaten Theorie*.**-** Stuttgart**:** B.G. Teubner, 1984 ***(****in Germany****).***
267. ***Адаматский А.И.*** О сложности идентификации клеточных автоматов **/** Автоматика и телемеханика**, *9*,** 1992, с. 160-171.

268. ***Toffoli T.*** Computational and Construction Universality of Reversible Cellular Automata **/** Tech. Rep. no. ***192.-*** The University of Michigan, 1976 **(***see also* **// *JCSS*, *15*, *1977*).**
269. ***Adamatzky A., Wuensche A.*** Nonconstructible Blocks in ***1D*** Cellular Automata**:** Minimal Generators and Natural Systems **//** Applied Mathemat. Comput**.**, ***3*,** 1996.
270. ***Amoroso S., Patt Y.*** Decision Procedure for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tessellation Structures **//** Journal of Comput. System Sci**.**, ***6*,** 1972, pp. 448-464.
271. ***Maruoka A., Kimura M.*** Condition for Injectivity of Global Maps for Tessellation Automata **//** Information and Control**,** ***32*,** 1976, pp. 158-164.
272. ***Sato T., Honda N.*** Certain Relations between Properties of Maps of Tessellation Automata **//** Journal of Comput. System Sciences**,** ***15*,** 1977, pp. 121-145.
273. ***Toffoli T., Margolus N.*** Invertible Cellular Automata**:** A Review **//** Physica ***D45*,** 1990.
274. ***Moore E.*** Machine Models of Self-reproduction **//** Proc. Symp. Appl. Math., ***14*,** 1962.
275. ***Myhill J.*** The Converse of ***Moore's*** Garden-of-Eden Theorem **//** Proc. Amer. Math. Soc**.,** ***14*,** no. ***4*,** 1963, pp. 685-686.
276. ***Икауниекс Э.*** Об информационных свойствах клеточных структур **//** Проблемы передачи информации, вып. ***6*, № *4*,** 1970, с. 57-64.
277. ***Kari J.*** *Decision Problems Concerning Cellular Automata***.-** Turku: University of Turku, 1990.
278. ***Дэвис М.*** Прикладной нестандартный анализ.- Москва: Изд-во Мир, 1980.
279. ***Wuensche A., Lesser M.*** *The Global Dynamics of Cellular Automata***.-** N.Y., 1992.
280. ***Voorhees B.*** *Computational Analysis of One-Dimensional Cellular Automata***.-** Singapore**:** World Scientific, 1996, 134 p.
281. ***Кудрявцев и др.*** Введение в теорию абстрактных автоматов.- М.:, Изд. МГУ, 1985.
282. ***Твердохлебов В.*** Логические эксперименты с автоматами.- Саратов: Изд. СГУ, 1988.
283. ***Takahashi S.*** Limiting behaviour of linear cellular automata **//** Proc. Japan Acad., ***63*, *A*,** 1987, pp. 182-185.
284. ***Shuling Sun.*** Dynamic Analysis of Linear Circlic Cellular Automata **//** Journal of China Univ. Sci. and Technology**,** ***17*,** no. ***2*,** 1987, pp. 219-227.
285. ***Demengeot J. et al.*** *Dynamic Systems and Cellular Automata***,** New-York, 1985.
286. ***Martin O. et al.*** *Algebraic Properties of Cellular Automata***.-** Princeton, 1983, 225 p.
287. ***Ibarra O., Jiang T.*** On One-way Cellular Arrays **//** Siam. J. Comput., ***16*,** no. ***6*,** 1987.
288. ***Thatcher J.*** *Universality in the von Neumann Cellular Model* **/** Tech. Rep., ***03105-30-T, ORA*.-** Michigan**:** University of Michigan, 1964, 56 p.
289. ***Hedetniemi S.*** Variants of ***Thatcher`s*** Algorithm for Constructing Pulsers **/** Tech. Rep. ***03.05-29-T, ORA*.-** Michigan**:** University of Michigan, 1964, 67 p.
290. ***Lee C.*** Synthesis of a Cellular Universal Machine Using the ***29-***state Model of von Neumann **/** Automata Theory Notes, Michigan**:** University of Michigan, 1964, pp. 84-99.
291. ***Codd E.*** Propagation, Computation and Construction in ***2-***dimensional Cellular Spaces **/** Tech. Rep., ***06921-1-T, ORA*.-** Michigan**:** University of Michigan, 1965, 87 p.
292. ***Amoroso S. et al.*** Theory of Iterative Machine Arrays with Some Applications **/** Tech. Report ***ECOM-3193*,** Fort MONMOUTH, N.J., 1969, 126 p.
293. ***Amoroso S., Cooper G.*** The Garden-of-Eden Theorem for Finite Configurations **//** Proc. Amer. Mathemat. Soc.**,** ***26*,** no. ***1*,** 1970, pp. 342-350.
294. ***Amoroso S., Cooper G.*** Tessellation Structures for Reproduction of Arbitrary Patterns **//** Journal of Comput. and System Sciences**,** ***5*,** 1971, pp. 131-141.
295. ***Holland J.*** Universal Embedding Spaces for Automata **/** Progress in Brain Research, vol. ***17*.-** New-York**:** Elsevier Publishing Comp., 1965, pp. 37-48.
296. ***Atrubin A.*** Iterative One-Dimensional Real-Time Multiplier **/** Term Paper for Applied Mathem.- Harvard**:** Harvard University, 1962, 28 p.

297. ***Fisher P.*** Generation of Primes by a One-dimensional Real-Time Iterative Arrays ***// JACM, 12,*** no. ***3,*** 1965, pp. 48-56.
298. ***Ostrand T.J.*** Pattern Reproduction in Tessellation Automata of Arbitrary Dimension.- Pennsylvania**:** University of Pennsylvania, 1971, 66 p.
299. ***Anderson P.*** Self-Reproducing Cellular Automata**,** ***RCA*** Corporation.- New Jersey**:** Cinnaminson, 1971, 34 p.
300. ***Huang J.*** A Universal Cellular Array ***// IEEE*** Trans. on Computers, ***C-20,*** no. ***3,*** 1971.
301. ***Балаховский И.*** О возможности моделирования простейших актов поведения дискретными однородными средами // Проблемы кибернетики, вып. ***5,*** 1962.
302. ***Чадеев В.М.*** Самовоспроизведение автоматов.- Москва: Изд-во Энергия, 1973.
303. ***Maruoka A., Kimura M.*** Decomposition Phenomenon in One-dimensional Scope***-3*** Tessellation Automata with Arbitrary Number of States // Information & Control, ***34,*** 1977.
304. ***Kubo T., Kimura M.*** On Completeness Problems of Tessellation Automata **/** Papers of Techn. Group on Automata and Languages, ***IECE,*** Japan ***AL PRL,*** 1972, pp. 72-79.
305. ***Richardson D.*** Tessellation with Local Transformations **//** J. Comp. Sys. Sci., ***6,*** 1972.
306. ***Leitsh A.*** Unsolvability of Nondeterministic Parallel Maps Induced by Nondeterministic Cellular Automata **//** Journal of Comput. System Sciences**,** ***12,*** 1976, pp. 1-5.
307. ***Bruckner L.*** On the Garden-of-Eden Problem for One-Dimensional Cellular Automata **//** Acta Cybernetica**,** ***4,*** 1979, pp. 89-97.
308. ***Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays.-*** N.J.: North-Holland,1988.
309. ***Buttler J., Ntafos S.*** The Vector String Descriptor as a Tool in the Analysis of Cellular Automata Systems **//** Mathematical Biosciences**,** ***35,*** 1977, pp. 55-84.
310. ***Yaku T.*** Inverse and Injectivity of Parallel Relations induced by Cellular Automata **//** Proc. Amer. Mathematical Society**,** ***58,*** 1976, pp. 216-220.
311. ***Nasu M.*** Local Maps Inducing Surjective Global Maps of One-dimensional Tessellation Automata **//** Mathematical System Theory**,** ***11,*** 1978, pp. 327-351.
312. ***Amoroso S., Guilfoyle R.*** Some Comments on Neighbourhood Size for Tessellation Automata **//** Information and Control**,** ***21,*** 1972, pp. 48-55.
313. ***Buttler J.*** A Note on Cellular Automata Simulations **//** Information and Control, ***3,*** 1974.
314. ***Burks A.W.*** On Backwards-Deterministic, Erasable and Garden-of-Eden Automata **/** Tech. Rept. No. ***012520-4-T.-*** Michigan**:** University of Michigan, 1971, 45 p.
315. ***Maruoka A. et al.*** Pattern Decomposition for Tessellation Automata ***// JCSS, 13,*** 1976.
316. ***Amoroso S., Epstein J.*** Indecomposable Parallel Maps in Tessellation Structures **/** Journal of Com. System Sciences**,** ***13,*** 1976, pp. 130-142.
317. ***Yaku T.*** Surjectivity of Nondeterministic Parallel Maps Induced by Nondeterministic Cellular Automata **//** Journal of Comput. System Sciences**,** ***12,*** 1976, pp. 1-5.
318. ***Toffoli T.*** Cellular Automata Mechanics **/** Tech. Rep. no. ***208.-*** Univ. of Michigan, 1977.
319. ***Nishio H., Kobuchi Y.*** Fault Tolerant Cellular Spaces **//** J. Comp. Sys. Sci., ***11,*** 1975.
320. ***Баринов В.В. и др.*** К проблеме ***Улама-Аладьева,*** в сборнике [***12***], с. 341-346.
321. ***Morita K. et al.*** A ***1-***Tape ***2-***Symbol Reversible Turing Machine **//** Trans. of the ***IEICE, E72,*** no**.** ***3,*** 1989, pp. 223-228.
322. ***Morita K. et al.*** Computation Universality of One-Dimensional Reversible Cellular Automata **//** Trans. of the ***IEICE, E72,*** no**.** ***6,*** 1989, pp. 758-762.
323. ***Яблонский С.В.*** Функциональные построения в ***K-***значной логике **//** Труды математического ин-та АН СССР.- М., 1958, с. 5-142.
324. ***Боднарчук В., Цейтлин Г.*** Об алгебрах периодически определенных преобразований бесконечного регистра **//** Кибернетика, ***1,*** Киев, 1969, с. 38-44.

325. ***Tseitlin G.E.*** Formalization of Synchronous Parallel Processing by Heterogeneous Periodically Defined Transformations **//** Trans. Institute of Cybernetics, Kiev, 1982.
326. ***Жегалкин И.И.*** Арифметизация символической логики **//** Матем. сб. Московского математического общества, ***36,*** вып. ***3 – 4,*** 1929.
327. ***Мальцев А.И.*** Итеративные алгебры Поста.- Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
328. ***Виноградов И.М.*** Основы теории чисел.- Москва: Изд-во Наука, 1981, 214 с.
329. ***Adamatzky A.*** Simulation of Inflorescence Growth in Cellular Automata **//** Chaos, Solitons & Fractals**, 7,** no**. 7,** pp. 1065-1094.
330. ***Apter M.*** A Formal Model of Biological Development **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., **22, № 3,** 1973.
331. ***Towards a Theoretical Biology /*** Ed. ***C. Waddington, 1-4.-*** Edinburgh: Univ. Press, 1970.
332. ***Baianu I.*** Computer Models and Automata Theory in Biology and Medicine **//** Mathematical Modelling, no**. 7,** 1986, pp. 1513-1577.
333. ***Biomathematics:*** *Extended Survey of the Books and Reports***.-** Berlin: Springer, 1989.
334. ***Hopenstead F., Peskin C.*** *Mathematics in Medicine and Life Sciences***.-** Berlin: Springer, 1994.
335. ***Peitgen H. et al.*** *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science***.-** N.Y.: Springer, 1992.
336. ***Rozenberg G.*** Bibliography of ***L***-Systems **//** Theor. and Comput. Sci.**, *1,*** no. ***5,*** 1977.
337. ***Lindenmayer A., Culik K.*** Growing Cellular Systems **//** Intern. J. Gen. Sys., 1981.
338. ***Lindenmayer A.*** Developmental Algorithms for Multicellular Organisms**:** A Survey of ***L***-Systems **//** Journal of Theoret. Biology**, *54,*** 1975, pp. 3-22.
339. ***Laing R.*** Automation Introspection **//** J. Comp. System Sci.**, *13,*** 1976, pp. 206-218.
340. ***Laing R.*** Artificial Molecular Machines **/** The ***1st*** Intern. Symp. on ***USAL,*** Tokyo, 1975.
341. ***Laing R.*** Formalisms for Living Systems **/** Techn. Rept. ***N-08226-8-T,*** Michigan, 1969.
342. ***Herman G.*** On Universal Computer-Constructors **//** Inf. Proc. Letters, ***2,*** 1973, pp. 73-76.
343. ***Wigner E.P.*** The Probability of the Existence of a Self-Reproducing Units **/** The Logic of Personal Knowledge.- London, 1961, pp. 124-139.
344. ***Richardson D.*** Continuous Self-Reproduction **//** J. Comp. Sys. Sci., ***12,*** no. ***1,*** 1976.
345. ***Аптер М.*** Кибернетика и развитие.- Москва: Изд-во Мир, 1970, 214 с.
346. ***Luck H., Luck J.*** Automata Theoretical Explanation of Tissue Growth **/** Proc. Intern. Symp. on Mathematical Topics in Biology, Japan, Kyoto, 1978, pp. 174-185.
347. ***Rose S.*** Cellular Interaction during Differentiation **//** Biol. Rev.**, *32,*** 1958, pp. 351-382.
348. ***Wolpert L.*** Cell Position and Cell Lineage in Pattern Formation and Regulation **//** Stem Cells and Tissue Homeostasis, Cambridge University Press, 1978, pp. 29-47.
349. ***Waddington C.*** *New Patterns in Genetics and Development***.-** Columbia Press, 1962.
350. ***Le Hoi.*** On Machines as Living Things **//** Acta Cybernetica**, *111/4,*** 1978, pp. 281-285.
351. ***Tsanev R., Sendov B.*** Possible Molecular Mechanisms for Cell Differentiation in Multicellular Organisms **//** Journal of Theoretical Biology**, *30,*** 1971, pp. 337-393.
352. ***SuperComputing EUROPE /*** European Exhibitions and Conf. on Supercomputing.- London**:** London University Computer Centre.
353. ***Euro-Par`96 – Parallel Processing /*** Ed. ***L. Bouge.-*** Lyon**:** Springer-Verlag, 1996.
354. ***Neural Computers /*** Ed. ***R. Eckmiller.-*** Heidelberg**:** Springer-Verlag, 1988, 280 p.
355. ***Organizational Change, Evolution, Structuring and Awareness //*** Esprit Project Report **/** Ed. ***N. Guimaraes.-*** Lisboa**:** Springer-Verlag, 1997, 285 p.
356. ***Vector and Parallel Processing /*** Proc. of the ***3rd*** Intern. Conf.- Porto, 1998.
357. ***Applied Parallel Computing /*** Ed. ***K. Madsen.-*** Berlin: Springer-Verlag, 1996, 722 p.
358. ***Grandall R.*** *Projects in Scientific Computations*.- N.Y.-Berlin**:** Springer, 1994, 546 p.
359. ***Esprit 95/96:*** Research Reports ***Esprit.-*** The Netherlands**:** Springer-Verlag, 1996.

360. ***The Second Conference on Cellular Automata for Research and Industry*** **/** Ed. ***S. Bandini*****.-** Milan**:** Springer-Verlag, 1997, 197 p.
361. ***Computer Architecture-97*** **/** Ed. ***R. Pose*****.-** Clayton**:** Springer-Verlag, 1997, 300 p.
362. ***The International Conference on High-Performance Computing and Networking*****.-** Brussels**:** Palais des Congress, 1996, 356 p.
363. ***High-Performance Computing and Networking*** **/** Ed. ***P. Slot.-*** Amsterdam, 1997.
364. ***Journal of Artificial Life and Robotics*****.-** Tokyo**:** Springer-Verlag.
365. ***Hramkovic J.*** *Communication Complexity and Parallel Computing***.-** Kiel: Verlag, 1997.
366. ***Sipper M.*** *Evolution of Parallel Cellular Machines***.-** Lausanne: Springer, 1997, 199 p.
367. ***Applied Parallel Computing Industrial Computation and Optimization*** **/** Ed. ***K. Mad sen*****.-** Lyngby**:** Springer-Verlag**,** 1996, 722 p.
368. ***Current Contents:*** Engineering, Computing **&** Technology.- Philadelphia: ***ISI,*** 1996.
369. ***Jan van Leeuwen.*** *Computer Science Today***.-** Heidelberg**:** Springer-Verlag, 1996.
370. ***Gruska J.*** Synthesis, Structure and Power of Systolic Computations **//** Journal of Theor. Comp. Sciences**,** ***71,*** 1990, pp. 47-77.
371. ***Computer Science:*** Books-Journals-Electronic Media.- Berlin**:** Springer-Verlag.
372. ***Shields M.*** *The Semantics of Parallelism***.-** London**:** Springer-Verlag, 1997, 500 p.
373. ***Trends in Parallel and Supercomputing*****.-** Amsterdam**:** North-Holland, 1988.
374. ***Computational Systems:*** Natural and Artificial **/** Ed. ***H. Haken.-*** N.Y.: Springer, 1987.
375. ***Glushkov V., Letichevskii A.*** A Theory of Algorithms and Discrete Processors **//** Advanced in Information Systems Science**,** vol. ***1,*** New-York, 1969, pp. 123-139.
376. ***Toffoli T. CAM:*** A High-Performance Cellular-Automaton Machine **//** Physica ***10D,*** 1984.
377. ***Computer Design,*** **27,** no. **20,** 1988 **(***см. также все последующие выпуски***).**
378. ***Toffoli T.*** Cellular Automata as an Alternative to **(***rather than an approximation of***)** Differential Equations in Modelling Physics **//** Physica ***10D,*** 1984, pp. 117-127.
379. ***Hardy J. et al.*** Molecular Dynamics of a Classical Lattice-Gas **//** Phys. Rev. ***A13,*** 1976.
380. ***Касами Т.*** Теория кодирования.- Москва: Изд-во Мир, 1978, 620 с.
381. ***Каляев А.*** Построение однородных управляющих структур адаптивных автономных роботов **//** Микропроцессорные средства и системы, ***4,*** 1985, с. 68-78.
382. ***Arbib M., Amari S.*** *Dynamic Interaction in Neural Networks***.-** N.Y.: Springer, 1988.
383. ***Proceedings*** of the ***7th*** Inern. Conf. on Math. and Comp. Modelling, Chicago, 1989.
384. ***Aiello G. et al.*** A Parallel Processor for Simulation of ***Izing*** Spin Systems **//** Computer Physics Communications**,** ***56,*** 1989, pp. 141-146.
385. ***Tobler W.*** Cellular Geography **//** Philosophy in Geography.- Dodrecht: D Reidel, 1979.
386. ***Vichniac G.*** Simulating Physics with Cellular Automata **//** Physica ***10D,*** 1984, pp. 96-115.
387. ***Creutz M.*** Deterministic Izing Dynamics **//** Annals of Physics**,** ***167,*** 1986, pp. 62-76.
388. ***Margolus N.*** Physics-Like Models of Computation **//** Physica ***10D,*** 1984, p. 81-95.
389. ***Гинзбург С.*** Математическая теория контекстно-свободных языков.- М.: Мир, 1970.
390. ***Гросс М., Лантен А.*** Теория формальных грамматик.- Москва: Изд-во Мир, 1971.
391. ***Packard N., Wolfram S.*** Two-Dimensional Cellular Automata **//** J. Stat. Phys.**,** ***38,*** 1989**.**
392. ***Hayes B.*** Cellular Automaton Offers a Model of World **//** Sci. Amer.**,** ***250,*** no. ***3,*** 1984.
393. ***Pomeau Y.*** Invariant in Cellular Automata **//** Journal of Physics**,** ***3,*** 1983, pp. 478-489.
394. ***Tucker J. CAM:*** The Ultimata Parallel Computer **//** High Technology**,** ***4, (6),*** 1984.
395. ***Kobuchi Y.*** A Note on Symmetrical Cellular Spaces **//** Inf. Proc. Letters**,** ***23,*** 1987.
396. ***Nasu M.*** Maps of ***1-***Dimensional Tesselation Automata and Homomorphisms of Graphs **/** The ***5th*** IBM Symp. on Mathem. Foundat. of Comput. Sciences, IBM Japan, 1980.
397. ***Barca D. et al.*** Cellular automata for simulation lava flows: A method and examples of the Ethean eruptions **//** Transp. Theory and Statist. Phys., ***23 (1-3),*** pp. 195-232, 1994.

398. ***Ishihara K. et al.*** Numerical simulation of lava flows some volcanoes in Japan **/** Proc. in Volcanology. Vol. **2,** ed. by ***J. Fink*.-** Tokyo: Springer-Verlag, 1989.
399. ***Avolio M., Gregorio S.*** A cellular «Blocks» model for large surface flows and applications to lava flows **//** ***ACRI-2004, LNCS 3305***.- Berlin: Springer-Verlag, 2004, pp. 415-434.
400. ***Coppola L. et al.*** Simulation of restricted self-diffusion **//** Molecular Simulation, vol. **7,** Gordon and Breach Science Publishers S.A., 1991, pp. 241-247.
401. ***Gregorio S. et al.*** Mount Ontake landslide simulation by the cellular automata model ***SCIDDICA-3 //*** Phys. Chem. Earch ***(A),*** vol. **24,** no. **2,** 1999, pp. 131-137.
402. ***Gregorio S. et al.*** Applying cellular automata to complex environmental problems: The simulation of the bioremediation of contaminated soils **//** Theoretical Computer Science, ***217,*** 1999, pp. 131-156.
403. ***Systolic Parallel Processing // APC*** Volume **5,** 1993, 712 p.
404. ***Peitgen H. et al.*** *Fractals in the Fundamental and Applied Sciences***.-** Berlin: Springer-Verlag, 1991, 462 p.
405. ***Pickover C.A.*** *Chaos and Fractals***.-** Berlin: Springer-Verlag, 1998, 468 p.
406. ***Цейтлин Г.Е.*** Некоторые вопросы теории многомерных периодически определенных преобразований на однородных структурах **/** Труды ***4-***й Всес. конф. по однородным вычислительным системам и средам.- Киев, 1975, 229-231.
407. ***Wolfram S.*** *A New Kind of Science***.-** N.Y.: Wolfram Media, 2002, ISBN 1-57955-008-8.
408. ***Астафьев Г.Б. и др.*** Клеточные автоматы.- Саратов: Центр «Колледж»**,** 2003, 23 с.
409. ***Rennard J.-P.*** Implementation of logical functions in the game «***Life***» **//** Collision Based Computing. Ed. by ***A. Adamatzky,*** Springer, 2002, pp. 419-512.
410. ***Cannataro M. et al.*** A parallel cellular automata environment on multicomputers for computational science **//** Parallel Computing, ***21*** (1995), pp. 803-823.
411. ***S. Di Gregorio et al.*** High performance scientific computing by a parallel cellular environment **//** Future Generation Computer Systems, ***12*** (1997), pp. 357-369.
412. ***Britti V. et al.*** A cellular model for soil erosion by rainfall **//** ***ISCS-99,*** Roma, 1999.
413. ***S. Di Gregorio et al.*** A microscopic freeway traffic simulator on a highly parallel system **//** Parallel Computing: State-of-the Art and Perspectives.- Amsterdam: Elsevier, 1996.
414. ***S. Di Gregorio et al. SCIDDICA-3:*** A cellular automata model for landslide simulation **/** Advances in Intelligent Systems. Ed by ***F.C. Morabito***, IOS Press, 1997, pp. 324-330.
415. ***Bellman R. et al.*** Mathematics in medicine**:** Tumor detection, Radiation dosimetry, and Simulation in psychotherapy, in [**2**], pp. 282-314.
416. ***Akishin P.G. et al.*** Simulation of earthquakes with cellular automata **//** Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. **2,** no. **4,** 1999.
417. ***Королев Л.Н.*** О задачах системного программирования в нечисловой обработке **/** Современные проблемы прикладной математики и матфизики.- М.: Наука, 1988.
418. ***Wolf-Gladrow D.A.*** Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models.- Berlin**:** Springer-Verlag, 2000, 308 p.
419. ***Rocha L.M.*** Evolutionary Systems and Artificial Life.- Los Alamos: Los Alamos National Laboratory, Lecture Notes**,** ***NM 87545,*** 1997.
420. ***Preston K.*** Cellular Automata **/** Encyclopedia of Physical Science and Technology, vol**.** ***1,*** Academic Press, 1987, pp. 17-34.
421. ***Demongeol J., Tchuente M.*** Cellular Automata and Dynamic Systems **//** Encyclopedia of Physical Science and Technology, vol**.** ***1,*** Academic Press, 1987, pp. 35-44.
422. ***Ванаг В.К.*** Исследование пространственно распределенных динамических систем методами вероятностного клеточного автомата **//** УФН, т. ***169, № 5*** (1999), с. 481-505.
423. ***Zuse K.*** Rechnender Raum, Elektronische Datenverarbeitung, vol. ***8,*** p.p. 336-344, 1967.
424. ***Parallel Algorithms and Applications /*** Ed. ***G. Megson,*** University of Reading, U.K., 1999.

425. ***Green D.G.*** *Cellular Automata* **/** Preprint.- Australia: Charles Sturt University, 1993.
426. ***Lilly H.A.*** The use of cellular automata in the classroom **/** Proc. of the ***ACM/IEEE*** Conf. on Supercomputing, San Diego, California, 1995.
427. ***http://citeseer.ist.psu.edu/93693.html***
428. ***Spezzano G., Talia D. CARPET:*** A programming language for parallel cellular processing **/** Proc. European School on Parallel Programming Environments, ***96,*** France, 1996.
429. ***Rendell P.*** A Turing Machine in ***Conway's*** Game Life**.-** Полное изложение работы находится на сайте ***http://www.cs.ualberta.ca/~bulitko/F02/papers/tm_words.pdf.***
430. ***Toffoli T., Margolus M.*** The ***CAM-7*** Multiprocessor**:** *A Cellular Automata Machine* **/** Tech. Memo ***LCS-TM-289,*** MIT Lab. for Comp. Sci., 1985.
431. ***Schrandt R., Ulam S.*** On Patterns of Growth of Figures in Two Dimensions **//** Notices of the American Mathematical Society, ***7,*** p. 642, 1960.
432. ***Holladay J., Ulam S.*** On Some Combinatorial Problems in Pattern of Growth **//** Notices of the American Mathematical Society, ***7,*** p. 234, 1960.
433. ***Schrandt R., Ulam S.*** On recursively defined geometrical objects and patterns of growth, in the collection [***128***], pp. 232-243.
434. ***Ulam S.*** On some mathematical problems connected with pattern of growth of figures **/** Proc. of Symp. in Applied Mathematics, ***14,*** pp. 215-224, 1962 ***(****also in* [***128***], p. 219***).***
435. ***Renz W. et al.*** Interactive visualization of three-dimensional cellular automata **//** Computers in Physics, ***8,*** no. ***5,*** September 1994, p. 550.
436. ***Eckart D.*** Cellular automata simulation system, ver. ***2 / SIGPLAN*** notices, ***27***(***8***)**:*99,*** 1992.
437. ***StarLogo.*** Logo Computer Systems Inc., N. Y., 1999
438. ***Seutter F. CEPROL:*** A cellular programming language **//** Parallel Comp., ***2,*** 1985.
439. ***Hasselbring W. CELIP:*** A cellular language for imaging processing **//** Parallel Comp., ***14,*** 1990, pp. 99-109.
440. ***Mou Z. CAL:*** A cellular automata language **//** Proc. of the ***27th*** Conf. on Parallel Processing for Scientific Computing, ***SIAM*** Press, 1995, pp. 722-727.
441. ***Мазуренко В.И., Основина Л.В.*** Основные результаты научной активности ***ТТГ*** по параллельной обработке и параллельным алгоритмам ***(1979-1982),*** в [***12***], с. 347-357.
442. ***Parallel Processing and Parallel Algorithms – Survey*** **/** Ed. ***V. Z. Aladjev.-*** Tallinn: Estonian Branch of the ***VGPTI,*** 1983, 255 p.
443. ***Encyclopaedia of Mathematics,*** vol. ***1.-*** London: Kluwer Academic, 1988, pp. 300-301.
444. ***Bays C.*** A new game of three-dimensional Life **//** Complex Systems, ***5, 1,*** 1991, pp. 15-18.
445. ***Baranoff S.*** Cellular automata on a personal computer **/** Proc.of ***EuroForth-92*** Conf., Southampton, UK, October 1992, pp. 79-80.
446. ***Luciano R. da Silva L. and et al.*** Simulations of Mixtures of Two Boolean Cellular Automata Rules **//** Complex Systems, ***2,*** 1988, pp. 29-37.
447. ***Ladd S. C++*** Simulations and Cellular Automata.- Book and Disk., M and T Books, 1995.
448. ***Wojtowicz M. 1D*** and ***2D*** cellular automata explorer**,** ***http://psoup.math.wisc.edu/mcell/.***
449. ***Rucker R., Walker J. CelLab.- http://www.fourmilab.ch/cellab/.***
450. ***Maydwell G.*** The super animation-reduction cellular automata simulator ***(SARCASim).- http://www.collidoscope.com/ca/***
451. ***Francis E.*** Cellular automata simulation engine**.-** ***www.alcyone.com/software/cage/.***
452. ***Hiebeler D.*** A brief eview of ***CA*** packages **//** Physica ***D45,*** p. 463, 1990.
453. ***Myczkowski J.*** Parallel programming for cellular automata **//** Cellular Automata and Modeling of Compl. Phys. Syst. **/** Eds. ***P. Manneville et al.-*** Berlin: Springer-Verlag, 1989.
454. ***Hansen P.*** Parallel cellular automata**:** *A model program for computational science* **//** Concurency**:** Practice and Experience, ***5,*** no. ***5,*** 1993, pp. 425-448.

455. ***Wuensche A.*** *Attractor Basins of Discrete Networks* **/** Cognitive Science Research Paper, ***461,*** PhD Thesis.- Sussex: University of Sussex, 1997.
456. ***Wuensche A.*** Classifying of Cellular Automata Automatically **/** Tech. Report ***98-02-018,*** Santa Fe Institute, 1998.
457. ***Wegner T., Tyler B.*** *Fractal Creations*. Second edition**.-** Waite Group Press, 1993 **(***see also* ***http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html)***
458. ***Rudolf L.*** *Computer modeling and computational paradigm* **/** Fundamentals in Complex Systems.- Boston: New England Complex Systems Institute, October 1999.
459. ***Stiles P., Glickstein I.*** Highly Parallelizable Route Planner Based on Cellular Automata Algorithms **//** ***IBM*** Journal of Research and Development, ***38,*** no. ***2,*** p. 167, March 1994.
460. ***The NAG Parallel Library /*** Technical Report**.-** Oxford: NAG Ltd., 1999.
461. ***Algorithms for Parallel Processing /*** Eds. ***M. Heath et al.-*** Berlin: Verlag, 1999, 366 p.
462. ***Roosta S.*** *Parallel Processing and Parallel Algorithms***.-** Heidelberg: Verlag, 1999, 550 p.
463. ***The International Workshop on Parallel Processing by Cellular Automata /*** Central Institute of cybernetics and informationprocesses of Academy of Sciences of GDR, Research Group of Automata Theory of Hungarian Academy of Sciences, Berlin, 1982.
464. ***Proceedings of the 2nd Internation. Workshop on Parallel Processing by CA and Arrays (PARCELLA-84) /*** Eds. ***G. Wolf et al.-*** Berlin: Akademie-Verlag, 1984.
465. ***Proceedings of the 3rd International. Workshop on PARCELLA-86 /*** Eds. ***G. Wolf et al.-*** Amsterdam: North-Holland, September 9-11, 1986.
466. ***Proceedings of the 4th International. Workshop on PARCELLA-88 /*** Eds. ***G. Wolf et al., LNCS 342.-*** Amsterdam: North-Holland, 1988.
467. ***Proceedings of the 5th International Workshop on PARCELLA-90 /*** Eds. ***G. Wolf et al.-*** Berlin: Akademie-Verlag, September 17-21, 1990.
468. ***Hemmerling A.*** On the power of cellular parallelism, in the Proceedings [***465***].
469. ***Spirakis P.*** Fast parallel algorithms and the complexity of parallelism, in the Proc. [***466***].
470. ***Parallel Problem Solving from Nature /*** Eds. ***Manner R., Manderick B.-*** Brussels, 1992.
471. ***High Performance Computing in Science and Engineering /*** Eds. ***E. Krause, W. Jäger.-*** Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1999, 500 p.
472. ***High-Performance Computing and Networking /*** Proc. of the ***7th*** Intern. Conf. HPCN Europe **/** Eds. ***R. Sloot et al.-*** Amsterdam: Springer-Verlag, 1999, 1318 p.
473. ***High Performance Computing /*** Proc. of the ***2nd*** Intern. Symp.- Kyoto, 1999, 408 p.
474. ***Handbook on Parallel and Distributed Processing /*** Eds. ***J. Blazewicz et al.-*** Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1999, 635 p.
475. ***Lucquin B., Pironneau O.*** *Introdiction to Scientific Computing***.-** London: John Wiley, 1998.
476. ***Parallel Computations /*** Eds. ***R. Zinterhof et al, 4th*** Intern. ***ACPC*** Conf.- Salzburg, 1999.
477. ***Computer Science /*** Newsletter.- Berlin-New York: Springer-Verlag, 1985-2007.
478. ***Jorrand Ph.*** Term Rewriting as a Basis for the Design of a Functional and Parallel Programming Language **/** Lect. Notes Comput. Sciences, ***232*** (1986).
479. ***Parallel Symbolic Languages and Systems /*** Ed. ***T. Ito.-*** Paris: Springer, 1996.
480. ***The 2nd Intern. Conf. on Massivelly Parallel Computing Systems***, Ischia, 1996.
481. ***Milne G. et al.*** Realising massively concurrent systems on the ***SPACE*** machine **/** Proc. of ***IEEE*** Workshop on ***FPGAs*** for Custom Comp. Machines, pp. 26-32, Napa, CA, 1993.
482. ***Genetic Programming /*** Eds. ***R. Poli et al.,*** proc. of the ***2nd*** European Workshop.- Berlin: Springer-Verlag, 1999, 283 p.
483. ***Miller M. et al.*** Representing and computing regular languages on massively parallel networks **//** ***IEEE*** Transactions on Neural Networks, ***2***(***1***)**:** 56-72, 1991.

484. ***Wuensche A. DDLab*** manual: Cellular Automata **–** Random Boolean Networks.- Discrete Dynamics Lab., Santa Fe Institute, 1996, 60 p.
485. ***Hillis W.*** The connection machine: A computer architecture based on cellular automata **//** Physica, ***10D,*** 1984, pp.213-228.
486. ***Allinson N., Sales M. CART –*** A cellular automata research tool **//** Microprocessors and microsystems, ***16***(***8***)**:** ***4093***, 1992.
487. ***Boghosian B.*** Cellular automata simulation of two-phase flow on the ***CM-2*** connection machine computer **//** Supercomputing**,** Vol. ***II:*** Science and Applications, 1989, pp. 34-44.
488. ***Bouazza K. et al.*** Experimental cellular automata on the ***ArMen*** machine **/** Proc. of the Workshop on Algorithms and Parallel ***VLSI*** Architectures ***II,*** France, 1991, pp. 317-322.
489. ***Carrera J. et al.*** Architecture of a ***FPGA-***based coprocessor: The ***PAR-1 /*** Proc. of ***IEEE*** Workshop on ***FPGAs*** for Custom Computing Machines, Napa, April 1995, pp. 20-29.
490. ***Chowdhury D. et al.*** Cellular automata based synthesis of easily and fully testable FSMs **/** Proc. of the ***IEEE/ACM*** Intern. Conf. on Computer-Aided Design, November 1993.
491. ***Drayer T. et al. MORRPH:*** A Modular and reprogrammble real-time processing hardware **/** Proc. of ***IEEE*** Workshop on ***FPGAs*** for Custom Comp. Machines, Napa, 1995.
492. ***Eckart J.*** A parallel extendible scalable cellular automata machine: ***PE-SCAM /*** Proc. of the Conf. on Computer Science, ACM Press, March 1992, pp. 467-472.
493. ***Cellular Automata /*** Eds. ***Farmer J. et al.-*** Amsterdam: North-Holland, 1984.
494. ***Marriott A. et al. VLSI*** implementation of smart imaging system using two-dimensional cellular automata **// IEEE** Proc., **G,** Circuits, Devices and Syst., ***138***(***5***)**:*582,*** October 1991.
495. ***Pries W. et al.*** Group properties of cellular automata and ***VLSI*** applications **/** ***T- COMP, 35,*** 1986, pp. 1013-1024.
496. ***http://liinwww.ira.uka.de/bibliography/Parallel/cellular.automata.html.***
497. ***Hunt U.J.,*** Some Methods of Calculation of Carrying Capacity of the Railways of Baltic Region **/** Proc. Intern. Conf. ***TRANSBALTICA-99,*** April 1999, Vilnius, pp. 392-398.
498. ***Dupuis A., Chopard B.*** Parallel simulation of traffic in Geneva using cellular automata **//** Parallel and Distributed Computing Practices Journal, ***3,*** 1999.
499. ***Chowdhury D., Schadschneider A.*** Self-organization of traffic jams in cities**:** Effects of stochastic dynamics and signal periods **//** Physical Review ***E,*** vol. ***59,*** 1999.
500. ***Traffic and Mobility: Simulation-Economics-Environment /*** Eds. ***W. Brilon et al.-*** Berlin-Heldelberg: Springer-Verlag, 1999, 450 p.
501. ***Environment and planning, A, 22*** (1990), ***23*** (1991), pp. 511-544, ***25*** (1993), p. 75.
502. ***Green D. et al.*** A generic approach to landscape modelling **//** Mathematics and Computers in Simulation, ***32,*** 1990.
503. ***Kirley M. et al.*** Investigation of a cellular genetic algorithm that mimics evolution in a landscape **/** Proc. of the ***2nd*** Conf. on Simulated evolution and Learning **/** Eds. ***Xin Yao et al.-*** Canberra: University of New South Wales, 1998, pp. 93-100.
504. ***Parisi D.*** A Cellular Automata Model of the Expansion of the Assyrian Empire in [***360***].
505. ***Hogeweg P.*** Cellular automata as a paradigm for ecological modeling **//** Applied Mathematics and Computation, **27,** 1988, pp. 81-100.
506. ***Silvertown J. et al.*** Cellular automaton models of interspecific competition for space **–** the effect of pattern on process **//** Journal of Ecology, ***80,*** 1992, pp. 527-534.
507. ***Colasanti R., Grime J.*** Resource dynamics and vegetation processes: a deterministic model using two-dimensional cellular automata **//** Functional Ecology, **7, 2,** 1993, p. 169.
508. ***Green D. et al.*** Simulating spatial patterns in forest ecosystems **//** Mathematics and Computers in Simulation, **27,** 1985, pp. 191-198.
509. ***Green D.*** Cellular automata models of crown-of-thorns outbreaks **//** Acanthaster and the Coral Reef **/** Lecture Notes in Biomathematics, ***88.-*** Berlin: Springer-Verlag, 1990.

510. ***Huberman B., Glance N.*** Evolutionary games and computer simulations **//** Proc. of the National Academy of Sciences, USA, ***90,*** 1993, pp. 7716-7718.
511. ***Nowak M., May R.*** Evolutionary games and spatial chaos **//** Nature, ***359,*** 1992.
512. ***Satoh K.*** Computer experiment on the complex behavior of a two-dimensional cellular automaton as a phenomenological model for an ecosystem **//** ***JPSJ, 58,*** no. ***10,*** 1989.
513. ***Satoh K.*** Single and multiarmed spiral patterns in a cellular automata model for an ecosystem **//** Journal of the Physical Society of Japan ***(JPSJ), 59,*** no. ***12,*** 1990, pp. 4204-4207.
514. ***Bradbury R. et al.*** The idea of complexity in ecology **//** Senckenbergiana maritima ***27, (3/6),*** 1996, pp. 89-96.
515. ***Bhargava S. et al.*** A stochastic cellular automata model of innovation diffusion **/** Technological forecasting and social change, ***44,*** no. ***1,*** August 1993, p. 87.
516. ***Jebelean T.*** Long Integer Multiplication by Cellular Automata**:** *An Annotated Bibliography* **/** Techn. Rep., ***RISC-Linz,*** Johannes Kepler University, Linz, Austria, 1993.
517. ***Miya E.*** Multiprocessor **–** Distributed Processing Bibliography **/** Proc. of the Entity-Relationship Conference, North-Holland, Karlsruhe, October 1992.
518. ***Bayrak C. et al.*** The annotated bibliography on cellular automata **/** Tech. Rep.**,** ***90-CSE-30,*** Southern Methodist University, 1990.
519. ***Gutowitz H.*** Maps of recent ***CA*** and lattice gas automata literature **//** Physica ***D45,*** 1990
520. ***Dehne P., Sack J.-R.*** A Survey of Parallel Computational Geometry Algorithms **/** Proc. of the 4^{th} Int. Workshop on Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays, 1988.
521. ***Cimagalli V., Balsi M.*** Cellular Neural Networks: *A Review* **/** Proc. of the 6^{th} Italian Workshop on Parallel Architectures and Neural Networks, Vietri sul Mare, Italia, May 1993.
522. ***Maruoka A., Kimura M.*** Injectivity and surjectivity of parallel maps for cellular automata **//** Journal of Comput. and Systems Sciences, ***18,*** 1979, pp. 47-64.
523. ***Langton C.*** Studying artificial Life with cellular automata **//** Physica ***D22,*** 1986.
524. ***Langton C.*** *Artificial Life***.-** Redwood City: Addison-Wesley, 1989.
525. ***Langton C. et al.*** *Artificial Life II***.-** Addison-Wesley, Reading, MA, 1990.
526. ***Thalmann D.*** A Lifegame Approach to Surface Modelling and Rendering **//** The Visual Computer, ***2,*** no. ***6,*** 1986, pp. 384-390.
527. ***Sutner K.*** The sigma-game and cellular automata **//** American Math. Monthly, ***97,*** 1990.
528. ***Alstrom P, Leao J.*** Self-organized criticality in the game of life **//** Phys. Rev. ***E49, 4,*** 1994.
529. ***Bays C.*** A new candidate rule for the game of three-dimensional life **//** Complex Systems, ***6,*** 1992, pp. 433-441.
530. ***Garcia J. et al.*** Nonlinear dynamics of the cellular-automaton game of life **//** Physical Review ***E48, 5,*** 1993, pp. 3345-3351.
531. ***Sipper M.*** Studying artificial life using a simple, general cellular model **//** Artificial Life Journal, ***2,*** no. ***1,*** 1995.
532. ***Poupet V.*** Simulating ***3D*** Cellular Automata with ***2D*** Cellular Automata **/** ***MFCS 2004,*** eds. ***J. Fiala et al., LNCS 3153.-*** Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, pp. 439–450.
533. ***Rŧoka Z.*** Simulations between cellular automata on Cayley graphs **//** Theoretical Comp. Science, ***225,*** 1999, pp. 81–111.
534. ***Martin B.*** A geometrical hierarchy on graphs via cellular automata **//** Fundamenta Informaticae, ***52,*** 2002, pp. 157–181.
535. ***Мартыненко Б.*** Языки и трансляция.- С.-Петербург: С.-Петербургский ун-т, 2004.
536. ***http://www.geocities.com/ca_hs_ref, http://www.cellular-automata.narod.ru***
537. ***Miranda E. R.*** *Composing Music with Computers***.-** Oxford: Focal Press, 2001.
538. ***Miranda E. R.*** Granular synthesis of sounds by means of cellular automata **//** Leonardo, ***28***(***4***), 1995.

539. ***Dewdney A.*** A cellular universe of debris, droplets, defects and demons **//** Scientific American, August 1989.
540. ***Porter R., Bergmann N.*** Evolving ***FPGA*** based cellular automata **//** ***LNCS 1585.-*** Berlin: Springer-Verlag, 1999.
541. ***Cattaneo G., Margara L.*** Topological denitions of chaos applied to cellular automata dynamics **//** ***LNCS 1450.-*** Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
542. ***Ilachinski A.*** *Cellular Automata: A Discrete Universe***.-** Singapore: World Sci. Publ., 2001.
543. ***Gunji Y.*** The algebraic properties of finite cellular automata **//** Physica ***D41, 2,*** 1990.
544. ***Clementi A., Impagliazzo R.*** Graph theory and interactive protocols for reachability problems on finite cellular automata **//** ***LNCS 778.-*** Berlin-Heidelberg: Springer, 1994.
545. ***Библиотека программных средств для Maple – www.aladjev-maple-book.narod.ru/***
546. ***Дмитриев А.С. и др.*** Динамический хаос как парадигма современных систем связи **//** Зарубежная радиоэлектроника, ***№ 10,*** 1997.
547. ***Дмитриев А.С., Старков С.О.*** Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации **//** Зарубежная радиоэлектроника, ***№ 11,*** 1998.
548. ***Barca D. et al.*** Cellular automata for simulating lava flows: A method and examples of the Etnean eruptions **//** Transport Theory and Statistical Physics, ***23(1–3),*** 1994.
549. ***Bennett C.H et al.*** Cellular Automata ***'86*** Conference **/** Tech. Rep. ***MIT/LCS/TM-317,*** MIT Lab. for Comp. Sci., 1986.
550. ***Binder P.M.*** Domains and synchronization in high-dimensional cellular automata **//** Physical Rev., ***E51,*** 1995.
551. ***Bruyn L., Van Den Bergh.*** Algebraic properties of linear cellular automata **//** Linear Algebra and its Applications, ***157,*** 1991.
552. ***Bunimovich L.A., Troubetzkoy S.E.*** Rotators, periodicity, and absence of diffusion in cyclic cellular automata **//** Journal of Stat. Phys., ***74(1/2),*** 1994.
553. ***Chopard B., Droz M.*** Cellular automata model for heat conduction in a fluid **//** Physical Letters, ***A, 126 (8/9),*** 1988.
554. ***Chou Hui-Hsien.*** Self-Replicating Structures in a Cellular Automata Space **/** PhD Dissertation, ***CS-TR-3715/UMIACS-TR-96-85,*** Univ. of Maryland, 1996.
555. ***Culik K., Yu S.*** Undecidability of ***CA*** classification schemes **//** Complex Systems, ***2,*** 1988.
556. ***Culik K. et al.*** Formal languages and global ***CA*** behavior **//** Physica ***D45,*** 1990.
557. ***D'amico et al.*** On computing the entropy of cellular automata **/** ***LNCS 1443.-*** Berlin, 1998.
558. ***Das R. et al.*** A genetic algorithm discovers particle-based computation in cellular automata **/** Parallel Problem Solving in Nature.- Berlin: Springer-Verlag, 1994.
559. ***Durand B.*** Automates cellulaires: reversibilite et complexite **/** PhD Thesis, Ecole Normale Superieure de Lyon, 1994.
560. ***Gács P.*** Reliable cellular automata with self-organization **/** Proc. of the Conf. on Foundations of Comp. Sci., 1997.
561. ***Griffeath D., Gravner J.*** Cellular automaton growth on Z^1***:*** Theorems, examples, and problems **//** Advances in App. Math., ***21,*** 1998.
562. ***Huang W.*** General Purpose Cellular Automata Programming **/** Tech. Rep. ***TR #02-03,*** Iowa: Iowa State Univ., 2002.
563. ***Li W. et al.*** Transition phenomena in ***CA*** rule space **//** Physica ***D45,*** 1990.
564. ***Mitchell M. et al.*** Evolving cellular automata to perform computations: Mechanisms and impediments **//** Physica ***D75, (1-3),*** 1994.
565. ***Sarkar P.*** A brief history of cellular automata **//** ***ACM*** Comp. Surveys, ***32,*** no. ***1,*** 2000.
566. ***Kier L.B. et al.*** *Modeling Chemical Systems using Cellular Automata***.-** Berlin: Springer, 2005.

АЛАДЬЕВ ВИКТОР ЗАХАРОВИЧ

Аладьев В.З. родился ***14.06.1942*** в г. Гродно ***(****Беларусь****).*** После успешного завершения ***2-***й *средней* школы ***(****Гродно****)*** в ***1959*** поступил на ***1-***й курс физико-математического факультета Гродненского университета, в ***1962*** был переведен на отделение «*Математики*» Тартусского университета ***(****Эстония****).*** В ***1966*** успешно закончил Тартуский университет по специальности «*Математика*»***.*** В ***1969*** поступил в аспирантуру Академии Наук Эстонии по специальности «*Теория вероятностей и математическая статистика*»***,*** которую успешно закончил в ***1972*** сразу по двум специальностям «*Теоретическая кибернетика*» и «*Техническая кибернетика*»***.*** Ему была присвоена докторская степень по математике за первую монографию «*Mathematical Theory of Homogeneous Structures and Their Applications*»***.*** С ***1969*** г. ***Аладьев В.З. –*** Президент созданной им *Таллиннской творческой группы* ***(ТТГ),*** научные результаты которой получили международное признание, прежде всего, в области исследований по *математической теории однородных структур* ***(****Cellular Automata****).*** С ***1972*** по ***1990*** занимал ответственные посты в ряде проектно-технологических и исследовательских организаций г. Таллинна. В ***1991*** г. ***Аладьев В.З.*** организовал научно-прикладную фирму ***VASCO Ltd.,*** а с конца ***1992*** г. становится вице-президентом ***Salcombe Eesti Ltd.***

Аладьев В. является автором более ***370*** научных и научно-технических работ ***(****включая* ***66*** *монографий, книг и сборников статей****),*** опубликованных в бывшем *СССР*, *России*, *ФРГ*, *Эстонии*, *Белоруссии*, *Литве*, *Украине*, *ГДР*, *Чехословакии*, *Венгрии*, *Японии*, *США*, *Голландии*, *Болгарии*, *Молдавии* и *Великобритании*. С ***1972*** г. является референтом и членом редколлегии международного математического журнала «*Zentralblatt fur Mathematik*» и с ***1980*** г. ***–*** членом ***IAMM.*** Им основана Эстонская школа по математической теории однородных структур, фундаментальные результаты которой получили международное признание и легли в основу нового раздела современной математической кибернетики.

В ***1993 Аладьев В.*** по результатам своей многолетней научной активности избран членом рабочей группы ***IFIP (****International Federation for Information Processing****, USA)*** по математической теории однородных структур и ее приложениям. На целом ряде международных научных форумов по математике и кибернетике ***Аладьев В.З.*** участвовал в качестве члена оргкомитета или приглашенного докладчика. В апреле ***1994*** г. ***Аладьев В.*** по совокупности научных работ в области *кибернетики* избран академиком Российской Академии Космонавтики по отделению «*Фундаментальных исследований*»***,*** в сентябре же ***1994*** г. он избирается академиком Российской Академии Ноосферы по отделению «*Информатики*»***.*** В сентябре ***1995 Аладьев В.*** избирается действительным членом *Российской Академии Естественных Наук* ***(РАЕН)*** по отделению «*Ноосферные знания и технологии*»***,*** а в ***1998*** г. ***–*** академиком Российской Экологической Академии.

В ноябре ***1997 Аладьев В.*** избран академик-секретарем *Балтийского* отделения Российской Академии Ноосферы, объединяющего ученых и специалистов трех стран *Балтии* и *Беларуси*, работающих в области комплекса научных дисциплин, входящих в проблематику ноосферы и смежных с нею областей научной деятельности, включая теоретические и прикладные вопросы по проблематике однородных структур. В результате реорганизации *Российской Академии Ноосферы* в Международную, в декабре ***1998 Аладьев В.*** избирается ее Первым вице-президентом. В конце ***1999 Аладьев В.З.*** по совокупности научных работ в области кибернетики и информатики избирается иностранным членом ***РАЕН*** по отделению «*Информатики и кибернетики*»***.*** Наиболее значительные научные результаты ***Аладьева В.З.*** относятся к математической теории *однородных* структур и ее приложениям. Сфера его научных интересов включает математику, информатику, кибернетику, вычислительные науки, физику и др***. –*** ***www.famous-scientists.ru/2763/.***

БОЙКО ВАЛЕРИЙ КОНСТАНТИНОВИЧ

Бойко В.К. родился ***10.09.1950*** в городе Гродно ***(****Беларусь****).*** В ***1967*** окончил среднюю школу и поступил на физико-математический факультет Гродненского государственного педагогического института имени Я. Купалы, который с отличием окончил в ***1971*** г. С ***1971*** по ***1976*** учился в аспирантуре и служил в армии. В ***1978*** г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «*Краевая задача с управлением для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма*»**.** В период с ***1976*** по ***1983*** работал ассистентом**,** старшим преподавателем, доцентом кафедры дифференциальных уравнений Гродненского государственного университета имени Я. Купалы.

В ***1983*** г. ***Бойко В.К.*** оканчивает курсы французского языка и с ***1984*** по ***1987*** г.г. по направлению Министерства Образования СССР работает доцентом кафедры математики строительного института в городе Эль**-**Аснам ***(****Алжир****).***

По возвращении ***Бойко В.К.*** продолжает работу *доцентом* на кафедре дифференциальных уравнений Гродненского государственного университета имени Я. Купалы ***(ГрГУ).*** Активно занимается научной работой, является ответственным исполнителем ряда научных тем, работает заместителем декана по научной работе. С ***1998*** по август ***2007*** г. являлся деканом факультета математики и информатики ***ГрГУ.*** В настоящее время ***Бойко В.К.*** является доцентом на кафедре дифференциальных уравнений и оптимального управления Гродненского государственного университета имени Я. Купалы, одновременно исполняя обязанности заведующего этой кафедры**.** ***Бойко В.К.*** возглавляет центр мониторинга, анализа и управления Гродненского государственного университета.

Основные научные результаты ***Бойко В.К.*** относятся к теории управления для различных классов линейных систем. Им получено решение задачи о *минимальном* числе входов, предложены алгоритмы построения оптимальных управлений и фильтров в различных задачах, рассмотрен целый ряд других интересных свойств управляемых систем. Полученные им результаты используются в теоретических исследованиях, а также при решении конкретных задач для управляемых объектов.

Бойко В.К. является активным сторонником развития математического образования в Гродненской области и Беларуси в целом. В течение многих лет он возглавляет жюри областных математических олимпиад. По его инициативе при факультете с ***2000*** года возобновила свою работу ***Школа*** *точных наук* для талантливых детей. Им ведется большая работа по *внедрению* современных информационных технологий в научные исследования, учебный процесс и другие сферы деятельности университета. Как признание заслуг факультета в этой области в ***2005*** факультет переименован в факультет *математики* и *информатики***.**

Бойко В.К. является автором более ***80*** научных и научно-методических работ ***(****в том числе* ***2*** *монографии и* ***5*** *методических указаний****),*** опубликованных в СССР, Беларуси, России, Украине и Польше.

По итогам многолетней научно-педагогической деятельности наряду с активным участием в академической деятельности Международной Академии Ноосферы ***(МАНУР)*** в мае ***2007*** г. ***Бойко В.К.*** был избран ***членом-корреспондентом МАНУР.***

РОВБА ЕВГЕНИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

Ровба Е.А. родился ***01.04.1949*** в деревне Андрошевщина Лидского района Гродненской области. В ***1971*** г. с отличием окончил *Белорусский государственный университет* ***(БГУ)*** по специальности «*математика*»**.** В ***1975*** защитил кандидатскую диссертацию на тему «*Некоторые вопросы рациональной аппроксимации*»**.** В период с ***1974*** по ***1979*** г.г. работал старшим преподавателем, доцентом, заведующим кафедрой математического факультета Гомельского государственного университета.

В ***1979 Ровба Е.А.*** переехал на работу в Гродненский государственный университет им. Я. Купалы ***(ГрГУ),*** где работал с ***1979*** г. доцентом, а с ***1993*** г. заведовал кафедрой теории функций, функционального анализа, вероятностей и прикладной математики. В ***1999*** защитил докторскую диссертацию на тему «*Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации*»**,** которая легла в основу одноименной монографии, опубликованной в ***2001*** г. Работал заместителем декана и деканом математического факультета, проректором университета по учебной работе. С ***1986*** по ***1988*** г. **–** консультант Министерства образования Республики Куба. С ***1996*** по ***1998*** г. работал деканом Гродненского филиала специального факультета бизнеса и информационных технологий ***БГУ.*** С ***1998*** по ***2000*** годы **–** ректор Института повышения квалификации и переподготовки руководящих работников Гродненского университета. С ***2000*** г. **–** профессор, первый проректор университета. В ***2005*** г. ***Е.А. Ровба*** был назначен ректором ***ГрГУ*** им. Я. Купалы**.**

Основные научные исследования ***Е.А. Ровбы*** относятся к теории рациональных приближений функций. Им построены интерполяционные и интегральные ***(****на отрезке****)*** рациональные операторы, обладающие классическими с точки зрения конструктивной теории функций аппроксимационными характеристиками. Найден подход к построению обобщений квадратурных формул Гаусса на базе ортогональных систем рациональных функций и интерполяции. Получены оценки уклонений рациональных операторов Фурье и Валле**-**Пуссена на классах функций, имеющих дробную производную ограниченной вариации**.** Впервые интерполирование по *специальным* системам узлов применено для *рациональной* аппроксимации различных классов функций, отображающих их *особенности***.** Полученные методы и результаты используются в теоретических исследованиях в теории аппроксимации функций, и при решении конкретных задач вычислительной математики, в конструктивной теории функций и численных методах.

Созидательность организационной деятельности ***Е.А. Ровбы*** оказала большое влияние на развитие образовательной среды Гродненской области ***(****Беларусь****). Ровба Е.А.*** инициировал создание в Гродно полнокровной самофинансируемой образовательной структуры в сфере последипломного образования Гродненского филиала Специального факультета бизнеса и информационных технологий ***БГУ.*** Полученный опыт был *успешен* и стал основой для создания еще одной инновационной образовательной структуры **–** Института повышения квалификации и переподготовки руководящих работников ***(****ныне Институт последипломного образования* ***ГрГУ).*** Уже будучи первым проректором университета, ***Е.А. Ровба*** способствовал открытию и становлению лицеев, гимназий, созданию новых учебно**-**методических объединений в Гродненской области.

Ровба Е.А. является автором более ***110*** научных и научно-методических работ ***(****включая* ***3*** *монографии и* ***4*** *учебных пособия****)***, опубликованных в СССР, Беларуси, Болгарии, Кубе, России, Великобритании и Украине.

По итогам многолетней научно-педагогической деятельности наряду с активным участием в академической деятельности Международной Академии Ноосферы ***(МАНУР)*** в мае ***2007*** г. ***Ровба Е.А.*** был избран ***действительным членом (академиком) МАНУР.***

Научное издание

АЛАДЬЕВ Виктор Захарович
БОЙКО Валерий Константинович
РОВБА Евгений Алексеевич

КЛАССИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ СТРУКТУРЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

CLASSICAL CELLULAR AUTOMATA: THEORY AND APPLICATIONS

М о н о г р а ф и я

Издается в авторской редакции

Оригинал-макет подготовлен в Балтийском отделении
Международной Академии Ноосферы, Таллинн, Эстония

Дизайн обложки: ***О.В. Канчуга***

Сдано в набор **11.04.2008.** Подписано в печать **28.04.2008.**
Формат 60x84/8. Бумага офсетная.
Печать RISO. Гарнитура Book Antiqua.
Усл. печ. л. **56,50.** Уч.-изд. л. **48,53.**
Тираж 200 экз. Заказ 052.

Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».
ЛИ № 02330/0133257 от 30.04.2004. Пер. Телеграфный, 15а, 230023, Гродно.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика на технике издательского центра
Учреждения образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».
ЛП № 02330/00556882 от 30.04.2004. Пер. Телеграфный, 15а, 230023, Гродно.